Úvod do dynamiky kontinua
Matematický aparát

Radek Fučík, Pavel Strachota

1 Základní pojmy

- Vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ jako uspořádanou n-tici reálných čísel zapisujeme jako sloupec

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}.$$

Vektory standardní báze prostoru $\mathbb{R}^n$ označíme písmeny $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, přičemž

$$\boldsymbol{e}_\ell = (\delta_{\ell 1}, \delta_{\ell 2}, \ldots, \delta_{\ell n})^{\mathrm{T}} \quad \forall \ell \in \hat{n}.$$

- Pro skalární součin dvou vektorů $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ a $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ budeme uvažovat důsledně standardní skalární součin v $\mathbb{R}^n$ a zapisovat pomocí symbolu $\cdot$ nebo maticového násobení

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

Pro $n \in \{2, 3\}$ platí

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \|\boldsymbol{a}\| \, \|\boldsymbol{b}\| \cos(\theta), \tag{1}$$

kde θ je úhel, který svírají vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$.

Poznámka. Vztah (1) lze považovat jako definici úhlu $\theta \in (0, \pi)$ mezi vektory $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ i pro obecné $n \in \mathbb{N}$.

- Pro normu vektoru $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ budeme vždy používat Euklidovu normu v $\mathbb{R}^n$

$$\|\boldsymbol{a}\| = |\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}|^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

- Vektorový součin dvou vektorů $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ a $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ v $\mathbb{R}^3$ je antikomutativní operace definovaná vztahem

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}.$$

Pro velikost (normu) vektorového součinu platí Lagrangeova identita

$$\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2 \, \|\boldsymbol{b}\|^2 - |\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}|^2 = \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

kde na pravé straně vystupuje determinant tzv. Gramovy matice (gramián). Poznamenejme, že vektorový součin lze vyjádřit i pomocí úhlu θ, který vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ svírají

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \|\boldsymbol{a}\| \, \|\boldsymbol{b}\| \sin(\theta) \, \boldsymbol{n},$$

kde $\boldsymbol{n}$ je jednotkový vektor kolmý k rovině dané vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$. Pokud jsou oba vektory rovnoběžné (kolineární), tj. nedefinují žádnou rovinu ale jen pouze přímku, je jejich vektorový součin nulový.

2 Diferenciální počet funkcí více proměnných

- Funkce $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je vektor skalárních funkcí $f_\ell : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\boldsymbol{x}) \\ f_2(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ f_m(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} = (f_1(\boldsymbol{x}), \dots, f_m(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}}$$

- *Derivaci* funkce více proměnných $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ v bodě $\boldsymbol{x}_0$ definujeme jako lineární zobrazení $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)$ z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ takové, že

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \frac{1}{\|\boldsymbol{h}\|} \left(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) - \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h}\right) = \boldsymbol{0}. \tag{3}$$

$\boldsymbol{f}'$ se též nazývá totální derivace nebo totální diferenciál a v tom případě se zpravidla značí symbolem $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{f}}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}$.

- *Derivace* funkce více proměnných $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *podle vektoru* $\boldsymbol{v}$ v bodě $\boldsymbol{x}_0$ je vektor

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}_0) := \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0 + h\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\right)$$

a pokud existuje totální derivace $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)$, plyne z (3)

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0 + h\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) - \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)(h\boldsymbol{v})\right) = \boldsymbol{0},$$

z čehož z linearity derivace $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)$ rovnou dostaneme

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{v}.$$

Pokud $\boldsymbol{v}$ je jednotkový vektor, nazýváme derivaci $\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}_0)$ derivací funkce $\boldsymbol{f}$ *ve směru* $\boldsymbol{v}$ v bodě $\boldsymbol{x}_0$. Uvažujeme-li libovolný vektor $\boldsymbol{w}$ a jednotkový vektor $\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{w}\|}$, lze přímo z definice derivace ve směru ukázat, že

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{w}}(\boldsymbol{x}_0) = \|\boldsymbol{w}\| \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}_0).$$

Poznámka 1. Definici úplné derivace lze omezit na určitou podmnožinu proměnných. Nechť je dána funkce $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^{n_1+n_2} \to \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}\right)$ kde $\boldsymbol{x}^{(1)} \in \mathbb{R}^{n_1}$, $\boldsymbol{x}^{(2)} \in \mathbb{R}^{n_2}$. Potom úplnou derivací funkce $\boldsymbol{f}$ vzhledem k vektoru proměnných $\boldsymbol{x}^{(1)}$ v bodě $\left(\boldsymbol{x}_0^{(1)}, \boldsymbol{x}_0^{(2)}\right)$ rozumíme lineární zobrazení $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{f}}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}^{(1)}}\left(\boldsymbol{x}_0^{(1)}, \boldsymbol{x}_0^{(2)}\right) : \mathbb{R}^{n_1} \to \mathbb{R}^m$ takové, že

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \frac{1}{\|\boldsymbol{h}\|} \left(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0^{(1)} + \boldsymbol{h}, \boldsymbol{x}_0^{(2)}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0^{(1)}, \boldsymbol{x}_0^{(2)}) - \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{f}}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}^{(1)}}\left(\boldsymbol{x}_0^{(1)}, \boldsymbol{x}_0^{(2)}\right)\boldsymbol{h}\right) = \boldsymbol{0}. \tag{4}$$

Tuto definici lze přímočarým způsobem rozšířit na libovolnou permutaci složek vektorů $\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}$ v argumentu funkce $\boldsymbol{f}$. Zde je potřeba poznamenat dva různé přístupy při značení totální derivace podle jedné sady proměnných. Vzhledem k tomu, že vybranou sadu proměnných $\boldsymbol{x}^{(1)}$může tvořit i jedna složka, splývá zápis $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{f}}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}^{(1)}}\left(\boldsymbol{x}_0^{(1)}, \boldsymbol{x}_0^{(2)}\right)$ s parciální derivací funkce $\boldsymbol{f}$ podle $\boldsymbol{x}^{(1)}$. Proto je možné značit totální derivaci podle sady proměnných $\boldsymbol{x}^{(1)} = \left(x_1^{(1)}, \dots, x_{n_1}^{(1)}\right)^{\mathrm{T}}$ též symbolem $\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial\left(x_1^{(1)}, \dots, x_{n_1}^{(1)}\right)}\left(\boldsymbol{x}_0^{(1)}, \boldsymbol{x}_0^{(2)}\right)$.

- *Parciální derivace* funkce $\boldsymbol{f}$ v bodě $\boldsymbol{x}_0$ jsou derivace ve směru vektorů standardní báze a označují se
$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_\ell}(\boldsymbol{x}_0) = \partial_\ell \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) := \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{e}_\ell}(\boldsymbol{x}_0).$$

- Matici lineárního zobrazení $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)$ ve standardních bázích prostorů $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ nazýváme Jacobiho maticí a značíme $\mathbf{J}_f(\boldsymbol{x}_0)$. Tvar jejího ℓ-tého sloupce je zřejmý z rovnosti
$$\begin{pmatrix} J_{1\ell} \\ J_{2\ell} \\ \vdots \\ J_{n\ell} \end{pmatrix} = \mathbf{J}_f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{e}_\ell = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{e}_\ell = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_\ell}(\boldsymbol{x}_0) = \begin{pmatrix} \partial_\ell f_1(\boldsymbol{x}_0) \\ \partial_\ell f_2(\boldsymbol{x}_0) \\ \vdots \\ \partial_\ell f_n(\boldsymbol{x}_0) \end{pmatrix} \quad \forall \ell \in \hat{n},$$
takže celkem máme
$$\mathbf{J}_f(\boldsymbol{x}_0) = \begin{pmatrix} \partial_1 \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) & \partial_2 \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) & \dots & \partial_n \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(\boldsymbol{x}_0) & \partial_2 f_1(\boldsymbol{x}_0) & \dots & \partial_n f_1(\boldsymbol{x}_0) \\ \partial_1 f_2(\boldsymbol{x}_0) & \partial_2 f_2(\boldsymbol{x}_0) & \dots & \partial_n f_2(\boldsymbol{x}_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_m(\boldsymbol{x}_0) & \dots & \dots & \partial_n f_m(\boldsymbol{x}_0) \end{pmatrix}.$$

- Derivace složené funkce $\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, kde $\boldsymbol{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s$ a $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^m$, je za předpokladu existence totálních derivací $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0))$ a $\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x}_0)$ dána výrazem
$$(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})'(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)) \circ \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x}_0). \tag{5}$$
Protože na pravé straně (5) jde o složení dvou lineárních zobrazení, lze podle zvyku symbol " $\circ$ " vypustit. Z (5) také okamžitě plyne vztah pro Jacobiho matici složeného zobrazení
$$\mathbf{J}_{f\circ g}(\boldsymbol{x}_0) = \mathbf{J}_f(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0))\,\mathbf{J}_g(\boldsymbol{x}_0).$$
Z definice násobení matic pak odvodíme pravidlo pro výpočet parciální derivace i-té složky funkce $f \circ g$ podle ℓ-té proměnné
$$\mathbf{J}_{f\circ g}(\boldsymbol{x}_0)_{i\ell} = \frac{\partial (f \circ g)_i}{\partial x_\ell}(\boldsymbol{x}_0) = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial f_i(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0))}{\partial y_k} \frac{\partial g_k(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_\ell}, \tag{6}$$
kde y_k označují složky argumentu funkce $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$.

- Pro zápis vícerozměrné derivace se běžně zavádí operátor nabla ∇, který se dá reprezentovat jako vektor parciálních derivací $\nabla = (\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n)^{\mathrm{T}} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\mathrm{T}}$. Derivaci skalární funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ pak můžeme (podle Rieszovy věty) reprezentovat gradientem, neboť platí
$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}_0) = f'(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{v} = \nabla f(\boldsymbol{x}_0) \cdot \boldsymbol{v} = (\partial_1 f, \partial_2 f, \dots, \partial_n f)^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{v}.$$

Poznámka. V následujících kapitolách budou pro nás důležité funkce závislé na čase a na třech prostorových souřadnicích. Ve shodě s poznámkou 1 pak gradientem funkce
$$f : \mathcal{J} \times \Omega \to \mathbb{R}$$
kde $\mathcal{J} = (0, T_{\max})$ je časový interval a $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je oblast, rozumíme výraz
$$\nabla f(t, \boldsymbol{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(t, \boldsymbol{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(t, \boldsymbol{x}), \frac{\partial f}{\partial x_3}(t, \boldsymbol{x})\right)^{\mathrm{T}}.$$

3 Integrální počet funkcí více proměnných

- Integrál skalární funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ přes *měřitelnou*[1] množinu $V \subset \mathbb{R}^n$ značíme

$$\int_V f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) = \int_V f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}V = \int_V f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

  kde $\mu = \mu_n$ označuje n-rozměrnou Lebesgueovu míru zavedenou na $\mathbb{R}^n$. Množinu všech (Lebesgueovsky) integrovatelných funkcí na množině V značíme $\mathrm{L}(V)$.

- Řekneme, že zobrazení $\boldsymbol{\varphi} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je *regulární* na otevřené množině $M \subset \mathbb{R}^n$, jestliže prvky matice $\mathbf{J}_{\boldsymbol{\varphi}}$ jsou spojité na M a pro každé $\boldsymbol{x} \in M$ platí $\det \mathbf{J}_{\boldsymbol{\varphi}}(\boldsymbol{x}) \neq 0$.

Věta. (o substituci ve vícerozměrném integrálu) *Nechť $\boldsymbol{\varphi} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je prosté regulární zobrazení definované na otevřené množině A. Potom pro každou měřitelnou podmnožinu $V \subset A$ platí*

$$\int_V f(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\xi}))\left|\det \mathbf{J}_{\boldsymbol{\varphi}}(\boldsymbol{\xi})\right|\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} = \int_{\boldsymbol{\varphi}(V)} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

resp. pro libovolnou měřitelnou $W \subset \boldsymbol{\varphi}(A)$ máme

$$\int_W f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\boldsymbol{\varphi}^{-1}(W)} f(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\xi}))\left|\det \mathbf{J}_{\boldsymbol{\varphi}}(\boldsymbol{\xi})\right|\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}$$

Věta. (Fubini) *Nechť $n, m \in \mathbb{N}$, $V \subset \mathbb{R}^{n+m}$. Uvažujme funkci $f \in \mathrm{L}(V)$, $f = f(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} = \left(\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}\right)^{\mathrm{T}}$ kde $\boldsymbol{x}^{(1)} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x}^{(2)} \in \mathbb{R}^m$. Označme*

$$\begin{aligned} A_{\boldsymbol{x}^{(1)}} &= \left\{\boldsymbol{x}^{(2)} \subset \mathbb{R}^m \middle| \left(\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}\right) \in V\right\}, \\ B &= \left\{\boldsymbol{x}^{(1)} \in \mathbb{R}^n \middle| A_{\boldsymbol{x}^{(1)}} \neq \emptyset\right\}. \end{aligned}$$

Potom platí

$$\int_V f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_B \left(\int_{A_{\boldsymbol{x}^{(1)}}} f\left(\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x}^{(2)}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x}^{(1)} =: \int_B \mathrm{d}\boldsymbol{x}^{(1)} \int_{A_{\boldsymbol{x}^{(1)}}} \mathrm{d}\boldsymbol{x}^{(2)} f\left(\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}\right).$$

Poznámka. Množina $A_{\boldsymbol{x}^{(1)}}$ je v podstatě „řez“ množiny V bodem $\boldsymbol{x}^{(1)}$. Množina B obsahuje všechna taková $\boldsymbol{x}^{(1)}$, kterými lze vést neprázdný řez. Fubiniho věta by zůstala v platnosti i při nahrazení B celým $\mathbb{R}^n$, protože pro $\boldsymbol{x}^{(1)} \in \mathbb{R}^n \backslash B$ je vnitřní integrál přes prázdnou množinu roven nule.

3.1 Záměna derivace a integrálu

Věta 2. (o derivaci integrálu podle parametru) *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval a V je měřitelná množina. Nechť $f : V \times I \to \mathbb{R}$ splňuje následující předpoklady:*

[1] Pojmy *měřitelná funkce* a *měřitelná množina* v tomto kurzu nezavádíme. Tyto pojmy vystupují v teorii Lebesgueova integrálu, kterou lze budovat klasickým způsobem na základě teorie míry (jako v MAB4) nebo alternativní tzv. Daniellovou konstrukcí (vyloženou v MAA4), která teorii míry a priori nepotřebuje a její pojmy zpětně definuje s využitím Daniellova integrálu a charakteristických funkcí. Pro naše potřeby bude každá představitelná množina měřitelná, stejně jako každá představitelná funkce definovaná na takové množině. Předpoklad měřitelnosti však pro korektnost uvádíme ve znění vět, které budeme pro další výklad potřebovat.

1. *Integrál* $F(\alpha) := \int\limits_V f(\boldsymbol{x},\alpha)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ *konverguje (je konečný) alespoň pro jedno* $\alpha \in I$*, tj. zkráceně* $(\exists\alpha \in I)(f(\cdot,\alpha) \in \mathrm{L}(V))$.

2. *Pro každé* $\alpha \in I$ *je funkce* $f(\cdot,\alpha)$ *měřitelná na* V*.*

3. *Funkce* $f(\boldsymbol{x},\cdot)$ *je diferencovatelná na* I *pro skoro všechna*[2] $\boldsymbol{x} \in V$*.*

4. *Existuje tzv.* ***integrabilní majoranta*** *k funkci* $\frac{\partial f}{\partial\alpha}$*, tj. existuje* $g \in \mathrm{L}(V)$ *tak, že pro skoro všechna* $\boldsymbol{x} \in V$ *a pro všechna* $\alpha \in I$ *platí*
$$\left|\frac{\partial f(\boldsymbol{x},\alpha)}{\partial\alpha}\right| \leq g(\boldsymbol{x}).$$

Potom pro všechna $\alpha \in I$ *integrál* $F(\alpha)$ *konverguje a platí*

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\alpha} = \int\limits_V \frac{\partial f(\boldsymbol{x},\alpha)}{\partial\alpha}\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

4 Integrace po varietách

4.1 Křivkový integrál

Definice. *Křivkou* v $\mathbb{R}^n$ rozumíme libovolnou spojitou funkci $\boldsymbol{\varphi} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$. Je-li $\boldsymbol{\varphi}$ prosté na (a,b), křivka $\boldsymbol{\varphi}$ se nazývá *jednoduchá*. Platí-li $\boldsymbol{\varphi}(a) = \boldsymbol{\varphi}(b)$, jde o křivku *uzavřenou*, v opačném případě se jedná o křivku *otevřenou*. Množinu $\varphi = \langle\boldsymbol{\varphi}\rangle = \boldsymbol{\varphi}([a,b])$ nazýváme *dráhou* nebo *geometrickým obrazem křivky* v $\mathbb{R}^n$. Zobrazení $\boldsymbol{\varphi}$ se nazývá parametrizací dráhy φ.

Definice. Nechť $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ je dráha a nechť $(\forall t \in (a,b))(\exists\dot{\varphi}(t))$. *Křivkovým (dráhovým) integrálem prvního druhu* funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ po dráze φ rozumíme integrál

$$\int\limits_\varphi f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}l = \int\limits_a^b f(\boldsymbol{\varphi}(t))\,\|\dot{\boldsymbol{\varphi}}(t)\|\,\mathrm{d}t. \tag{7}$$

Poznámka. Výraz $\mathrm{d}l = \|\dot{\boldsymbol{\varphi}}(t)\|\,\mathrm{d}t$ má smysl délky elementu dráhy $\boldsymbol{\varphi}([t,t+\mathrm{d}t])$. Integrál $\int\limits_\varphi 1\mathrm{d}l$ vyjadřuje délku dráhy φ. Pro nezápornou f integrál $\int\limits_\varphi f\mathrm{d}l$ vyjadřuje dvourozměrnou plochu množiny

$$S = \left\{(\boldsymbol{x},y) \in \mathbb{R}^{n+1} \middle| \boldsymbol{x} \in \varphi \wedge y \in (0, f(\boldsymbol{x}))\right\},$$

tj. plochu pod „grafem“ funkce f vyneseným podél dráhy φ.

Definice. *Křivkovým (dráhovým) integrálem druhého druhu* vektorového pole (funkce) $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ rozumíme integrál

$$\int\limits_\varphi \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int\limits_a^b \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(t))\cdot\dot{\boldsymbol{\varphi}}(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_a^b \sum_{k=1}^n f_i(\boldsymbol{\varphi}(t))\,\dot{\varphi}_i(t)\,\mathrm{d}t, \tag{8}$$

kde orientace dráhy je dána její parametrizací.

[2] Daný výrok $A(x)$ platí *skoro všude* na V, jestliže existuje množina $N \subset V$ tak, že její míra $\mu(N) = 0$ a výrok $A(x)$ platí $\forall x \in V \backslash N$.

Poznámka. Integrandem jednorozměrného integrálu na pravé straně (8) je projekce vektorového pole do směru tečného vektoru ke dráze $\boldsymbol{\tau}(t) = \dot{\boldsymbol{\varphi}}(t)$. Např. je-li pole $\boldsymbol{f}$ v každém bodě kolmé na dráhu, integrál bude roven nule.

Poznámka. Složky vektoru $\dot{\varphi}_i(t)\,\mathrm{d}t$ odpovídají složkám posunutí bodu $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ po dráze ve směrech souřadných os, tj. vektorů standardní báze $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$. Proto se integrál 8 někdy zapisuje též jako

$$\int\limits_{\varphi} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int\limits_{\varphi} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int\limits_{\varphi} \sum_{k=1}^{n} f_k(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_k. \tag{9}$$

Poznámka. Buď φ dráha s parametrizací $\boldsymbol{\varphi} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. *Dráhou opačně orientovanou* ke dráze φ rozumíme dráhu $-\varphi$ danou parametrizací

$$\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t) = \boldsymbol{\varphi}(a + b - t).$$

Pro křivkový integrál druhého druhu platí

$$\int\limits_{-\varphi} \boldsymbol{f}\mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int\limits_{\varphi} \boldsymbol{f}\mathrm{d}\boldsymbol{l}.$$

4.2 Plošný integrál

Ačkoliv je možné s jistou mírou abstrakce zavést obecně integraci po libovolných m-rozměrných varietách v n-rozměrném prostoru ($m < n$), soustředíme se při definici plošných integrálů pouze na plochy v $\mathbb{R}^3$.

Definice. *Plošnou parametrizací* nazýváme každé zobrazení $\boldsymbol{S} : M \to \mathbb{R}^3$ kde $M \subset \mathbb{R}^2$ je oblast. Množinu

$$S = \langle \boldsymbol{S} \rangle = \boldsymbol{S}(M)$$

nazýváme *plochou* nebo geometrickým obrazem zobrazení $\boldsymbol{S}$. Jestliže zobrazení $\boldsymbol{S}$ je prosté a regulární, hovoříme o jednoduché regulární ploše.

Definice. *Plošným integrálem prvního druhu* skalární funkce $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ přes jednoduchou hladkou regulární plochu S rozumíme integrál

$$\int_S f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}S = \int_M f(\boldsymbol{S}(u, v)) \left\| \frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial v}(u, v) \right\| \mathrm{d}(u, v). \tag{10}$$

Poznámka. Výraz $\mathrm{d}S = \left\| \frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial v}(u, v) \right\| \mathrm{d}(u, v)$ má smysl obsahu infinitesimálního rovnoběžníku daného vektory $\frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial u}\mathrm{d}u$ a $\frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial v}\mathrm{d}v$. Obsah plochy S je tedy dán plošným integrálem z jednotky

$$\mu_2(S) = \int\limits_S \mathrm{d}S.$$

Poznámka. Pro výpočet $\mathrm{d}S$ lze využít platnost Lagrangeovy identity (2).

Definice. *Plošným integrálem druhého druhu* vektorového pole $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ přes jednoduchou hladkou regulární plochu S rozumíme integrál

$$\int\limits_S \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int\limits_S \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \int\limits_M \boldsymbol{f}(\boldsymbol{S}(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial v}(u, v) \right) \mathrm{d}(u, v). \tag{11}$$

Poznámka. Platí

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial v}(u,v)\,\mathrm{d}(u,v),$$

kde $\boldsymbol{n}$ je jednotkový normálový vektor k ploše S v bodě $\boldsymbol{S}(u,v)$. V závislosti na parametrizaci může směřovat na jednu nebo druhou stranu plochy, na čemž závisí znaménko integrálu. V následujících kapitolách budeme uvažovat zpravidla uzavřené plochy tvořící hranice souvislých množin $V \subset \mathbb{R}^3$, tj. $S = \partial V$. Vektor $\boldsymbol{n}$ bude směřovat vždy ven z objemu V . Za těchto předpokladů je znaménko plošného integrálu jednoznačně určeno.

Poznámka. Integrandem plošného integrálu druhého druhu je tedy projekce vektorového pole $\boldsymbol{f}$ do směru normály k ploše S.

Poznámka. Formální zápis integrálu 2. druhu je také

$$\int_S \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S f_1(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 + f_2(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_3 + f_3(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2.$$

Je totiž možné zapsat

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \left(\sum_{i=1}^{3} f_i \boldsymbol{e}_i\right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \sum_{i=1}^{3} f_i (\boldsymbol{e}_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S})$$

kde skalární součiny $\boldsymbol{e}_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ představují velikosti projekcí vektoru $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ do směrů souřadných os $\boldsymbol{e}_i$. To je totéž jako velikost projekce plochy $\mathrm{d}S$ do roviny kolmé na $\boldsymbol{e}_i$. Rozsah souřadnic této projekce (což je rovnoběžník) ve směrech daných vektory $\boldsymbol{e}_k$ a $\boldsymbol{e}_l$ ($k \neq l, k, l \neq i$) je roven $\mathrm{d}x_k$ a $\mathrm{d}x_l$ a její plocha je rovna $\mathrm{d}x_k\mathrm{d}x_l$.

4.3 Greenova formule

Následující věty jsou zobecněním metody per partes pro určitý integrál.

Věta 3. (Greenova formule) *Nechť $n \in \{2,3\}$, $V \subset \mathbb{R}^n$ je oblast, $f, g \in \mathrm{C}^1(V)$ a $f, g \in \mathrm{C}(\partial V)$. Potom platí*

$$\int_V \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_k} g(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\int_V f(\boldsymbol{x}) \frac{\partial g(\boldsymbol{x})}{\partial x_k}\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\partial V} f(\boldsymbol{x})\,g(\boldsymbol{x})\,n_k \mathrm{d}S$$

kde n_k je k-tá složka vektoru vnější normály k hranici oblasti V.

Důsledek 4. (Greenova věta). *Nechť $S \subset \mathbb{R}^2$ je oblast a ∂S je uzavřená, po částech hladká dráha. Nechť $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je vektorové pole spojitě diferencovatelné na S a spojité na ∂S. Potom platí*

$$\int_{\partial S} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

přičemž křivka ∂S je uvažována jako kladně orientovaná (proti směru hodinových ručiček).

Důkaz. Křivka $\varphi = \partial S$ parametrizovaná pomocí $\boldsymbol{\varphi} : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ obíhající proti směru hodinových ručiček má na tečný vektor v bodě $\boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))^{\mathrm{T}}$ roven $\boldsymbol{\tau}(t) = \dot{\boldsymbol{\varphi}}(t) = (\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t))^{\mathrm{T}}$ a vektor vnější normály $\boldsymbol{n}(t) = (\dot{x}_2(t), -\dot{x}_1(t))$. Z definice tedy postupně platí

$$\int_{\partial S} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_a^b \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(t)) \cdot \dot{\boldsymbol{\varphi}}(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(t)) \cdot (\tau_1, \tau_2)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(t)) \cdot (-n_2, n_1)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_a^b (f_2(\boldsymbol{\varphi}(t))\,n_1 - f_1(\boldsymbol{\varphi}(t))\,n_2)\,\mathrm{d}t = \int_S \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

kde v poslední rovnosti byla použita na oba členy Greenova formule. □

Důsledek. (Greenova věta - formulace pro diferenciální formy) *Nechť křivka φ je p.č. C^1 jednoduchá uzavřená dráha v $\mathbb{R}^2$ a diferenciální forma $\boldsymbol{\omega} = \omega_1(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_1 + \omega_2(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_2$ je spojitě diferencovatelná na vnitřku křivky φ (tj. třídy $C^1_{int\,\varphi}$) a spojitá na uzávěru vnitřku křivky φ (tj. třídy $C_{\overline{int\,\varphi}}$). Je-li kladná orientace křivky φ daná proti směru hodinových ručiček, pak platí*

$$\int\limits_{\varphi} \omega_1 \mathrm{d}x_1 + \omega_2 \mathrm{d}x_2 = \int\limits_{\varphi} \boldsymbol{\omega} = \int\limits_{int\,\varphi} \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

Důsledek 5. (Gaussova-Ostrogradského věta) *Nechť $\boldsymbol{f} \in \mathrm{C}^1\left(\mathbb{R}^3\right)$ je vektorové pole, $V \subset \mathbb{R}^3$ je oblast. Potom platí*

$$\int\limits_{V} \nabla \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int\limits_{\partial V} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S},$$

kde $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ *směřuje ven z objemu V.*

Důkaz. Podle Greenovy formule s volbou $g(\boldsymbol{x}) = 1$ máme

$$\int\limits_{V} \nabla \cdot f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{3} \int\limits_{V} \frac{\partial f_k}{\partial x_k}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{3} \int\limits_{\partial V} f_k(\boldsymbol{x})\, n_k \mathrm{d}S = \int\limits_{S} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \int\limits_{S} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}.$$

□

Poznámka. Výrazu $\nabla \cdot \boldsymbol{f} = \operatorname{div} \boldsymbol{f}$ říkáme *divergence* (zřídlovost) vektorového pole $\boldsymbol{f}$.