

Zkouškové otázky 01MATZ1

Verze 11. prosince 2024

1. Napište pravidla pro negování disjunkce, konjunkce, implikace a ekvivalence dvou výroků. Znegujte definici limity funkce f v bodě a .
2. Vyslovte a dokažte trojúhelníkovou nerovnost pro reálná čísla. Napište trojúhelníkovou nerovnost pro integrály a vysvětlete graficky.
3. Napište trojúhelníkovou nerovnost. Dokažte nerovnost

$$\left| |a| - |b| \right| \leq |a - b|.$$

4. Definujte polynom. Vyslovte Základní větu algebry a napište vše, co víte o existenci kořenů polynomů.
5. Napište definici inverzní funkce. Vyslovte a dokažte větu o existenci a jednoznačnosti inverzní funkce.
6. Napište, jaký je vztah mezi $(f \circ g)^{-1}$, f^{-1} a g^{-1} a tento vztah dokažte.
7. Napište definici složené funkce $f \circ g$. Zdůvodněte, zda obecně platí $f \circ g = g \circ f$ a uveďte příklady.
8. Napište definici inverzní funkce. Jaký je podstatný rozdíl mezi funkcemi $f \circ f^{-1}$ a $f^{-1} \circ f$?
9. Napište definici liché a sudé funkce. Nechť $D_f = \mathbb{R}$. Ukažte, že funkce g definovaná vztahem

$$g(x) = f(x) - f(-x)$$

je lichá funkce a funkce h definovaná vztahem

$$h(x) = f(x) + f(-x)$$

je sudá funkce.

10. Vyslovte a dokažte větu o jednoznačnosti limity funkce.
11. Vyslovte a dokažte větu o limitě sevřené funkce.
12. Dokažte $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
13. Napište definici limity funkce v bodě a , sepište základní vlastnosti limity (limita součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí).
14. Napište definici limity funkce v nekonečnu. Pomocí modifikace této definice ukažte, že

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty.$$

15. Napište definici jednostranných limit funkce f v bodě a . Jaký má existence těchto jednostranných limit vztah k existenci limity v bodě a ?

16. Napište definice asymptot funkce f v $+\infty$ a v $-\infty$. Vyslovte a dokažte větu o jejich nalezení. Co je to vertikální asymptota?
17. Vyslovte a graficky dokažte Bolzanovu větu o existenci řešení $f(x) = 0$. Vyslovte a dokažte Darbouxovu větu o existenci řešení $f(x) = d$.
18. Napište definici spojitosti funkce f v bodě a a spojitosti funkce f na uz. intervalu $[a,b]$. Uveďte typy nespojitosti a jejich příklady.
19. Napište definici minima a maxima funkce f v bodě a . Kdy lze s jistotou říct, že funkce na uzavřeném intervalu nabývá svého minima i maxima (tj. vyslovte Weierstrassovu větu)?
20. Vyslovte větu o limitě derivace a použijte ji k nalezení $f'_-(1)$ a $f'_+(1)$ pro

$$f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}.$$

21. Vyslovte a dokažte větu o vztahu derivace a spojitosti funkce.
22. Vyslovte a dokažte větu o vztahu derivace a monotonie funkce.
23. Vyslovte a dokažte větu o derivaci podílu dvou funkcí.
24. Vyslovte a z definice derivace dokažte větu o derivaci součinu funkcí $(fg)'$. Pomocí této věty ukažte, že $(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$.
25. Vyslovte a dokažte větu o derivaci složené funkce (řetězové pravidlo).
26. Vyslovte a dokažte větu o derivaci inverzní funkce. Ukažte na příkladu funkcí \arcsin a \arctg .
27. Napište definici derivace funkce f v bodě a a z této definice ukažte, jak vypadá derivace funkce $f(x) = \cos(x)$.
28. Napište definici derivace funkce f v bodě a a z této definice ukažte, jak vypadá derivace funkce $f(x) = \sin(x)$.
29. Vysvětlete princip důkazu matematickou indukcí a demonstруйте na důkazu derivace funkce $f(x) = x^n$ pro $n \in \mathbb{N}$.
30. Vyslovte a dokažte větu o nalezení rovnice tečny $t_f(a)$.
31. Vyslovte a dokažte větu o nalezení rovnice normály $n_f(a)$.
32. Vyslovte Leibnizovo pravidlo pro n . derivaci součinu funkcí. Ověřte jeho platnost pro $n = 1$ a $n = 2$.
33. Vyslovte a dokažte Lagrangeovu větu o přírůstku funkce.
34. Vyslovte a dokažte Rolleho větu o přírůstku funkce.
35. Vyslovte l'Hôpitalovo pravidlo a uveďte příklady jeho použití.

36. Vysvětlete test extrému pomocí první derivace. Uveďte příklady.
37. Vysvětlete test extrému pomocí druhé derivace. Uveďte příklady.
38. Napište definici (ryze) konvexní a (ryze) konkávní funkce. Napište definici inflexního bodu. Uveďte příklady.
39. Vyslovte a dokažte větu o střední hodnotě integrálu.
40. Vyslovte a dokažte větu o integraci per partes pro neurčitý integrál.
41. Vyslovte a dokažte větu o integraci metodou substituce pro neurčitý integrál.
42. Vyslovte a dokažte Newtonovu větu pro počítání určitého integrálu pomocí primitivní funkce.
43. Vyslovte větu o metodě per partes a o metodě substituce v určitém integrálu.
44. Napište definice primitivní funkce, neurčitého a určitého integrálu. Jaký je mezi nimi vztah ?
45. Napište definici určitého Riemannova integrálu funkce f (definujte a vysvětlete všechny příslušné pojmy a ilustруйте je na obrázku).
46. Co je to integrál jako funkce horní (dolní) meze a jak vypadá derivace takové funkce?
47. Vyslovte větu o derivaci inverzní funkce. Napište definiční obory a obory hodnot funkcí tgh a cotgh a pomocí věty nalezněte derivace jejich inverzních funkcí argtgh a $\operatorname{argcotgh}$. Jsou tyto derivace stejné?
48. Definujte algebraické a transcendentní číslo a uveďte jejich příklady. Definujte algebraickou a transcendentní funkci a uveďte příklady.
49. Definujte obecnou logaritmickou funkci a z této definice ukažte, že každá logaritmická funkce f splňuje
- $f(1) = 0$,
 - $f(x) = -f(1/x)$.
50. Definujte obecnou logaritmickou funkci a definujte přirozený logaritmus \ln pomocí integrálu jako funkce horní meze. Dokažte, že takto definovaná funkce \ln je logaritmickou funkcí.
51. Napište definici exponenciální funkce e^x a pomocí věty o inverzní funkci dokažte, že $(e^x)' = e^x$.
52. Napište definice hyperbolických funkcí \sinh a \cosh . Dokažte
- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = ?$,
 - $\cosh(x + y) = ?$.
53. Napište definice hyperbolických funkcí \sinh a \cosh . Dokažte
- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = ?$,

(b) $\sinh(x + y) = ?$.

54. Odvoďte vzorec pro $\sin mx \sin nx$.

55. Odvoďte vzorec pro $\cos mx \cos nx$.

56. Odvoďte vzorec pro $\sin mx \cos nx$.

57. Dokažte, že $\operatorname{argsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ a uveďte definiční obor.

58. Dokažte, že $\operatorname{argcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ a uveďte definiční obor.

59. Napište definiční obor, obor hodnot a nakreslete graf následujících funkcí:

(a) $\arcsin(\sin(x))$

(b) $\sin(\arcsin(x))$

60. Definujte logaritmus a exponenciální funkci s obecnou bází (základem) p . Nalezněte derivace těchto funkcí a v závislosti na p popište jejich průběh (monotonii, extrémy, konvexnost/konkávnost a limity v krajích def. oboru).

61. Vyslovte větu o délce grafu funkce a použijte ji na příkladě.

62. Vyslovte větu o nalezení polohy těžiště plochy pod grafem funkce a použijte ji na příkladě.

63. Vyslovte věty o nalezení objemu a povrchu tělesa, které vznikne rotací funkce f okolo osy x nebo osy y . Použijte tuto větu k odvození vzorce pro objem a povrch koule, kužele a válce.