# MAT2 zkouškové otázky

Verze 8. února 2022

1. Napište a dokažte vzorec pro vzdálenost přímky $p : ax + by + c = 0$ od počátku. Odvoďte vzorec pro vzdálenost bodu $A = [x_A, y_A]$ od této přímky $p$.

2. Definujte kružnici a elipsu pomocí pojmu vzdálenosti. Popište všechny důležité parametry těchto kuželoseček (středy, ohniska, poloosy apod.) a odvoďte jejich obecnou rovnici v kartézských souřadnicích.

3. Definujte parabolu pomocí pojmu vzdálenosti. Popište všechny důležité parametry této kuželosečky (středy, ohniska, poloosy apod.) a odvoďte její obecnou rovnici v kartézských souřadnicích.

4. Definujte hyperbolu pomocí pojmu vzdálenosti. Popište všechny důležité parametry této kuželosečky (středy, ohniska, poloosy apod.) a odvoďte její obecnou rovnici v kartézských souřadnicích.

5. Definujte hyperbolu pomocí pojmu vzdálenosti a odvoďte její obecnou rovnici v kartézských souřadnicích. Odvoďte rovnice asymptot hyperboly v $\pm\infty$.

6. Definujte polární souřadnice. Jaké jsou vlastnosti polárních souřadnic, proč nejsou jednoznačné a jakým způsobem se přejde od polárních ke kartézským? Odvoďte kosinovou větu, tj. vzorec pro vzdálenost dvou bodů v polárních souřadnicích.

7. Definujte polární souřadnice a jejich vztah ke kartézským souřadnicím. Jak se poznají symetrie křivky v polárních souřadnicích podle osy $x$, osy $y$ a podle počátku? Dokažte tvrzení, že je-li křivka symetrická podle osy $x$ a zároveň podle osy $y$, pak je symetrická i podle počátku.

8. Definujte polární souřadnice a jejich vztah ke kartézským souřadnicím. Dokažte vzorec pro výpočet plochy v křivce, která je zadaná v polárních souřadnicích.

9. Definujte polární souřadnice a jejich vztah ke kartézským souřadnicím. Vyslovte větu o délce křivky dané parametricky a pomocí této věty dokažte, jak se spočítá délka křivky v polárních souřadnicích.

10. Definujte křivku danou parametricky a uveďte nějaký případ takové křivky. Vyslovte a dokažte větu o tečně ke křivce dané parametricky a napište jak se najdou horizontální resp. vertikální tečny. Kolik tečen můžeme křivce daná parametricky nakreslit v jednom bodě? Uveďte příklady.

11. Definujte křivku danou parametricky a uveďte nějaký případ takové křivky. Vyslovte větu o délce křivky dané parametricky a použijte tuto větu na výpočet délky křivky $x(t) = \mathrm{e}^t \cos t, y(t) = \mathrm{e}^t \sin t, t \in [0, 2\pi]$.

12. Definujte křivku danou parametricky a uveďte nějaký případ takové křivky. Jak se spočítá plocha v křivce dané parametricky? Jak se spočítá objem rotačního tělesa, který vznikne rotací křivky podle osy $x$ resp. osy $y$?

13. Definujte křivku danou parametricky a uveďte nějaký případ takové křivky. Jak se spočítá plocha v křivce dané parametricky? Jak se spočítá povrch rotačního tělesa, který vznikne rotací křivky podle osy $x$ resp. osy $y$?

14. Napište definici suprema množiny M. Vyslovte větu o supremu a použijte na nějakém příkladu množiny. Existuje nějaký vztah mezi supremem množiny a existencí limity posloupnosti prvků z množiny M? (Za jakých okolností?)

15. Napište definici infima množiny M. Vyslovte větu o infimu a použijte na nějakém příkladu množiny. Existuje nějaký vztah mezi infimem množiny a existencí limity posloupnosti prvků z množiny M? (Za jakých okolností?)

16. Napište definici reálné posloupnosti a monotonie posloupnosti. Napište definici limity posloupnosti. Vyslovte a dokažte větu o jednoznačnosti limity.

17. Napište definici reálné posloupnosti a monotonie posloupnosti. Napište definici limity posloupnosti. Vyslovte a dokažte větu o vztahu konvergence a omezenosti posloupnosti.

18. Napište definici reálné posloupnosti. Napište definici hromadné hodnoty posloupnosti. Napište definice limes inferior a limes superior a vysvětlete (na příkladě) jejich význam při hledání limity posloupnosti.

19. Napište definici reálné posloupnosti. Napište definici limity posloupnosti. Vyslovte a dokažte větu o limitě sevřené posloupnosti (sendvič). Dokažte, že $\lim x^n = 0$, právě když $|x| < 1$.

20. Napište definici reálné posloupnosti. Napište definici limity posloupnosti. Vyslovte a dokažte větu o limitě sevřené posloupnosti (sendvič). Dokažte, že $\lim \frac{x^n}{n!} = 0$ pro libovolné $x \in \mathbb{R}$.

21. Napište definici reálné posloupnosti. Napište definici limity posloupnosti. Napište definici hromadného bodu množiny. Vyslovte a dokažte Heineho větu.

22. Napište definici reálné posloupnosti. Napište definici limity posloupnosti. Popište vlastnosti posloupnosti (monotonie, limity) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ a $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Dokažte, k čemu konverguje posloupnost $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

23. Napište definici reálné posloupnosti. Napište definici limity posloupnosti. Vyslovte Cauchyho a Stolzův vzorec pro počítání limit.

24. Jaká je definice nekonečné řady? Definujte konvergenci a absolutní konvergenci nekonečné řady. Pro jaká $a$ konverguje geometrická řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a^n$? Napište její součet.

25. Jaká je definice nekonečné řady? Definujte konvergenci a absolutní konvergenci nekonečné řady. Napište a dokažte nutnou podmínku konvergence řady. Vyslovte postačující podmínky konvergence řady s nezápornými členy.

26. Jaká je definice nekonečné řady? Definujte konvergenci a absolutní konvergenci nekonečné řady. Napište nutnou podmínku konvergence řady. Vyslovte a dokažte integrální kritérium konvergence řady s nezápornými členy.

27. Jaká je definice nekonečné řady? Definujte konvergenci a absolutní konvergenci nekonečné řady. Napište nutnou podmínku konvergence řady. Vyslovte a dokažte základní srovnávací kritérium. Vyslovte limitní srovnávací kritérium pro řady s nezápornými členy.

28. Jaká je definice nekonečné řady? Definujte konvergenci a absolutní konvergenci nekonečné řady. Napište nutnou podmínku konvergence řady. Vyslovte Cauchyho odmocninové a d'Alembertovo podílové kritérium pro řady s nezápornými členy.

29. Jaká je definice nekonečné řady? Definujte konvergenci a absolutní konvergenci nekonečné řady. Napište nutnou podmínku konvergence řady. Vyslovte a dokažte kritérium konvergence pro řady se střídavými znaménky (Leibnizovo kritérium).

30. Definujte racionální funkci. Vysvětlete postup při rozkladu racionální funkce na parciální zlomky a napište, jak se integrují funkce, na které tento rozklad obecně vede.

31. Definujte zobecněný a nevlastní Riemannův integrál, kritický bod a pojem konvergence integrálu. Vyslovte a dokažte základní a limitní (podílové) srovnávací kritérium konvergence pro zobecnéný (nevlastní) Riemannův integrál.

32. Definujte zobecněný a nevlastní Riemannův integrál, kritický bod a pojem konvergence integrálu. Vyslovte větu o integrování metodou per partes a metodou substituce. Vyslovte Newtonovu formuli pro nevlastní integrál.

33. Definujte Taylorův polynom $T_n$ funkce f a zbytek $R_n$. Vyslovte Taylorovu větu o zbytku. Definujte Taylorovu řadu funkce $f$ se středem v bodě $a$. Odvoďte Taylorovu řadu funkce $e^x$ v bodě $a = 0$.

34. Definujte Taylorův polynom $T_n$ funkce f a zbytek $R_n$. Vyslovte Taylorovu větu o zbytku. Definujte Taylorovu řadu funkce $f$ se středem v bodě $a$. Odvoďte Taylorovu řadu funkce $\cos(x)$ v bodě $a = 0$.

35. Definujte Taylorův polynom $T_n$ funkce f a zbytek $R_n$. Vyslovte Taylorovu větu o zbytku. Definujte Taylorovu řadu funkce $f$ se středem v bodě $a$. Odvoďte Taylorovu řadu funkce $\sin(x)$ v bodě $a = 0$.

36. Definujte Taylorův polynom $T_n$ funkce f a zbytek $R_n$. Vyslovte Taylorovu větu o zbytku. Definujte Taylorovu řadu funkce $f$ se středem v bodě $a$. Odvoďte Taylorovu řadu funkce $\ln(x + 1)$ v bodě $a = 0$.

37. Definujte mocninnou řadu se středem v bodě $a$. Vyslovte Cauchyho–Hadamardovu větu o nalezení poloměru konvergence. Jak nalezneme celý obor konvergence mocninné řady? Vyslovte větu o derivaci mocninné řady.

38. Definujte mocninnou řadu se středem v bodě $a$. Vyslovte Cauchyho–Hadamardovu větu o nalezení poloměru konvergence. Jak nalezneme celý obor konvergence mocninné řady? Vyslovte větu o integraci mocninné řady,

39. Definujte mocninnou řadu se středem v bodě $a$. Vyslovte Abelovu větu. Pomocí věty o derivaci mocninné řady a použitím Abelovy věty nalezněte rozvoj funkce $f(x) = \text{arctg } x$ do mocninné řady. Zdůvodněte, proč je takto získaný rozvoj $f$ Taylorovým rozvojem.

40. Definujte mocninnou řadu se středem v bodě $a$. Vyslovte Abelovu větu. Pomocí věty o derivaci mocninné řady a použitím Abelovy věty nalezněte rozvoj funkce $f(x) = \operatorname{arccotg} x$ do mocninné řady. Zdůvodněte, proč je takto získaný rozvoj $f$ Taylorovým rozvojem.