

Přesná řešení pro dvoufázové proudění v porézním prostředí: Můžeme věřit numerickému řešení?

Radek Fučík

Katedra matematiky FJFI ČVUT v Praze

&

Center for Experimental Study of Subsurface Environmental Processes,
Colorado School of Mines, Colorado, USA

Seminář současné matematiky 9. 3. 2016



CESEP



Obsah

Úvod

Ukázková úloha dvoufázového proudění

Přehled přesných řešení

Přesné řešení v $\mathbb{R}^d$ (a úkol pro SSM)

Pachatelé

Obsah

Úvod

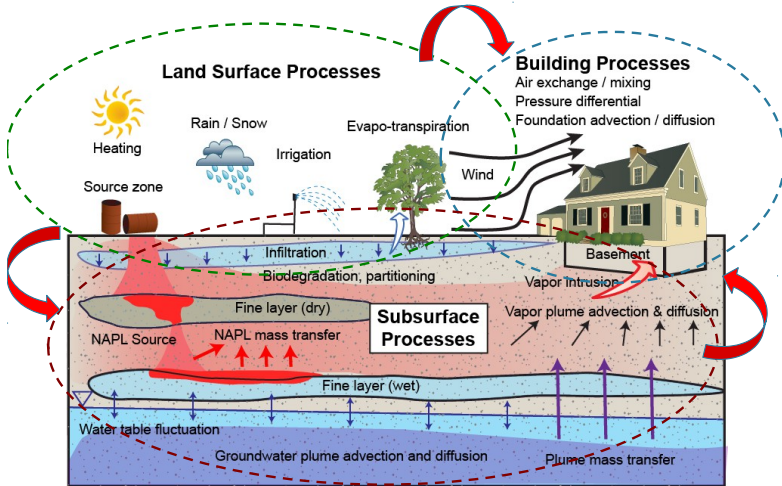
Ukázková úloha dvoufázového proudění

Přehled přesných řešení

Přesné řešení v $\mathbb{R}^d$ (a úkol pro SSM)

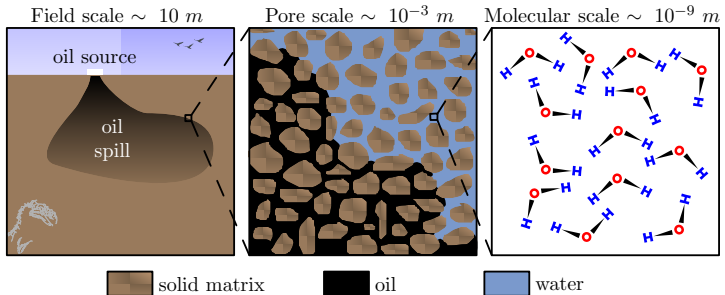
Pachatelé

Motivace



[zdroj: SERDP Project No.ER-1687 Final report, 2014]

Měřítko



Matematické modelování dvoufázového proudění v porézním prostředí

- fáze: voda, plyn, NAPL
(Non-Aqueous Phase Liquid)



Obrázek: Experiment [CESEP, Colorado School of Mines]

Matematické modelování dvoufázového proudění v porézním prostředí

- fáze: voda, plyn, NAPL (Non-Aqueous Phase Liquid)
- nemísivé fáze



Obrázek: Experiment [CESEP, Colorado School of Mines]

Matematické modelování dvoufázového proudění v porézním prostředí

- fáze: voda, plyn, NAPL (Non-Aqueous Phase Liquid)
- nemísivé fáze
- stlačitelné nebo nestlačitelné fáze



Obrázek: Experiment [CESEP, Colorado School of Mines]

Matematické modelování dvoufázového proudění v porézním prostředí

- fáze: voda, plyn, NAPL (Non-Aqueous Phase Liquid)
- nemísivé fáze
- stlačitelné nebo nestlačitelné fáze
- kapilarita



Obrázek: Experiment [CESEP, Colorado School of Mines]

Matematické modelování dvoufázového proudění v porézním prostředí

- fáze: voda, plyn, NAPL (Non-Aqueous Phase Liquid)
- nemísivé fáze
- stlačitelné nebo nestlačitelné fáze
- kapilarita
- gravitace



Obrázek: Experiment [CESEP, Colorado School of Mines]

Matematické modelování dvoufázového proudění v porézním prostředí

- fáze: voda, plyn, NAPL (Non-Aqueous Phase Liquid)
- nemísivé fáze
- stlačitelné nebo nestlačitelné fáze
- kapilarita
- gravitace
- heterogenní prostředí



Obrázek: Experiment [CESEP, Colorado School of Mines]

Rovnice dvoufázového proudění v $\mathbb{R}^d$

- Rovnice kontinuity pro fázi $\alpha = w, n$:

$$\frac{\partial(\phi\rho_\alpha S_\alpha)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_\alpha \vec{v}_\alpha) = F_\alpha$$

Rovnice dvoufázového proudění v $\mathbb{R}^d$

- Rovnice kontinuity pro fázi $\alpha = w, n$:

$$\frac{\partial(\phi \rho_\alpha S_\alpha)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_\alpha \vec{v}_\alpha) = F_\alpha$$

- Darcyho zákon fázi $\alpha = w, n$:

$$\vec{v}_\alpha = -\lambda_\alpha \mathbf{K}(\nabla p_\alpha - \rho_\alpha \vec{g})$$

Rovnice dvoufázového proudění v $\mathbb{R}^d$

- Rovnice kontinuity pro fázi $\alpha = w, n$:

$$\frac{\partial(\phi\rho_\alpha S_\alpha)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_\alpha \vec{v}_\alpha) = F_\alpha$$

- Darcyho zákon fázi $\alpha = w, n$:

$$\vec{v}_\alpha = -\lambda_\alpha \mathbf{K}(\nabla p_\alpha - \rho_\alpha \vec{g})$$

- Balance saturace

$$S_w + S_n = 1$$

Rovnice dvoufázového proudění v $\mathbb{R}^d$

- Rovnice kontinuity pro fázi $\alpha = w, n$:

$$\frac{\partial(\phi\rho_\alpha S_\alpha)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_\alpha \vec{v}_\alpha) = F_\alpha$$

- Darcyho zákon fázi $\alpha = w, n$:

$$\vec{v}_\alpha = -\lambda_\alpha \mathbf{K}(\nabla p_\alpha - \rho_\alpha \vec{g})$$

- Bilance saturace

$$S_w + S_n = 1$$

- Kapilární tlak

$$p_c = p_n - p_w = p_c(S_w)$$

(používají se empirické modely závislosti na saturaci)

Rovnice dvoufázového proudění v $\mathbb{R}^d$

- Rovnice kontinuity pro fázi $\alpha = w, n$:

$$\frac{\partial(\phi \rho_\alpha S_\alpha)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_\alpha \vec{v}_\alpha) = F_\alpha$$

- Darcyho zákon fázi $\alpha = w, n$:

$$\vec{v}_\alpha = -\lambda_\alpha \mathbf{K}(\nabla p_\alpha - \rho_\alpha \vec{g})$$

- Bilance saturace

$$S_w + S_n = 1$$

- Kapilární tlak

$$p_c = p_n - p_w = p_c(S_w)$$

(používají se empirické modely závislosti na saturaci)

- Předpoklady pro některé z uvedených veličin:

$$p_\alpha = p_\alpha(t, \vec{x}) \quad \text{— tlak fáze } \alpha = w, n$$

— diferencovatelná funkce $\forall t > 0$ a $\forall \vec{x} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$

— rozměr: $[Pa]$

Rovnice dvoufázového proudění v $\mathbb{R}^d$

- Rovnice kontinuity pro fázi $\alpha = w, n$:

$$\frac{\partial(\phi \rho_\alpha S_\alpha)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_\alpha \vec{v}_\alpha) = F_\alpha$$

- Darcyho zákon fázi $\alpha = w, n$:

$$\vec{v}_\alpha = -\lambda_\alpha \mathbf{K}(\nabla p_\alpha - \rho_\alpha \vec{g})$$

- Bilance saturace

$$S_w + S_n = 1$$

- Kapilární tlak

$$p_c = p_n - p_w = p_c(S_w)$$

(používají se empirické modely závislosti na saturaci)

- Předpoklady pro některé z uvedených veličin:

$$\begin{aligned} \rho_\alpha = \rho_\alpha(t, \vec{x}) & \quad \text{— hustota fáze } \alpha = w, n \\ & \quad \text{— diferencovatelná funkce } \forall t > 0 \text{ a } \forall \vec{x} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^d \\ & \quad \text{— rozměr: } [kg \ m^{-3}] \end{aligned}$$

Rovnice dvoufázového proudění v $\mathbb{R}^d$

- Rovnice kontinuity pro fázi $\alpha = w, n$:

$$\frac{\partial(\phi \rho_\alpha S_\alpha)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_\alpha \vec{v}_\alpha) = F_\alpha$$

- Darcyho zákon fázi $\alpha = w, n$:

$$\vec{v}_\alpha = -\lambda_\alpha \mathbf{K}(\nabla p_\alpha - \rho_\alpha \vec{g})$$

- Bilance saturace

$$S_w + S_n = 1$$

- Kapilární tlak

$$p_c = p_n - p_w = p_c(S_w)$$

(používají se empirické modely závislosti na saturaci)

-
- Předpoklady pro některé z uvedených veličin:

- $S_\alpha = S_\alpha(t, \vec{x})$ — saturace fáze $\alpha = w, n$
- diferencovatelná funkce v čase $\forall \vec{x} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$
- po částech hladká funkce v prostoru $\forall \vec{x} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$
- rozměr: [1]

Rovnice dvoufázového proudění v $\mathbb{R}^d$

- Rovnice kontinuity pro fázi $\alpha = w, n$:

$$\frac{\partial(\phi \rho_\alpha S_\alpha)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_\alpha \vec{v}_\alpha) = F_\alpha$$

- Darcyho zákon fázi $\alpha = w, n$:

$$\vec{v}_\alpha = -\lambda_\alpha \mathbf{K} (\nabla p_\alpha - \rho_\alpha \vec{g})$$

- Bilance saturace

$$S_w + S_n = 1$$

- Kapilární tlak

$$p_c = p_n - p_w = p_c(S_w)$$

(používají se empirické modely závislosti na saturaci)

-
- Předpoklady pro některé z uvedených veličin:

$$\begin{aligned} \lambda_\alpha &= \lambda_\alpha(S_w) && \text{— mobilita fáze } \alpha = w, n \\ &&& \text{— diferencovatelná funkce } \forall S_w \in [0, 1] \\ &&& \text{— rozměr: } [kg^{-1}ms^2] \end{aligned}$$

Rovnice dvoufázového proudění v $\mathbb{R}^d$

- Rovnice kontinuity pro fázi $\alpha = w, n$:

$$\frac{\partial(\phi \rho_\alpha S_\alpha)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_\alpha \vec{v}_\alpha) = F_\alpha$$

- Darcyho zákon fázi $\alpha = w, n$:

$$\vec{v}_\alpha = -\lambda_\alpha \mathbf{K}(\nabla p_\alpha - \rho_\alpha \vec{g})$$

- Bilance saturace

$$S_w + S_n = 1$$

- Kapilární tlak

$$p_c = p_n - p_w = p_c(S_w)$$

(používají se empirické modely závislosti na saturaci)

-
- Předpoklady pro některé z uvedených veličin:

$$\begin{aligned} \vec{v}_\alpha = \vec{v}_\alpha(t, \vec{x}) \quad & \text{— Darcyho rychlost fáze } \alpha = w, n \\ & \text{— vektorová funkce } \forall t > 0 \text{ a } \forall \vec{x} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^d \\ & \text{— patří do prostoru } H(\text{div}, \Omega) \\ & \text{— rozměr: } [ms^{-1}]^d \end{aligned}$$

Obsah

Úvod

Ukázková úloha dvoufázového proudění

Přehled přesných řešení

Přesné řešení v $\mathbb{R}^d$ (a úkol pro SSM)

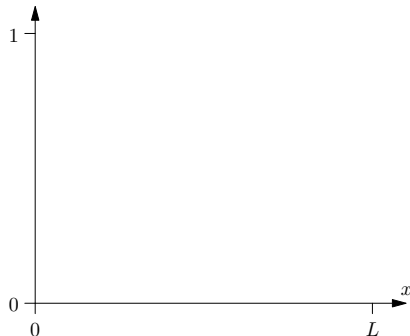
Pachatelé

Ukázková úloha: Definice

Úloha dvoufázového proudění bez gravitace a kapilarity v $\mathbb{R}^1$:

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial f(S)}{\partial x} = 0$$

kde $x \in [0, L]$, $t \in (0, T)$



Obrázek: Oblast $[0, L]$.

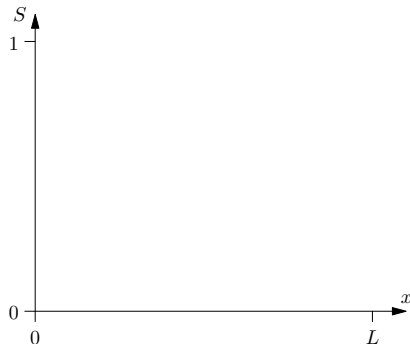
Ukázková úloha: Definice

Úloha dvoufázového proudění bez gravitace a kapilarity v $\mathbb{R}^1$:

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial f(S)}{\partial x} = 0$$

kde $x \in [0, L]$, $t \in (0, T)$ a:

- S ... saturace vody ($S := S_w$)



Obrázek: Oblast $[0, L]$.

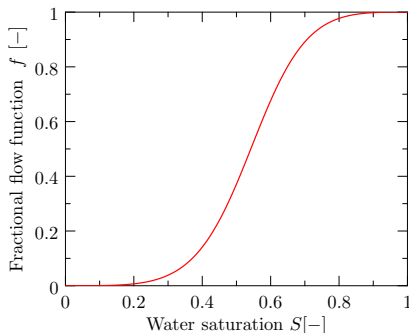
Ukázková úloha: Definice

Úloha dvoufázového proudění bez gravitace a kapilarity v $\mathbb{R}^1$:

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial f(S)}{\partial x} = 0$$

kde $x \in [0, L]$, $t \in (0, T)$ a:

- S ... saturace vody ($S := S_w$)
- f ... frakční toková funkce



Obrázek: Funkce $f(S) = \frac{\lambda_w(S)}{\lambda_w(S) + \lambda_n(S)}$

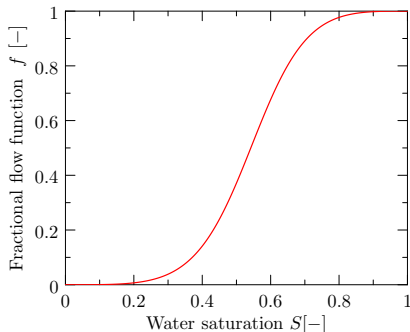
Ukázková úloha: Definice

Úloha dvoufázového proudění bez gravitace a kapilarity v $\mathbb{R}^1$:

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial f(S)}{\partial x} = 0$$

kde $x \in [0, L]$, $t \in (0, T)$ a:

- S ... saturace vody ($S := S_w$)
- f ... frakční toková funkce
- ϕ ... porozita



Obrázek: Funkce $f(S) = \frac{\lambda_w(S)}{\lambda_w(S) + \lambda_n(S)}$

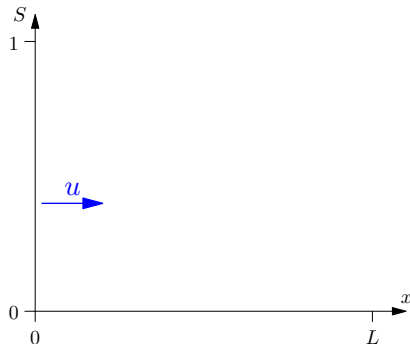
Ukázková úloha: Definice

Úloha dvoufázového proudění bez gravitace a kapilarity v $\mathbb{R}^1$:

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial f(S)}{\partial x} = 0$$

kde $x \in [0, L]$, $t \in (0, T)$ a:

- $S \dots$ saturace vody ($S := S_w$)
- $f \dots$ frakční toková funkce
- $\phi \dots$ porozita
- $u \dots$ Darcyho rychlost



Obrázek: Oblast $[0, L]$.

Ukázková úloha: Definice

Úloha dvoufázového proudění bez gravitace a kapilarity v $\mathbb{R}^1$:

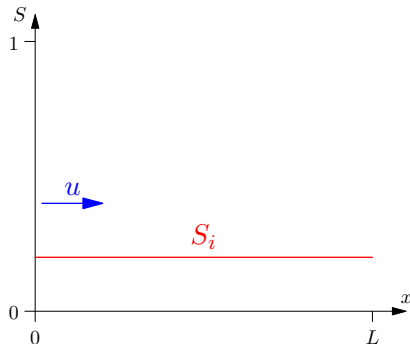
$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial f(S)}{\partial x} = 0$$

kde $x \in [0, L]$, $t \in (0, T)$ a:

- S ... saturace vody ($S := S_w$)
- f ... frakční toková funkce
- ϕ ... porozita
- u ... Darcyho rychlost

Počáteční podmínka:

$$S(0, x) = S_i.$$



Obrázek: Oblast $[0, L]$.

Ukázková úloha: Definice

Úloha dvoufázového proudění bez gravitace a kapilarity v $\mathbb{R}^1$:

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial f(S)}{\partial x} = 0$$

kde $x \in [0, L]$, $t \in (0, T)$ a:

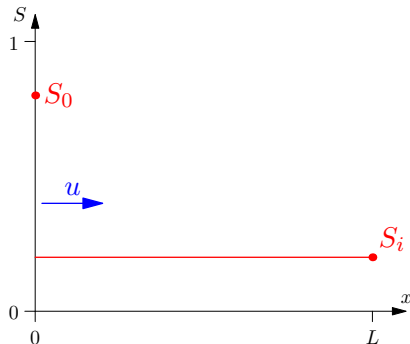
- $S \dots$ saturace vody ($S := S_w$)
- $f \dots$ frakční toková funkce
- $\phi \dots$ porozita
- $u \dots$ Darcyho rychlost

Počáteční podmínka:

$$S(0, x) = S_i.$$

Okrajová podmínka:

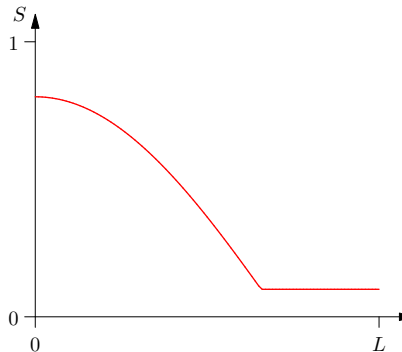
$$S(t, 0) = S_0, \quad S(t, L) = S_i.$$



Obrázek: Oblast $[0, L]$.

Ukázková úloha: Diskretizace MKD

Časově explicitní metoda konečných diferencí (MKD):



Obrázek: Spojité řešení.

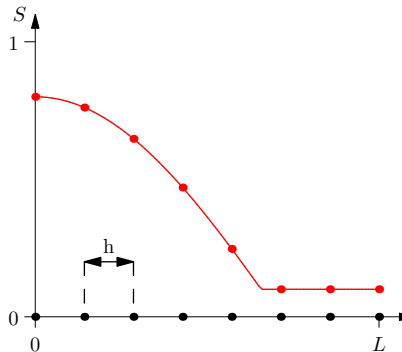
Ukázková úloha: Diskretizace MKD

Časově explicitní metoda konečných diferencí (MKD):

- Prostorová diskretizace $[0, L]$:

$$x_\ell = \ell h,$$

kde $h = \frac{L}{n}$, $\ell = 0, 1, \dots, n$



Obrázek: Diskrétní aproximace.

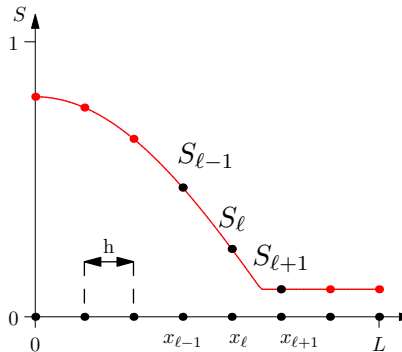
Ukázková úloha: Diskretizace MKD

Časově explicitní metoda konečných diferencí (MKD):

- Prostorová diskretizace $[0, L]$:

$$x_\ell = \ell h,$$

kde $h = \frac{L}{n}$, $\ell = 0, 1, \dots, n$



Obrázek: Diskrétní aproximace.

Ukázková úloha: Diskretizace MKD

Časově explicitní metoda konečných diferencí (MKD):

- Prostorová diskretizace $[0, L]$:

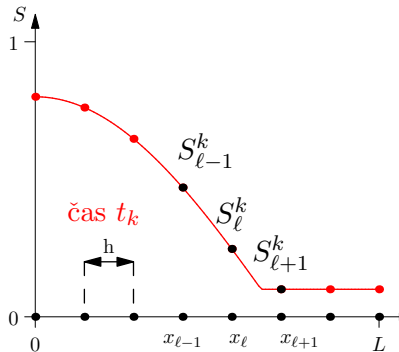
$$x_\ell = \ell h,$$

kde $h = \frac{L}{n}$, $\ell = 0, 1, \dots, n$

- Časová diskretizace $[0, T]$:

$$t_k = k\tau,$$

kde $\tau = \frac{T}{m}$, $k = 0, 1, \dots, m$



Obrázek: Diskrétní aproximace.

Ukázková úloha: Diskretizace MKD

Časově explicitní metoda konečných diferencí (MKD):

- Prostorová diskretizace $[0, L]$:

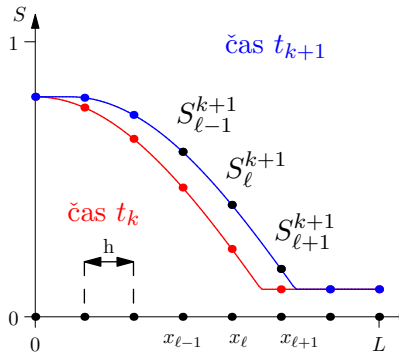
$$x_\ell = \ell h,$$

kde $h = \frac{L}{n}$, $\ell = 0, 1, \dots, n$

- Časová diskretizace $[0, T]$:

$$t_k = k\tau,$$

kde $\tau = \frac{T}{m}$, $k = 0, 1, \dots, m$



Obrázek: Diskrétní aproximace.

Ukázková úloha: Diskretizace MKD

Časově explicitní metoda konečných diferencí (MKD):

- Prostorová diskretizace $[0, L]$:

$$x_\ell = \ell h,$$

kde $h = \frac{L}{n}$, $\ell = 0, 1, \dots, n$

- Časová diskretizace $[0, T]$:

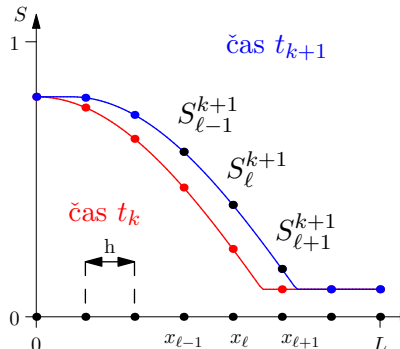
$$t_k = k\tau,$$

kde $\tau = \frac{T}{m}$, $k = 0, 1, \dots, m$

- Diskrétní aproximace derivací:

$$\frac{\partial S(t_k, x_\ell)}{\partial t} \approx \frac{S_\ell^{k+1} - S_\ell^k}{\tau}$$

$$\frac{\partial S(t_k, x_\ell)}{\partial x} \approx \frac{S_{\ell+1}^k - S_{\ell-1}^k}{2h} \quad (\text{centrální difference})$$



Obrázek: Diskrétní aproximace.

Ukázková úloha: Numerické schéma

Úloha dvoufázového proudění bez gravitace a kapilarity v $\mathbb{R}^1$:

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial f(S)}{\partial x} = 0,$$

$$S(t, 0) = S_0,$$

$$S(t, L) = S_i.$$

Ukázková úloha: Numerické schéma

Úloha dvoufázového proudění bez gravitace a kapilarity v $\mathbb{R}^1$:

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial f(S)}{\partial x} = 0,$$

$$S(t, 0) = S_0,$$

$$S(t, L) = S_i.$$

Numerické schéma:

Ukázková úloha: Numerické schéma

Úloha dvoufázového proudění bez gravitace a kapilarity v $\mathbb{R}^1$:

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial f(S)}{\partial x} = 0,$$

$$S(t, 0) = S_0,$$

$$S(t, L) = S_i.$$

Numerické schéma:

$$\phi \frac{S_\ell^{k+1} - S_\ell^k}{\tau}$$

$$S_0^k = S_0,$$

$$S_n^k = S_i.$$

Ukázková úloha: Numerické schéma

Úloha dvoufázového proudění bez gravitace a kapilarity v $\mathbb{R}^1$:

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial f(S)}{\partial x} = 0,$$

$$S(t, 0) = S_0,$$

$$S(t, L) = S_i.$$

Numerické schéma:

$$\phi \frac{S_\ell^{k+1} - S_\ell^k}{\tau} + u \text{ ? } = 0,$$

$$S_0^k = S_0,$$

$$S_n^k = S_i.$$

Ukázková úloha: Pokus 1

Aproximace derivace:

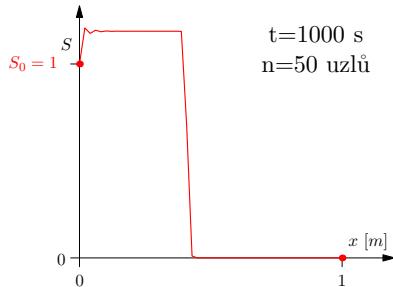
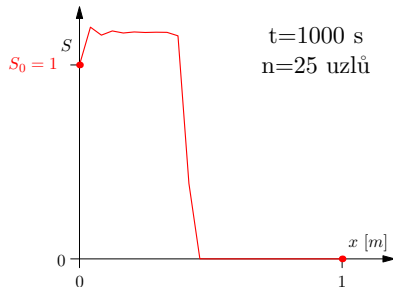
$$\frac{\partial f(S)}{\partial x} \approx \frac{df(\bar{S}_\ell^k)}{dS} \frac{S_{\ell+1}^k - S_{\ell-1}^k}{2h}$$

(centrální difference)

Poznámka:

$$\frac{\partial f(S)}{\partial x} = \frac{df(S)}{dS} \frac{\partial S}{\partial x}$$

(řetězové pravidlo)



Ukázková úloha: Pokus 1

Aproximace derivace:

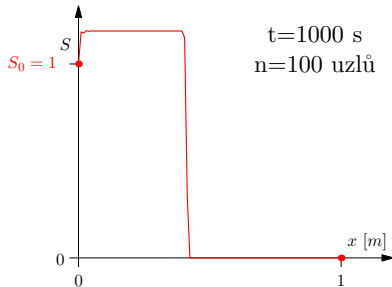
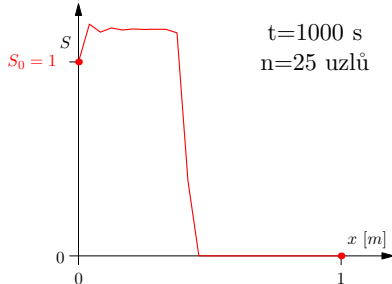
$$\frac{\partial f(S)}{\partial x} \approx \frac{df(\bar{S}_\ell^k)}{dS} \frac{S_{\ell+1}^k - S_{\ell-1}^k}{2h}$$

(centrální difference)

Poznámka:

$$\frac{\partial f(S)}{\partial x} = \frac{df(S)}{dS} \frac{\partial S}{\partial x}$$

(řetězové pravidlo)



Ukázková úloha: Pokus 1

Aproximace derivace:

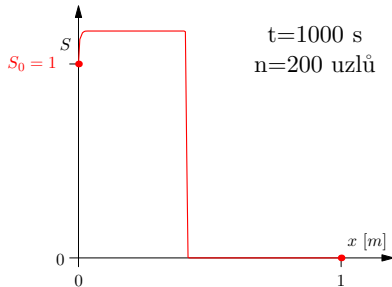
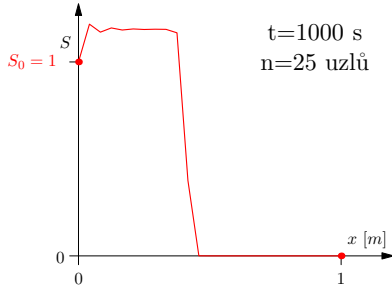
$$\frac{\partial f(S)}{\partial x} \approx \frac{df(\bar{S}_\ell^k)}{dS} \frac{S_{\ell+1}^k - S_{\ell-1}^k}{2h}$$

(centrální difference)

Poznámka:

$$\frac{\partial f(S)}{\partial x} = \frac{df(S)}{dS} \frac{\partial S}{\partial x}$$

(řetězové pravidlo)



Ukázková úloha: Pokus 2

Stabilizace pomocí umělé vazkosti:

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial f(S)}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}$$

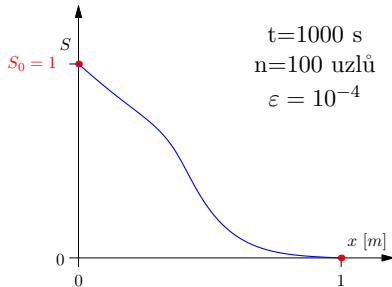
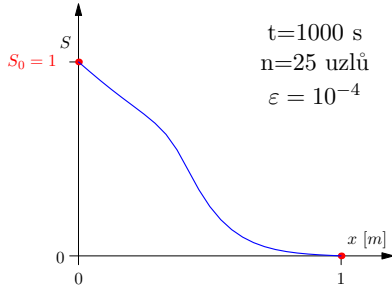
Aproximace derivace:

$$\frac{\partial f(S)}{\partial x} \approx \frac{df(\bar{S}_\ell^k)}{dS} \frac{S_{\ell+1}^k - S_{\ell-1}^k}{2h}$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \approx \frac{S_{\ell+1}^k - 2S_\ell^k + S_{\ell-1}^k}{h^2}$$

(centrální difference + stabilizace)

$\varepsilon \dots$ umělá vazkost (malá)



Ukázková úloha: Pokus 2

Stabilizace pomocí umělé vazkosti:

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial f(S)}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}$$

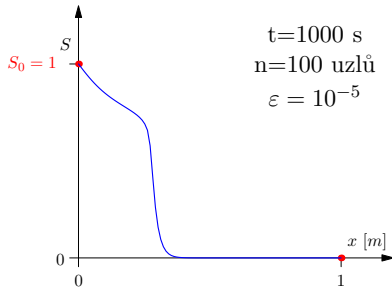
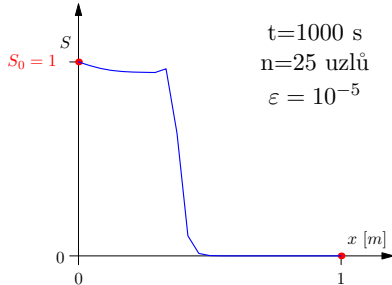
Aproximace derivace:

$$\frac{\partial f(S)}{\partial x} \approx \frac{df(\bar{S}_\ell^k)}{dS} \frac{S_{\ell+1}^k - S_{\ell-1}^k}{2h}$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \approx \frac{S_{\ell+1}^k - 2S_\ell^k + S_{\ell-1}^k}{h^2}$$

(centrální difference + stabilizace)

$\varepsilon \dots$ umělá vazkost (malá)



Ukázková úloha: Pokus 2

Stabilizace pomocí umělé vazkosti:

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial f(S)}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}$$

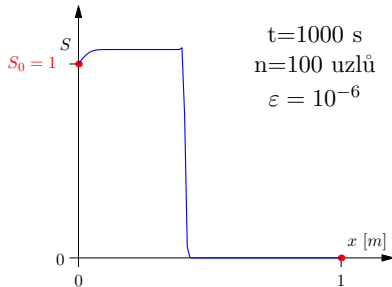
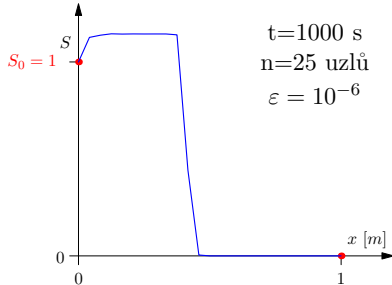
Aproximace derivace:

$$\frac{\partial f(S)}{\partial x} \approx \frac{df(\bar{S}_\ell^k)}{dS} \frac{S_{\ell+1}^k - S_{\ell-1}^k}{2h}$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \approx \frac{S_{\ell+1}^k - 2S_\ell^k + S_{\ell-1}^k}{h^2}$$

(centrální difference + stabilizace)

$\varepsilon \dots$ umělá vazkost (malá)

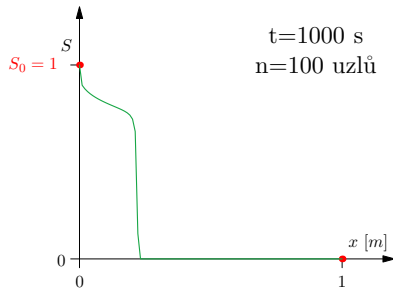
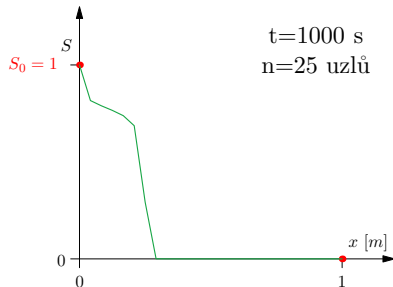


Ukázková úloha: Pokus 3

Aproximace derivace:

$$\frac{\partial f(S)}{\partial x} \approx \frac{df(\bar{S}_\ell^k)}{dS} \frac{S_\ell^k - S_{\ell-1}^k}{h}$$

(upwind difference)

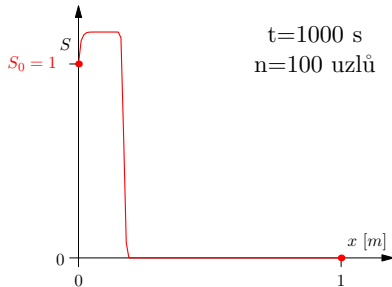
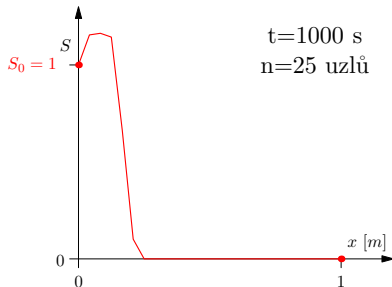


Ukázková úloha: Pokus 4

Aproximace derivace:

$$\frac{\partial f(S)}{\partial x} \approx \frac{f(S_{\ell+1}^k) - f(S_{\ell-1}^k)}{2h}$$

(centrální difference)



Ukázková úloha: Pokus 5

Vanishing viscosity stabilization:

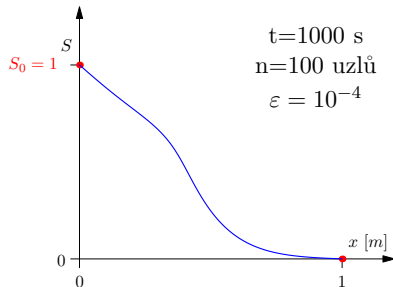
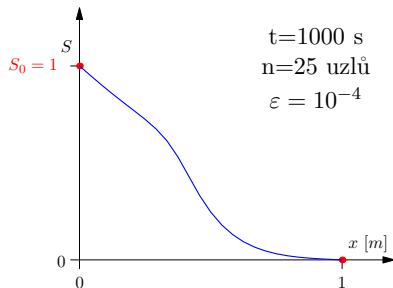
$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial f(S)}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}$$

Aproximace derivace:

$$\frac{\partial f(S)}{\partial x} \approx \frac{f(S_{\ell+1}^k) - f(S_{\ell-1}^k)}{2h}$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \approx \frac{S_{\ell+1}^k - 2S_{\ell}^k + S_{\ell-1}^k}{h^2}$$

(centrální difference + stabilizace)



Ukázková úloha: Pokus 5

Vanishing viscosity stabilization:

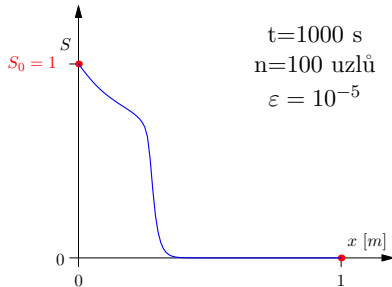
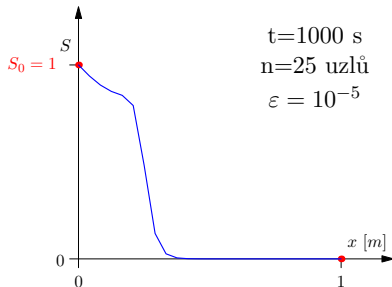
$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial f(S)}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}$$

Aproximace derivace:

$$\frac{\partial f(S)}{\partial x} \approx \frac{f(S_{\ell+1}^k) - f(S_{\ell-1}^k)}{2h}$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \approx \frac{S_{\ell+1}^k - 2S_{\ell}^k + S_{\ell-1}^k}{h^2}$$

(centrální difference + stabilizace)



Ukázková úloha: Pokus 5

Vanishing viscosity stabilization:

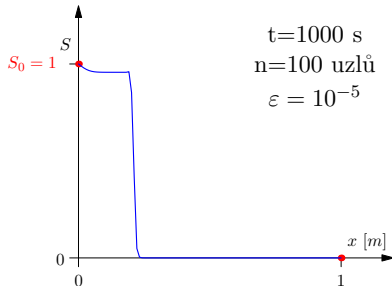
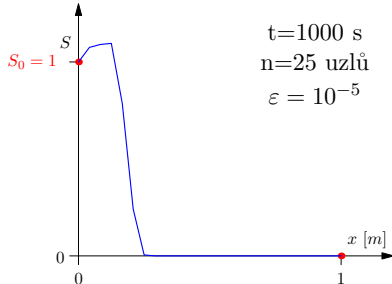
$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial f(S)}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}$$

Aproximace derivace:

$$\frac{\partial f(S)}{\partial x} \approx \frac{f(S_{\ell+1}^k) - f(S_{\ell-1}^k)}{2h}$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \approx \frac{S_{\ell+1}^k - 2S_{\ell}^k + S_{\ell-1}^k}{h^2}$$

(centrální difference + stabilizace)

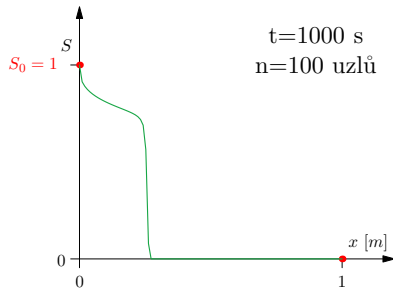
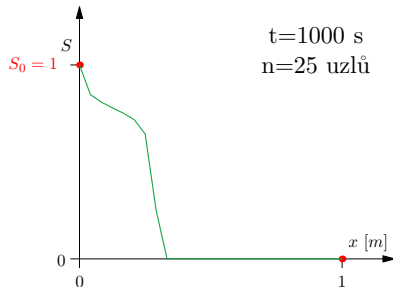


Ukázková úloha: Pokus 6

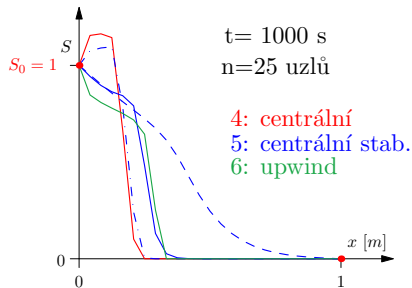
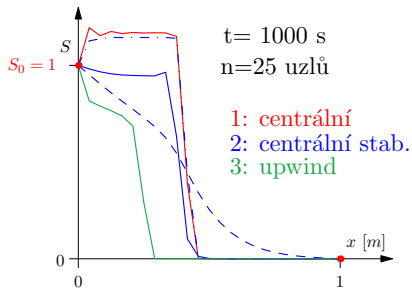
Aproximace derivace:

$$\frac{\partial f(S)}{\partial x} \approx \frac{f(S_\ell^k) - f(S_{\ell-1}^k)}{h}$$

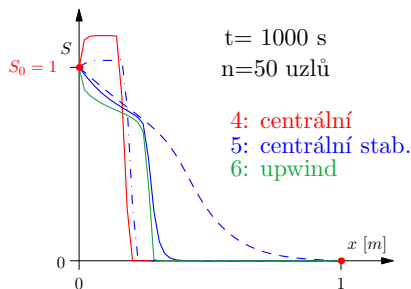
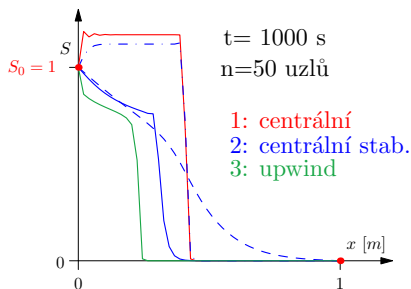
(upwind difference)



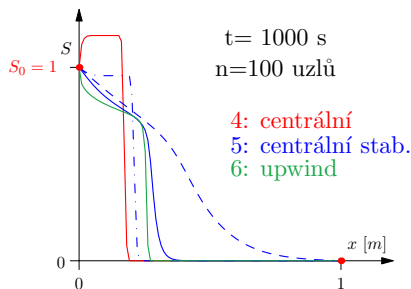
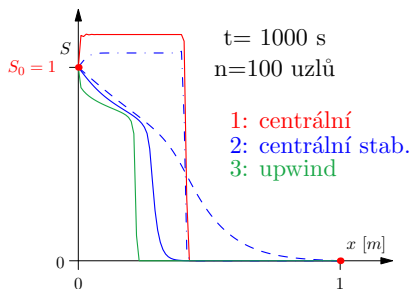
Ukázková úloha: Shrnutí



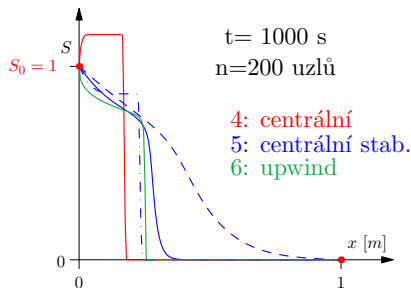
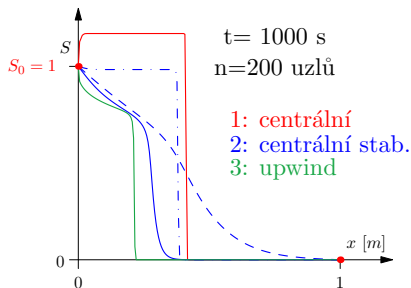
Ukázková úloha: Shrnutí



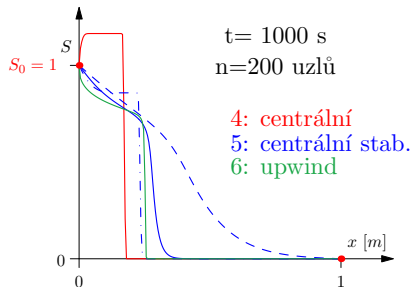
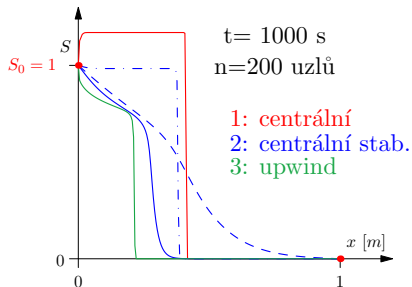
Ukázková úloha: Shrnutí



Ukázková úloha: Shrnutí



Ukázková úloha: Shrnutí



Co s tím?

Obsah

Úvod

Ukázková úloha dvoufázového proudění

Přehled přesných řešení

Přesné řešení v $\mathbb{R}^d$ (a úkol pro SSM)

Pachatelé

Přehled přesných řešení

Přesná řešení pro homogenní porézní prostředí:

1. S. E. **Buckley** a M. C. **Leverett** (1942)
2. D. B. **McWhorter** a D. K. **Sunada** (1990)
3. R. **Fučík**, T. H. **Illangasekare**, a M. **Beneš** (2016)

Přesná řešení pro heterogenní porézní prostředí:

4. C. J. **van Duijn** a M. J. **de Neef** (1996)
5. R. **Fučík**, J. **Mikyška**, M. **Beneš**, a T. H. **Illangasekare** (2008)

Přehled přesných řešení

Přesná řešení pro homogenní porézní prostředí:

1. S. E. **Buckley** a M. C. **Leverett** (1942)
2. D. B. **McWhorter** a D. K. **Sunada** (1990)
3. R. **Fučík**, T. H. **Illangasekare**, a M. **Beneš** (2016)

Přesná řešení pro heterogenní porézní prostředí:

4. C. J. **van Duijn** a M. J. **de Neef** (1996)
5. R. **Fučík**, J. **Mikyška**, M. **Beneš**, a T. H. **Illangasekare** (2008)

Buckleyho and Leverettovo analytické řešení

Rovnice v $\mathbb{R}^1$:

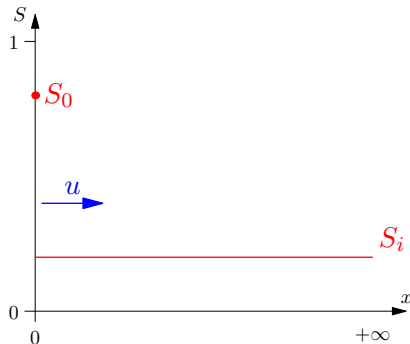
$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial f(S)}{\partial x} = 0$$

- jednorozměrná oblast
- homogenní porézní prostředí
- bez gravitace, bez kapilarity
- metoda charakteristik
- $u = u(t)$
- počáteční podmínka:

$$S(0, x) = S_i$$

- okrajová podmínka:

$$S(t, 0) = S_0$$



Buckleyho and Leverettovo analytické řešení

Rovnice v $\mathbb{R}^1$:

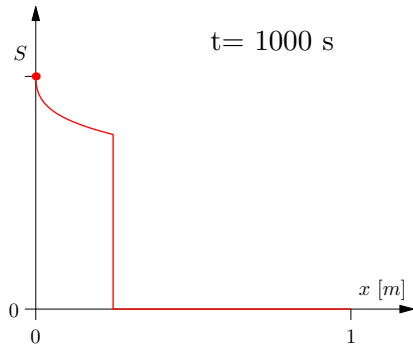
$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial f(S)}{\partial x} = 0$$

- jednorozměrná oblast
- homogenní porézní prostředí
- bez gravitace, bez kapilarity
- metoda charakteristik
- $u = u(t)$
- počáteční podmínka:

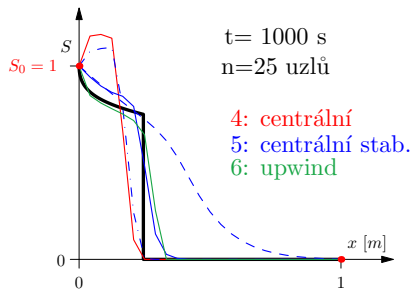
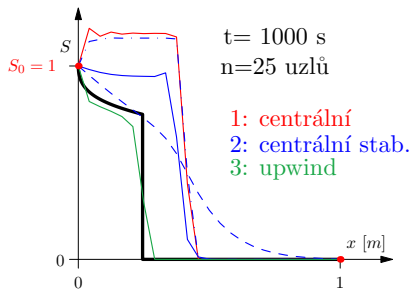
$$S(0, x) = S_i$$

- okrajová podmínka:

$$S(t, 0) = S_0$$

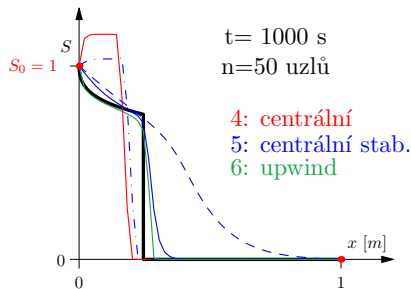
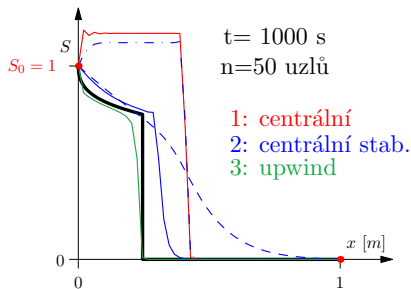


Buckley a Leverett: Ukázková úloha



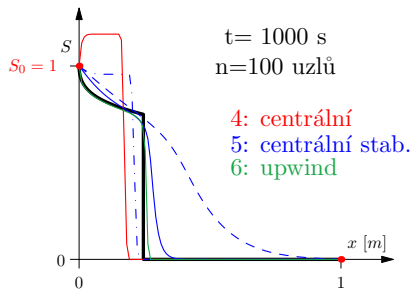
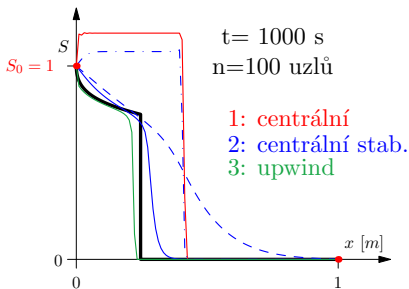
Numerické řešení vs. Buckleyho a Leverettovo analytické řešení (černě).

Buckley a Leverett: Ukázková úloha



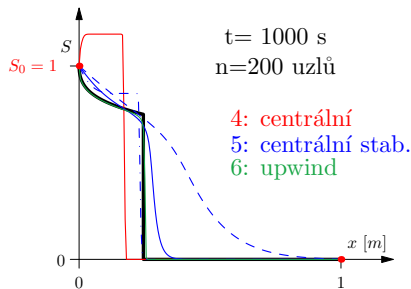
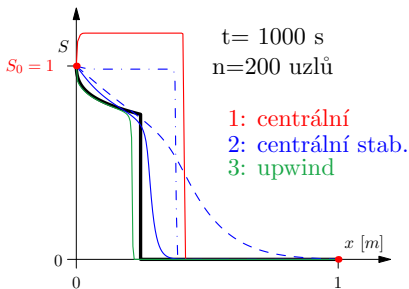
Numerické řešení vs. Buckleyho a Leverettovo analytické řešení (černě).

Buckley a Leverett: Ukázková úloha



Numerické řešení vs. Buckleyho a Leverettovo analytické řešení (černě).

Buckley a Leverett: Ukázková úloha



Numerické řešení vs. Buckleyho a Leverettovo analytické řešení (černě).

Přehled přesných řešení

Přesná řešení pro homogenní porézní prostředí:

1. S. E. **Buckley** a M. C. **Leverett** (1942)
2. D. B. **McWhorter** a D. K. **Sunada** (1990)
3. R. **Fučík**, T. H. **Illangasekare**, a M. **Beneš** (2016)

Přesná řešení pro heterogenní porézní prostředí:

4. C. J. **van Duijn** a M. J. **de Neef** (1996)
5. R. **Fučík**, J. **Mikyška**, M. **Beneš**, a T. H. **Illangasekare** (2008)

McWhorterovo a Sunadovo řešení v $\mathbb{R}^1$

Rovnice v $\mathbb{R}^1$:

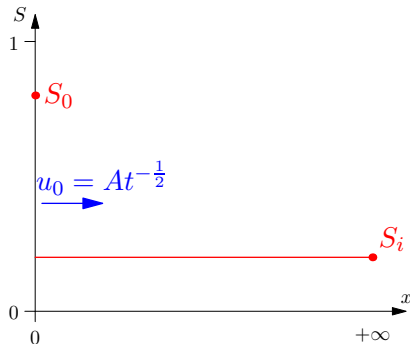
$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial f(S)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D(S) \frac{\partial S}{\partial x} \right)$$

- bez gravitace
- $D(S)$ funkce kapilární difúze
- $u = RAt^{-\frac{1}{2}}$
- $A = A(S_0)$, $R \in (-\infty, 1]$ *
- počáteční podmínka:

$$S(0, x) = S_i$$

- okrajové podmínky:

$$S(t, 0) = S_0, \quad S(t, +\infty) = S_i$$



*R. Fučík, J. Mikyška, T. H. Illangasekare, M.Beneš (2007)

McWhorterovo a Sunadovo řešení v $\mathbb{R}^1$

Rovnice v $\mathbb{R}^1$:

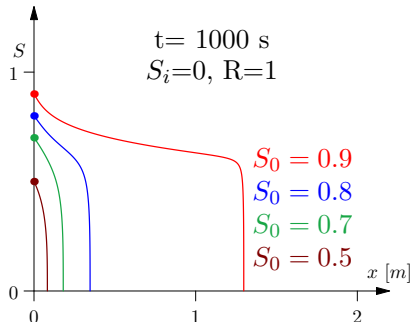
$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial f(S)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D(S) \frac{\partial S}{\partial x} \right)$$

- bez gravitace
- $D(S)$ funkce kapilární difúze
- $u = RA t^{-\frac{1}{2}}$
- $A = A(S_0)$, $R \in (-\infty, 1]$ *
- počáteční podmínka:

$$S(0, x) = S_i$$

- okrajové podmínky:

$$S(t, 0) = S_0, \quad S(t, +\infty) = S_i$$



*R. Fučík, J. Mikyška, T. H. Illangasekare, M. Beneš (2007)

McWhorterovo a Sunadovo řešení v $\mathbb{R}^1$

Rovnice v $\mathbb{R}^1$:

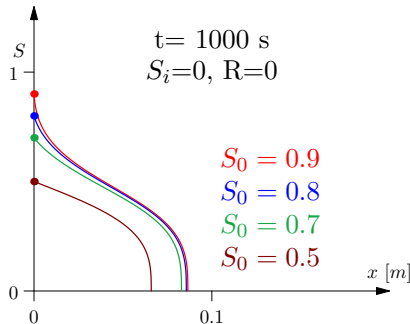
$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial f(S)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D(S) \frac{\partial S}{\partial x} \right)$$

- bez gravitace
- $D(S)$ funkce kapilární difúze
- $u = RA t^{-\frac{1}{2}}$
- $A = A(S_0)$, $R \in (-\infty, 1]$ *
- počáteční podmínka:

$$S(0, x) = S_i$$

- okrajové podmínky:

$$S(t, 0) = S_0, \quad S(t, +\infty) = S_i$$



*R. Fučík, J. Mikyška, T. H. Illangasekare, M. Beneš (2007)

McWhorterovo a Sunadovo řešení v $\mathbb{R}^2$

Rovnice v $\mathbb{R}^2$ (radiální proudění):

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot (f(S)\vec{u} - D(S)\nabla S) = 0$$

- bez gravitace
- $D(S)$ funkce kapilární difúze
- konstantní vtláčení nesmáčivé fáze v $\vec{0}$
- konstantní $\vec{u}$ (v radiálním směru)

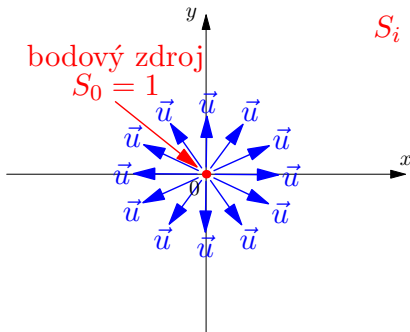
$$||\vec{u}|| = A$$

- počáteční podmínka:

$$S(0, \vec{x}) = S_i$$

- okrajové podmínky:

$$S(t, \vec{0}) = 1, \quad S(t, \infty) = S_i$$



McWhorterovo a Sunadovo řešení v $\mathbb{R}^2$

Rovnice v $\mathbb{R}^2$ (radiální proudění):

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot (f(S)\vec{u} - D(S)\nabla S) = 0$$

- bez gravitace
- $D(S)$ funkce kapilární difúze
- konstantní vtláčení nesmáčivé fáze v $\vec{0}$
- konstantní $\vec{u}$ (v radiálním směru)

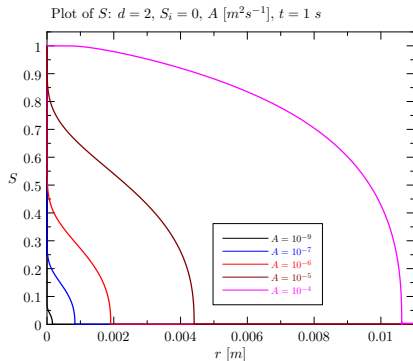
$$||\vec{u}|| = A$$

- počáteční podmínka:

$$S(0, \vec{x}) = S_i$$

- okrajové podmínky:

$$S(t, \vec{0}) = 1, \quad S(t, \infty) = S_i$$



Obrázek: Různé hodnoty A .

McWhorterovo a Sunadovo řešení v $\mathbb{R}^2$

Rovnice v $\mathbb{R}^2$ (radiální proudění):

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot (f(S)\vec{u} - D(S)\nabla S) = 0$$

- bez gravitace
- $D(S)$ funkce kapilární difúze
- konstantní vtláčení nesmáčivé fáze v $\vec{0}$
- konstantní $\vec{u}$ (v radiálním směru)

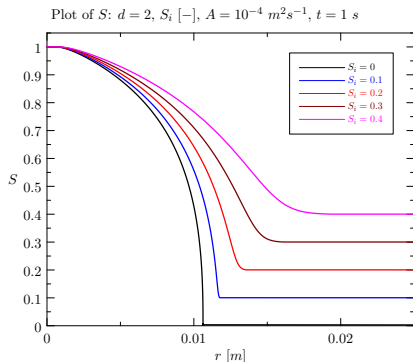
$$||\vec{u}|| = A$$

- počáteční podmínka:

$$S(0, \vec{x}) = S_i$$

- okrajové podmínky:

$$S(t, \vec{0}) = 1, \quad S(t, \infty) = S_i$$



Obrázek: Různé poč. saturace S_i .

McWhorterovo a Sunadovo řešení v $\mathbb{R}^2$

Rovnice v $\mathbb{R}^2$ (radiální proudění):

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot (f(S)\vec{u} - D(S)\nabla S) = 0$$

- bez gravitace
- $D(S)$ funkce kapilární difúze
- konstantní vtláčení nesmáčivé fáze v $\vec{0}$
- konstantní $\vec{u}$ (v radiálním směru)

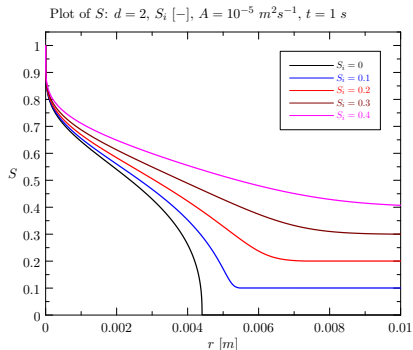
$$||\vec{u}|| = A$$

- počáteční podmínka:

$$S(0, \vec{x}) = S_i$$

- okrajové podmínky:

$$S(t, \vec{0}) = 1, \quad S(t, \infty) = S_i$$



Obrázek: Různé poč. saturace S_i .

Přehled přesných řešení

Přesná řešení pro homogenní porézní prostředí:

1. S. E. **Buckley** a M. C. **Leverett** (1942)
2. D. B. **McWhorter** a D. K. **Sunada** (1990)
3. R. **Fučík**, T. H. **Illangasekare**, a M. **Beneš** (2016)

Přesná řešení pro heterogenní porézní prostředí:

4. C. J. **van Duijn** a M. J. **de Neef** (1996)
5. R. **Fučík**, J. **Mikyška**, M. **Beneš**, a T. H. **Illangasekare** (2008)

Fučík, Illangasekare a Beneš (2016)

Rovnice radiálního proudění v obecném d -rozměrném prostoru:

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot (f(S)\vec{u} - D(S)\nabla S) = 0$$

- bez gravitace
- dimenze $d = 2, 3, 4, \dots$
- zobecnění McWhorterova a Sunadova řešení
- časová úměrnost vstupního toku:

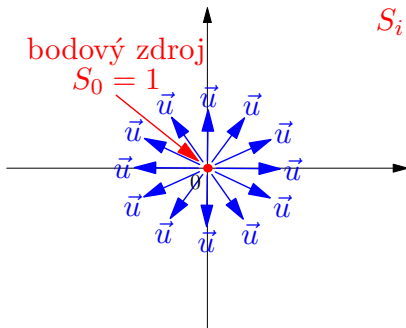
$$\|\vec{u}(t, \vec{0})\| \propto At^{\frac{d-2}{2}}$$

- počáteční podmínka:

$$S(0, \vec{x}) = S_i$$

- okrajové podmínky:

$$S(t, \vec{0}) = 1, \quad S(t, \infty) = S_i$$



Obrázek: Ukázka oblasti v $\mathbb{R}^2$.

Fučík, Illangasekare a Beneš (2016)

Rovnice radiálního proudění v obecném d -rozměrném prostoru:

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot (f(S)\vec{u} - D(S)\nabla S) = 0$$

- bez gravitace
- dimenze $d = 2, 3, 4, \dots$
- zobecnění McWhorterova a Sunadova řešení
- časová úměrnost vstupního toku:

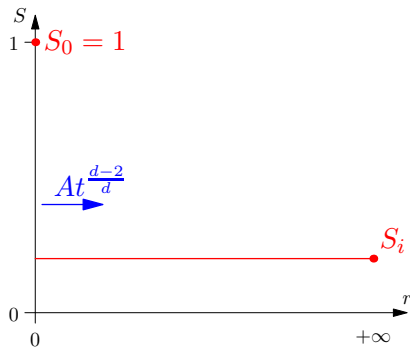
$$\|\vec{u}(t, \vec{0})\| \propto At^{\frac{d-2}{2}}$$

- počáteční podmínka:

$$S(0, \vec{x}) = S_i$$

- okrajové podmínky:

$$S(t, \vec{0}) = 1, \quad S(t, \infty) = S_i$$



Obrázek: Radiální souřadnice.

Fučík, Illangasekare a Beneš (2016)

Rovnice radiálního proudění v obecném d -rozměrném prostoru:

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot (f(S)\vec{u} - D(S)\nabla S) = 0$$

- bez gravitace
- dimenze $d = 2, 3, 4, \dots$
- zobecnění McWhorterova a Sunadova řešení
- časová úměrnost vstupního toku:

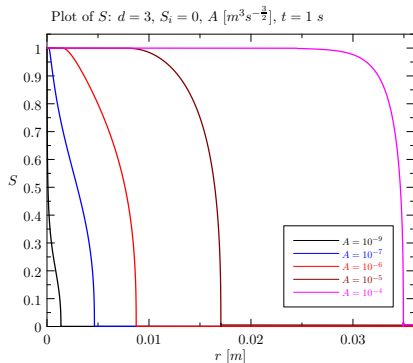
$$\|\vec{u}(t, \vec{0})\| \propto At^{\frac{d-2}{2}}$$

- počáteční podmínka:

$$S(0, \vec{x}) = S_i$$

- okrajové podmínky:

$$S(t, \vec{0}) = 1, \quad S(t, \infty) = S_i$$



Obrázek: Různé hodnoty A .

Fučík, Illangasekare a Beneš (2016)

Rovnice radiálního proudění v obecném d -rozměrném prostoru:

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot (f(S)\vec{u} - D(S)\nabla S) = 0$$

- bez gravitace
- dimenze $d = 2, 3, 4, \dots$
- zobecnění McWhorterova a Sunadova řešení
- časová úměrnost vstupního toku:

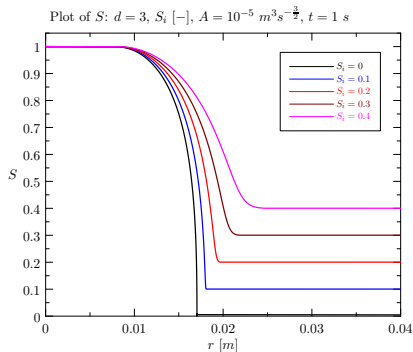
$$\|\vec{u}(t, \vec{0})\| \propto At^{\frac{d-2}{2}}$$

- počáteční podmínka:

$$S(0, \vec{x}) = S_i$$

- okrajové podmínky:

$$S(t, \vec{0}) = 1, \quad S(t, \infty) = S_i$$



Obrázek: Různé poč. saturace S_i .

Fučík, Illangasekare a Beneš (2016)

Rovnice radiálního proudění v obecném d -rozměrném prostoru:

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot (f(S)\vec{u} - D(S)\nabla S) = 0$$

- bez gravitace
- dimenze $d = 2, 3, 4, \dots$
- zobecnění McWhorterova a Sunadova řešení
- časová úměrnost vstupního toku:

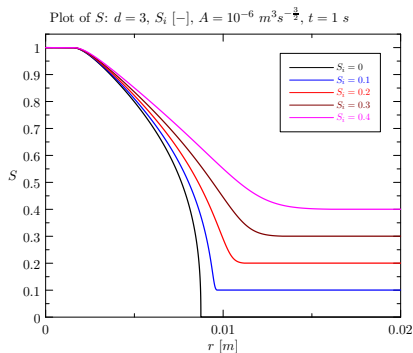
$$\|\vec{u}(t, \vec{0})\| \propto At^{\frac{d-2}{2}}$$

- počáteční podmínka:

$$S(0, \vec{x}) = S_i$$

- okrajové podmínky:

$$S(t, \vec{0}) = 1, \quad S(t, \infty) = S_i$$



Obrázek: Různé poč. saturace S_i .

Fučík, Illangasekare a Beneš (2016)

Rovnice radiálního proudění v obecném d -rozměrném prostoru:

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot (f(S)\vec{u} - D(S)\nabla S) = 0$$

- bez gravitace
- dimenze $d = 2, 3, 4, \dots$
- zobecnění McWhorterova a Sunadova řešení
- časová úměrnost vstupního toku:

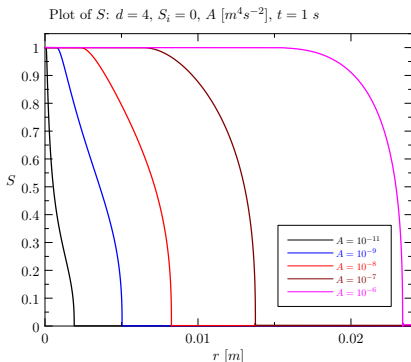
$$\|\vec{u}(t, \vec{0})\| \propto At^{\frac{d-2}{2}}$$

- počáteční podmínka:

$$S(0, \vec{x}) = S_i$$

- okrajové podmínky:

$$S(t, \vec{0}) = 1, \quad S(t, \infty) = S_i$$



Obrázek: Různé injection rates A .

Fučík, Illangasekare a Beneš (2016)

Rovnice radiálního proudění v obecném d -rozměrném prostoru:

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot (f(S)\vec{u} - D(S)\nabla S) = 0$$

- bez gravitace
- dimenze $d = 2, 3, 4, \dots$
- zobecnění McWhorterova a Sunadova řešení
- časová úměrnost vstupního toku:

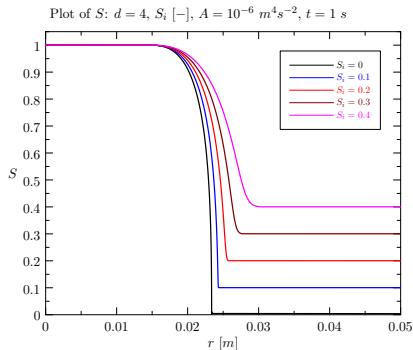
$$\|\vec{u}(t, \vec{0})\| \propto At^{\frac{d-2}{2}}$$

- počáteční podmínka:

$$S(0, \vec{x}) = S_i$$

- okrajové podmínky:

$$S(t, \vec{0}) = 1, \quad S(t, \infty) = S_i$$



Obrázek: Různé poč. saturace S_i .

Fučík, Illangasekare a Beneš (2016)

Rovnice radiálního proudění v obecném d -rozměrném prostoru:

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot (f(S)\vec{u} - D(S)\nabla S) = 0$$

- bez gravitace
- dimenze $d = 2, 3, 4, \dots$
- zobecnění McWhorterova a Sunadova řešení
- časová úměrnost vstupního toku:

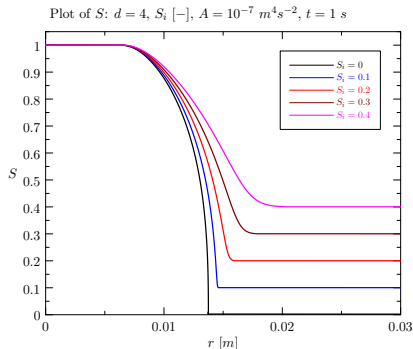
$$\|\vec{u}(t, \vec{0})\| \propto At^{\frac{d-2}{2}}$$

- počáteční podmínka:

$$S(0, \vec{x}) = S_i$$

- okrajové podmínky:

$$S(t, \vec{0}) = 1, \quad S(t, \infty) = S_i$$



Obrázek: Různé poč. saturace S_i .

Přehled přesných řešení

Přesná řešení pro homogenní porézní prostředí:

1. S. E. **Buckley** a M. C. **Leverett** (1942)
2. D. B. **McWhorter** a D. K. **Sunada** (1990)
3. R. **Fučík**, T. H. **Illangasekare**, a M. **Beneš** (2016)

Přesná řešení pro heterogenní porézní prostředí:

4. C. J. **van Duijn** a M. J. **de Neef** (1996)
5. R. **Fučík**, J. **Mikyška**, M. **Beneš**, a T. H. **Illangasekare** (2008)

van Duijnovo a de Neefovo přesné řešení

Rovnice v heterogenním porézním prostředí v $\mathbb{R}^1$:

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D(S) \frac{\partial S}{\partial x} \right)$$

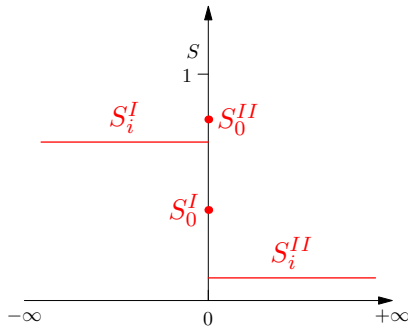
- bez gravitace, bez advekce
- materiálová nespojitost v $x = 0$
- $D(S)$ funkce kapilární difúze
- počáteční podmínky:

$$S(0, x) = S_i^I, \quad \text{pro } x < 0$$

$$S(0, x) = S_i^{II}, \quad \text{pro } x > 0$$

- okrajové podmínky:

$$S(t, -\infty) = S_i^I, \quad S(t, +\infty) = S_i^{II}$$



van Duijnovo a de Neefovo přesné řešení

Rovnice v heterogenním porézním prostředí v $\mathbb{R}^1$:

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D(S) \frac{\partial S}{\partial x} \right)$$

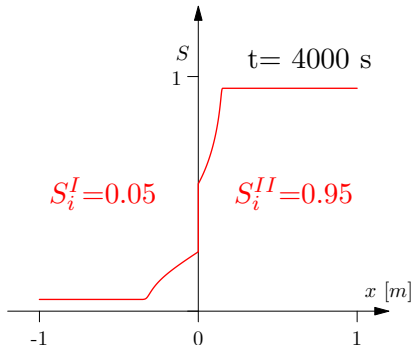
- bez gravitace, bez advekce
- materiálová nespojitost v $x = 0$
- $D(S)$ funkce kapilární difúze
- počáteční podmínky:

$$S(0, x) = S_i^I, \quad \text{pro } x < 0$$

$$S(0, x) = S_i^{II}, \quad \text{pro } x > 0$$

- okrajové podmínky:

$$S(t, -\infty) = S_i^I, \quad S(t, +\infty) = S_i^{II}$$



Přehled přesných řešení

Přesná řešení pro homogenní porézní prostředí:

1. S. E. **Buckley** a M. C. **Leverett** (1942)
2. D. B. **McWhorter** a D. K. **Sunada** (1990)
3. R. **Fučík**, T. H. **Illangasekare**, a M. **Beneš** (2016)

Přesná řešení pro heterogenní porézní prostředí:

4. C. J. **van Duijn** a M. J. **de Neef** (1996)
5. R. **Fučík**, J. **Mikyška**, M. **Beneš**, a T. H. **Illangasekare** (2008)

Fučík, Mikyška, Beneš, Illangasekare (2008)

Rovnice v heterogenním porézním prostředí v $\mathbb{R}^1$:

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial f(S)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D(S) \frac{\partial S}{\partial x} \right)$$

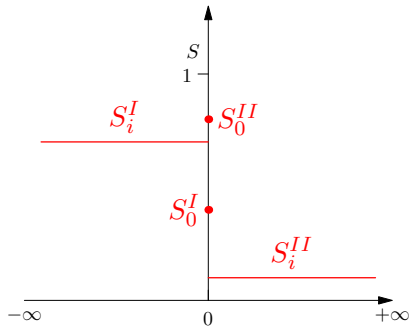
- bez gravitace
- materiálová nespojitost v $x = 0$
- $D(S)$ funkce kapilární difúze
- $u \propto Rt^{-\frac{1}{2}}$, $R \in (-\infty, 1)$
- počáteční podmínky:

$$S(0, x) = S_i^I, \quad \text{for } x < 0$$

$$S(0, x) = S_i^{II}, \quad \text{for } x > 0$$

- okrajové podmínky:

$$S(t, -\infty) = S_i^I, \quad S(t, +\infty) = S_i^{II}$$



Fučík, Mikyška, Beneš, Illangasekare (2008)

Rovnice v heterogenním porézním prostředí v $\mathbb{R}^1$:

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial f(S)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D(S) \frac{\partial S}{\partial x} \right)$$

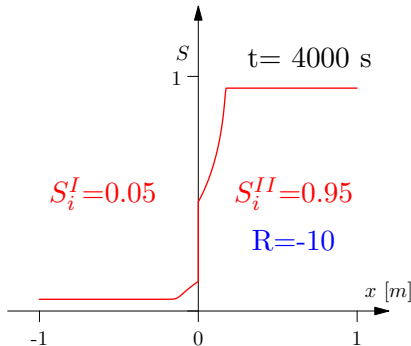
- bez gravitace
- materiálová nespojitost v $x = 0$
- $D(S)$ funkce kapilární difúze
- $u \propto Rt^{-\frac{1}{2}}$, $R \in (-\infty, 1)$
- počáteční podmínky:

$$S(0, x) = S_i^I, \quad \text{for } x < 0$$

$$S(0, x) = S_i^{II}, \quad \text{for } x > 0$$

- okrajové podmínky:

$$S(t, -\infty) = S_i^I, \quad S(t, +\infty) = S_i^{II}$$



Fučík, Mikyška, Beneš, Illangasekare (2008)

Rovnice v heterogenním porézním prostředí v $\mathbb{R}^1$:

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial f(S)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D(S) \frac{\partial S}{\partial x} \right)$$

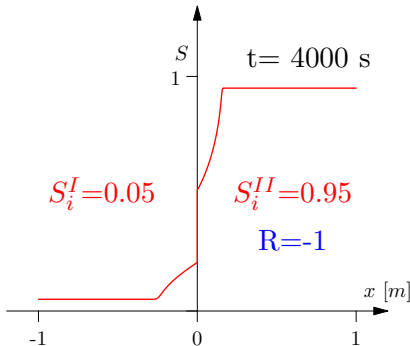
- bez gravitace
- materiálová nespojitost v $x = 0$
- $D(S)$ funkce kapilární difúze
- $u \propto Rt^{-\frac{1}{2}}$, $R \in (-\infty, 1)$
- počáteční podmínky:

$$S(0, x) = S_i^I, \quad \text{for } x < 0$$

$$S(0, x) = S_i^{II}, \quad \text{for } x > 0$$

- okrajové podmínky:

$$S(t, -\infty) = S_i^I, \quad S(t, +\infty) = S_i^{II}$$



Fučík, Mikyška, Beneš, Illangasekare (2008)

Rovnice v heterogenním porézním prostředí v $\mathbb{R}^1$:

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial f(S)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D(S) \frac{\partial S}{\partial x} \right)$$

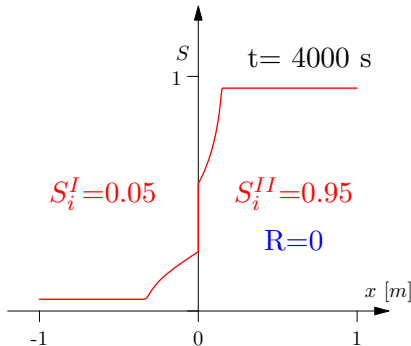
- bez gravitace
- materiálová nespojitost v $x = 0$
- $D(S)$ funkce kapilární difúze
- $u \propto Rt^{-\frac{1}{2}}$, $R \in (-\infty, 1)$
- počáteční podmínky:

$$S(0, x) = S_i^I, \quad \text{for } x < 0$$

$$S(0, x) = S_i^{II}, \quad \text{for } x > 0$$

- okrajové podmínky:

$$S(t, -\infty) = S_i^I, \quad S(t, +\infty) = S_i^{II}$$



Fučík, Mikyška, Beneš, Illangasekare (2008)

Rovnice v heterogenním porézním prostředí v $\mathbb{R}^1$:

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial f(S)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D(S) \frac{\partial S}{\partial x} \right)$$

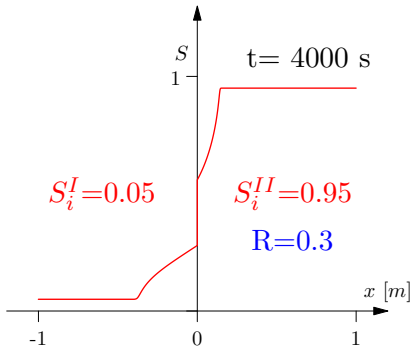
- bez gravitace
- materiálová nespojitost v $x = 0$
- $D(S)$ funkce kapilární difúze
- $u \propto Rt^{-\frac{1}{2}}$, $R \in (-\infty, 1)$
- počáteční podmínky:

$$S(0, x) = S_i^I, \quad \text{for } x < 0$$

$$S(0, x) = S_i^{II}, \quad \text{for } x > 0$$

- okrajové podmínky:

$$S(t, -\infty) = S_i^I, \quad S(t, +\infty) = S_i^{II}$$



Fučík, Mikyška, Beneš, Illangasekare (2008)

Rovnice v heterogenním porézním prostředí v $\mathbb{R}^1$:

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial f(S)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D(S) \frac{\partial S}{\partial x} \right)$$

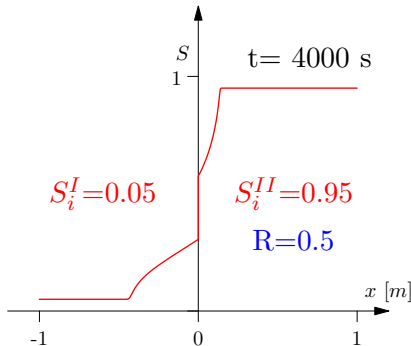
- bez gravitace
- materiálová nespojitost v $x = 0$
- $D(S)$ funkce kapilární difúze
- $u \propto Rt^{-\frac{1}{2}}$, $R \in (-\infty, 1)$
- počáteční podmínky:

$$S(0, x) = S_i^I, \quad \text{for } x < 0$$

$$S(0, x) = S_i^{II}, \quad \text{for } x > 0$$

- okrajové podmínky:

$$S(t, -\infty) = S_i^I, \quad S(t, +\infty) = S_i^{II}$$



Fučík, Mikyška, Beneš, Illangasekare (2008)

Rovnice v heterogenním porézním prostředí v $\mathbb{R}^1$:

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial f(S)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D(S) \frac{\partial S}{\partial x} \right)$$

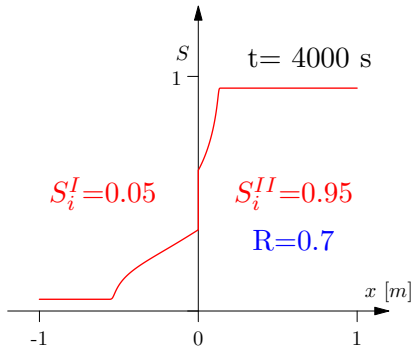
- bez gravitace
- materiálová nespojitost v $x = 0$
- $D(S)$ funkce kapilární difúze
- $u \propto Rt^{-\frac{1}{2}}$, $R \in (-\infty, 1)$
- počáteční podmínky:

$$S(0, x) = S_i^I, \quad \text{for } x < 0$$

$$S(0, x) = S_i^{II}, \quad \text{for } x > 0$$

- okrajové podmínky:

$$S(t, -\infty) = S_i^I, \quad S(t, +\infty) = S_i^{II}$$



Fučík, Mikyška, Beneš, Illangasekare (2008)

Rovnice v heterogenním porézním prostředí v $\mathbb{R}^1$:

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial f(S)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D(S) \frac{\partial S}{\partial x} \right)$$

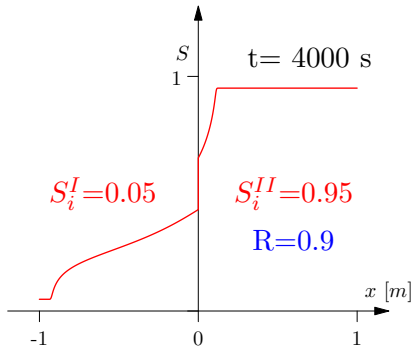
- bez gravitace
- materiálová nespojitost v $x = 0$
- $D(S)$ funkce kapilární difúze
- $u \propto Rt^{-\frac{1}{2}}$, $R \in (-\infty, 1)$
- počáteční podmínky:

$$S(0, x) = S_i^I, \quad \text{for } x < 0$$

$$S(0, x) = S_i^{II}, \quad \text{for } x > 0$$

- okrajové podmínky:

$$S(t, -\infty) = S_i^I, \quad S(t, +\infty) = S_i^{II}$$



Obsah

Úvod

Ukázková úloha dvoufázového proudění

Přehled přesných řešení

Přesné řešení v $\mathbb{R}^d$ (a úkol pro SSM)

Pachatelé

Rovnice dvoufázového proudění v $\mathbb{R}^d$ (opět)

- Rovnice kontinuity pro fázi $\alpha = w, n$:

$$\frac{\partial(\phi\rho_\alpha S_\alpha)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_\alpha \vec{v}_\alpha) = F_\alpha$$

- Darcyho zákon fázi $\alpha = w, n$:

$$\vec{v}_\alpha = -\lambda_\alpha \mathbf{K}(\nabla p_\alpha - \rho_\alpha \vec{g})$$

- Balance saturace

$$S_w + S_n = 1$$

- Kapilární tlak

$$p_c = p_n - p_w = p_c(S_w)$$

Rovnice dvoufázového proudění v $\mathbb{R}^d$ (opět)

- Rovnice kontinuity pro fázi $\alpha = w, n$:

$$\frac{\partial(\phi\rho_\alpha S_\alpha)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_\alpha \vec{v}_\alpha) = F_\alpha$$

- Darcyho zákon fázi $\alpha = w, n$:

$$\vec{v}_\alpha = -\lambda_\alpha \mathbf{K}(\nabla p_\alpha - \rho_\alpha \vec{g})$$

- Balance saturace

$$S_w + S_n = 1$$

- Kapilární tlak

$$p_c = p_n - p_w = p_c(S_w)$$

Úkol: Z těchto rovnic odvoďte rovnice v $\mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned}\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \nabla \cdot (f(S_w) \vec{v}_T - D(S_w) \nabla S_w) &= 0, \\ \nabla \cdot \vec{v}_T &= 0.\end{aligned}$$

Formulace úlohy v $\mathbb{R}^d$

Úkol: Odvoďte rovnice v $\mathbb{R}^d$:

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \nabla \cdot (f(S_w) \vec{v}_T - D(S_w) \nabla S_w) = 0,$$
$$\nabla \cdot \vec{v}_T = 0.$$

Formulace úlohy v $\mathbb{R}^d$

Úkol: Odvoďte rovnice v $\mathbb{R}^d$:

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \nabla \cdot (f(S_w) \vec{v}_T - D(S_w) \nabla S_w) = 0,$$
$$\nabla \cdot \vec{v}_T = 0.$$

Poznámky:

Formulace úlohy v $\mathbb{R}^d$

Úkol: Odvoďte rovnice v $\mathbb{R}^d$:

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \nabla \cdot (f(S_w) \vec{v}_T - D(S_w) \nabla S_w) = 0,$$
$$\nabla \cdot \vec{v}_T = 0.$$

Poznámky:

- bez gravitace: $\vec{g} = \vec{0}$

Formulace úlohy v $\mathbb{R}^d$

Úkol: Odvoďte rovnice v $\mathbb{R}^d$:

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \nabla \cdot (f(S_w) \vec{v}_T - D(S_w) \nabla S_w) = 0,$$
$$\nabla \cdot \vec{v}_T = 0.$$

Poznámky:

- bez gravitace: $\vec{g} = \vec{0}$
- nestlačitelné: $\rho_\alpha = \text{konst}$

Formulace úlohy v $\mathbb{R}^d$

Úkol: Odvoďte rovnice v $\mathbb{R}^d$:

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \nabla \cdot (f(S_w) \vec{v}_T - D(S_w) \nabla S_w) = 0,$$
$$\nabla \cdot \vec{v}_T = 0.$$

Poznámky:

- bez gravitace: $\vec{g} = \vec{0}$
- nestlačitelné: $\rho_\alpha = \text{konst}$
- totální rychlost: $\vec{v}_T = \vec{v}_w + \vec{v}_n$

Formulace úlohy v $\mathbb{R}^d$

Úkol: Odvoďte rovnice v $\mathbb{R}^d$:

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \nabla \cdot (f(S_w) \vec{v}_T - D(S_w) \nabla S_w) = 0,$$
$$\nabla \cdot \vec{v}_T = 0.$$

Poznámky:

- bez gravitace: $\vec{g} = \vec{0}$
- nestlačitelné: $\rho_\alpha = \text{konst}$
- totální rychlost: $\vec{v}_T = \vec{v}_w + \vec{v}_n$
- izotropní prostředí: $\mathbf{K} = K \mathbf{I}$

Formulace úlohy v $\mathbb{R}^d$

Úkol: Odvoďte rovnice v $\mathbb{R}^d$:

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \nabla \cdot (f(S_w) \vec{v}_T - D(S_w) \nabla S_w) = 0,$$
$$\nabla \cdot \vec{v}_T = 0.$$

Poznámky:

- bez gravitace: $\vec{g} = \vec{0}$
- nestlačitelné: $\rho_\alpha = \text{konst}$
- totální rychlost: $\vec{v}_T = \vec{v}_w + \vec{v}_n$
- izotropní prostředí: $\mathbf{K} = K \mathbf{I}$
- frakční toková funkce: $f = \frac{\lambda_w}{\lambda_w + \lambda_n}$

Formulace úlohy v $\mathbb{R}^d$

Úkol: Odvoďte rovnice v $\mathbb{R}^d$:

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \nabla \cdot (f(S_w) \vec{v}_T - D(S_w) \nabla S_w) = 0,$$
$$\nabla \cdot \vec{v}_T = 0.$$

Poznámky:

- bez gravitace: $\vec{g} = \vec{0}$
- nestlačitelné: $\rho_\alpha = \text{konst}$
- totální rychlost: $\vec{v}_T = \vec{v}_w + \vec{v}_n$
- izotropní prostředí: $\mathbf{K} = K \mathbf{I}$
- frakční toková funkce: $f = \frac{\lambda_w}{\lambda_w + \lambda_n}$
- funkce kapilární difúze: $D = -K \frac{\lambda_w \lambda_n}{\lambda_w + \lambda_n} \frac{dp_c}{dS_w}$

Sférická transformace rovnic v $\mathbb{R}^d$: 1/3

Rovnice

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \nabla \cdot (f(S_w) \vec{v}_T - D(S_w) \nabla S_w) = 0,$$
$$\nabla \cdot \vec{v}_T = 0,$$

za předpokladu symetrie řešení dle počátku $\vec{0}$:

$$S_w = S_w(t, r), \quad \vec{v}_T = \vec{v}_T(t, r),$$

transformujeme do obecných sférických souřadnicích v $\mathbb{R}^d$

Sférická transformace rovnic v $\mathbb{R}^d$: 1/3

Rovnice

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \nabla \cdot (f(S_w) \vec{v}_T - D(S_w) \nabla S_w) = 0,$$
$$\nabla \cdot \vec{v}_T = 0,$$

za předpokladu symetrie řešení dle počátku $\vec{0}$:

$$S_w = S_w(t, r), \quad \vec{v}_T = \vec{v}_T(t, r),$$

transformujeme do obecných sférických souřadnicích v $\mathbb{R}^d$

(viz cvičení MAA4)

Sférická transformace rovnic v $\mathbb{R}^d$: 1/3

Rovnice

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \nabla \cdot (f(S_w) \vec{v}_T - D(S_w) \nabla S_w) = 0,$$
$$\nabla \cdot \vec{v}_T = 0,$$

za předpokladu symetrie řešení dle počátku $\vec{0}$:

$$S_w = S_w(t, r), \quad \vec{v}_T = \vec{v}_T(t, r),$$

transformujeme do obecných sférických souřadnicích v $\mathbb{R}^d$

(viz cvičení MAA4)

Okrajové podmínky:

$$S_w(t, 0) = 1, \quad S_w(t, +\infty) = S_i.$$

Sférická transformace rovnic v $\mathbb{R}^d$: 1/3

Rovnice

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \nabla \cdot (f(S_w) \vec{v}_T - D(S_w) \nabla S_w) = 0,$$
$$\nabla \cdot \vec{v}_T = 0,$$

za předpokladu symetrie řešení dle počátku $\vec{0}$:

$$S_w = S_w(t, r), \quad \vec{v}_T = \vec{v}_T(t, r),$$

transformujeme do obecných sférických souřadnicích v $\mathbb{R}^d$

(viz cvičení MAA4)

Okrajové podmínky:

$$S_w(t, 0) = 1, \quad S_w(t, +\infty) = S_i.$$

Počáteční podmínka:

$$S_w(0, r) = S_i.$$

Sférická transformace rovnic v $\mathbb{R}^d$: 2/3

Řešení rovnice

$$\nabla \cdot \vec{v}_T = 0,$$

Sférická transformace rovnic v $\mathbb{R}^d$: 2/3

Řešení rovnice

$$\nabla \cdot \vec{v}_T = 0,$$

ve sférických souřadnicích lze najít ve tvaru

$$\vec{v}_T(t, r) = \frac{Q_0(t)}{\gamma_d r^{d-1}} \vec{t},$$

Sférická transformace rovnic v $\mathbb{R}^d$: 2/3

Řešení rovnice

$$\nabla \cdot \vec{v}_T = 0,$$

ve sférických souřadnicích lze najít ve tvaru

$$\vec{v}_T(t, r) = \frac{Q_0(t)}{\gamma_d r^{d-1}} \vec{e},$$

kde

- Q_0 je koeficient rychlosti vtoku

Sférická transformace rovnic v $\mathbb{R}^d$: 2/3

Řešení rovnice

$$\nabla \cdot \vec{v}_T = 0,$$

ve sférických souřadnicích lze najít ve tvaru

$$\vec{v}_T(t, r) = \frac{Q_0(t)}{\gamma_d r^{d-1}} \vec{r},$$

kde

- Q_0 je koeficient rychlosti vtoku
- $\gamma_d \dots$ povrch jednotkové koule v $\mathbb{R}^d$:

$$\gamma_d = \frac{d\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2} + 1)}$$

Sférická transformace rovnic v $\mathbb{R}^d$: 2/3

Řešení rovnice

$$\nabla \cdot \vec{v}_T = 0,$$

ve sférických souřadnicích lze najít ve tvaru

$$\vec{v}_T(t, r) = \frac{Q_0(t)}{\gamma_d r^{d-1}} \vec{r},$$

kde

- Q_0 je koeficient rychlosti vtoku
- $\gamma_d \dots$ povrch jednotkové koule v $\mathbb{R}^d$:

$$\gamma_d = \frac{d\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right)}$$

- $\vec{r} \dots$ jednotkový vektor v kladném radiálním směru

Sférická transformace rovnic v $\mathbb{R}^d$: 3/3

Hlavní rovnice pro $S_w = S_w(t, r)$:

$$\gamma_d r^{d-1} \phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + (1 - f(S_i)) Q_0 \frac{\partial F}{\partial r} = 0$$

Sférická transformace rovnic v $\mathbb{R}^d$: 3/3

Hlavní rovnice pro $S_w = S_w(t, r)$:

$$\gamma_d r^{d-1} \phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + (1 - f(S_i)) Q_0 \frac{\partial F}{\partial r} = 0$$

- funkce $F = F(t, r)$

$$F = \frac{\frac{Q_w}{Q_0} - f(S_i)}{1 - f(S_i)}$$

Sférická transformace rovnic v $\mathbb{R}^d$: 3/3

Hlavní rovnice pro $S_w = S_w(t, r)$:

$$\gamma_d r^{d-1} \phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + (1 - f(S_i)) Q_0 \frac{\partial F}{\partial r} = 0$$

- funkce $F = F(t, r)$

$$F = \frac{\frac{Q_w}{Q_0} - f(S_i)}{1 - f(S_i)}$$

- funkce $Q_w = Q_w(t, r)$:

$$Q_w = \gamma_d r^{d-1} v_w$$

Sférická transformace rovnic v $\mathbb{R}^d$: 3/3

Hlavní rovnice pro $S_w = S_w(t, r)$:

$$\gamma_d r^{d-1} \phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + (1 - f(S_i)) Q_0 \frac{\partial F}{\partial r} = 0$$

- funkce $F = F(t, r)$

$$F = \frac{\frac{Q_w}{Q_0} - f(S_i)}{1 - f(S_i)}$$

- funkce $Q_w = Q_w(t, r)$:

$$Q_w = \gamma_d r^{d-1} v_w$$

- funkce $F_w = F_w(S_w) \dots$ normalizovaná funkce f :

$$F_w(S_w) = \frac{f(S_w) - f(S_i)}{1 - f(S_i)}$$

Sférická transformace rovnic v $\mathbb{R}^d$: 3/3

Hlavní rovnice pro $S_w = S_w(t, r)$:

$$\gamma_d r^{d-1} \phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + (1 - f(S_i)) Q_0 \frac{\partial F}{\partial r} = 0$$

- funkce $F = F(t, r)$

$$F = \frac{\frac{Q_w}{Q_0} - f(S_i)}{1 - f(S_i)}$$

- funkce $Q_w = Q_w(t, r)$:

$$Q_w = \gamma_d r^{d-1} v_w$$

- funkce $F_w = F_w(S_w) \dots$ normalizovaná funkce f :

$$F_w(S_w) = \frac{f(S_w) - f(S_i)}{1 - f(S_i)}$$

Sférická transformace rovnic v $\mathbb{R}^d$: 3/3

Hlavní rovnice pro $S_w = S_w(t, r)$:

$$\gamma_d r^{d-1} \phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + (1 - f(S_i)) Q_0 \frac{\partial F}{\partial r} = 0$$

- funkce $F = F(t, r)$

$$F = \frac{\frac{Q_w}{Q_0} - f(S_i)}{1 - f(S_i)} = F_w - \frac{\gamma_d r^{d-1}}{(1 - f(S_i)) Q_0} D \frac{\partial S_w}{\partial r}$$

- funkce $Q_w = Q_w(t, r)$:

$$Q_w = \gamma_d r^{d-1} v_w$$

- funkce $F_w = F_w(S_w) \dots$ normalizovaná funkce f :

$$F_w(S_w) = \frac{f(S_w) - f(S_i)}{1 - f(S_i)}$$

Sférická transformace rovnic v $\mathbb{R}^d$: 3/3

Hlavní rovnice pro $S_w = S_w(t, r)$:

$$\gamma_d r^{d-1} \phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + (1 - f(S_i)) Q_0 \frac{\partial F}{\partial r} = 0$$

- funkce $F = F(t, r)$

$$F = \frac{\frac{Q_w}{Q_0} - f(S_i)}{1 - f(S_i)} = F_w - \frac{\gamma_d r^{d-1}}{(1 - f(S_i)) Q_0} D \frac{\partial S_w}{\partial r}$$

- funkce $Q_w = Q_w(t, r)$:

$$Q_w = \gamma_d r^{d-1} v_w = f Q_0 - \gamma_d r^{d-1} D \frac{\partial S_w}{\partial r},$$

- funkce $F_w = F_w(S_w) \dots$ normalizovaná funkce f :

$$F_w(S_w) = \frac{f(S_w) - f(S_i)}{1 - f(S_i)}$$

Soběpodobná transformace proměnných

Hlavní rovnice pro $S_w = S_w(t, r)$:

$$\gamma_d r^{d-1} \phi \frac{\partial S_w(t, r)}{\partial t} + (1 - f(S_i)) Q_0(t) \frac{\partial F(t, r)}{\partial r} = 0. \quad (1)$$

Soběpodobná transformace proměnných

Hlavní rovnice pro $S_w = S_w(t, r)$:

$$\gamma_d r^{d-1} \phi \frac{\partial S_w(t, r)}{\partial t} + (1 - f(S_i)) Q_0(t) \frac{\partial F(t, r)}{\partial r} = 0. \quad (1)$$

Pokud

$$Q_0(t) = At^{\frac{d-2}{2}},$$

Soběpodobná transformace proměnných

Hlavní rovnice pro $S_w = S_w(t, r)$:

$$\gamma_d r^{d-1} \phi \frac{\partial S_w(t, r)}{\partial t} + (1 - f(S_i)) Q_0(t) \frac{\partial F(t, r)}{\partial r} = 0. \quad (1)$$

Pokud

$$Q_0(t) = A t^{\frac{d-2}{2}},$$

Ize pomocí transformace proměnných $\lambda(S_w) = r t^{-\frac{1}{2}}$ převést rovnici (1) na obyčejnou diferenciální rovnici pro $F = F(S_w)$

$$F'' (F')^{\frac{2}{d}-2} = -A^{-\frac{2}{d}} \frac{C_d D}{F - F_w}$$

Soběpodobná transformace proměnných

Hlavní rovnice pro $S_w = S_w(t, r)$:

$$\gamma_d r^{d-1} \phi \frac{\partial S_w(t, r)}{\partial t} + (1 - f(S_i)) Q_0(t) \frac{\partial F(t, r)}{\partial r} = 0. \quad (1)$$

Pokud

$$Q_0(t) = A t^{\frac{d-2}{2}},$$

Ize pomocí transformace proměnných $\lambda(S_w) = r t^{-\frac{1}{2}}$ převést rovnici (1) na obyčejnou diferenciální rovnici pro $F = F(S_w)$

$$F'' (F')^{\frac{2}{d}-2} = -A^{-\frac{2}{d}} \frac{C_d D}{F - F_w}$$

s okrajovými podmínkami

$$F(S_i) = 0,$$

$$F(S_0) = 1.$$

Soběpodobná transformace proměnných

Hlavní rovnice pro $S_w = S_w(t, r)$:

$$\gamma_d r^{d-1} \phi \frac{\partial S_w(t, r)}{\partial t} + (1 - f(S_i)) Q_0(t) \frac{\partial F(t, r)}{\partial r} = 0. \quad (1)$$

Pokud

$$Q_0(t) = A t^{\frac{d-2}{2}},$$

Ize pomocí transformace proměnných $\lambda(S_w) = r t^{-\frac{1}{2}}$ převést rovnici (1) na obyčejnou diferenciální rovnici pro $F = F(S_w)$

$$F'' (F')^{\frac{2}{d}-2} = -A^{-\frac{2}{d}} \frac{C_d D}{F - F_w}$$

s okrajovými podmínkami

$$F(S_i) = 0,$$

$$F(S_0) = 1.$$

- $C_d = d \left(\frac{\gamma_d}{1-f(S_i)} \right)^{\frac{2}{d}} \left(\frac{\phi}{2} \right)^{\frac{2}{d}-1} \dots \text{konstanta.}$

Integrální řešení: 1/2

Integrální řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$F'' (F')^{\frac{2}{d}-2} = -A^{-\frac{2}{d}} \frac{C_d D}{F - F_w}$$

Integrální řešení: 1/2

Integrální řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$F'' (F')^{\frac{2}{d}-2} = -A^{-\frac{2}{d}} \frac{C_d D}{F - F_w}$$

- pro $d = 1$ a $d = 2$: McWhorter a Sunada (1990), Fučík et al. (2007)

Integrální řešení: 1/2

Integrální řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$F'' (F')^{\frac{2}{d}-2} = -A^{-\frac{2}{d}} \frac{C_d D}{F - F_w}$$

- pro $d = 1$ a $d = 2$: McWhorter a Sunada (1990), Fučík et al. (2007)
- pro $d \geq 3$: Fučík, Illangasekare a Beneš (2016):

Integrální řešení: 1/2

Integrální řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$F'' (F')^{\frac{2}{d}-2} = -A^{-\frac{2}{d}} \frac{C_d D}{F - F_w}$$

- pro $d = 1$ a $d = 2$: McWhorter a Sunada (1990), Fučík et al. (2007)
- pro $d \geq 3$: Fučík, Illangasekare a Beneš (2016):

$$F(S_w) = \int_{S_i}^{S_w} \left[(F'(S_i^+))^{\frac{2-d}{d}} + \frac{d-2}{d} C_d A^{-\frac{2}{d}} \int_{S_i}^{\beta} \frac{D(\eta)}{F(\eta) - F_w(\eta)} d\eta \right]^{\frac{d}{2-d}} d\beta,$$

Integrální řešení: 1/2

Integrální řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$F''(F')^{\frac{2}{d}-2} = -A^{-\frac{2}{d}} \frac{C_d D}{F - F_w}$$

- pro $d = 1$ a $d = 2$: McWhorter a Sunada (1990), Fučík et al. (2007)
- pro $d \geq 3$: Fučík, Illangasekare a Beneš (2016):

$$F(S_w) = \int_{S_i}^{S_w} \left[(F'(S_i^+))^{\frac{2-d}{d}} + \frac{d-2}{d} C_d A^{-\frac{2}{d}} \int_{S_i}^{\beta} \frac{D(\eta)}{F(\eta) - F_w(\eta)} d\eta \right]^{\frac{d}{2-d}} d\beta,$$

s podmínkou/rovnicí pro neznámou hodnotu $F'(S_i^+)$:

$$1 = \int_{S_i}^{S_0} \left[(F'(S_i^+))^{\frac{2-d}{d}} + \frac{d-2}{d} C_d A^{-\frac{2}{d}} \int_{S_i}^{\beta} \frac{D(\eta)}{F(\eta) - F_w(\eta)} d\eta \right]^{\frac{d}{2-d}} d\beta.$$

Integrační řešení: 2/2

- pro $d \geq 3$: Fučík, Illangasekare a Beneš (2016):

$$F(S_w) = \int_{S_i}^{S_w} \left[(F'(S_i^+))^{\frac{2-d}{d}} + \frac{d-2}{d} C_d A^{-\frac{2}{d}} \int_{S_i}^{\beta} \frac{D(\eta)}{F(\eta) - F_w(\eta)} d\eta \right]^{\frac{d}{2-d}} d\beta,$$

s podmínkou/rovnicí pro neznámou hodnotu $F'(S_i^+)$:

$$1 = \int_{S_i}^{S_0} \left[(F'(S_i^+))^{\frac{2-d}{d}} + \frac{d-2}{d} C_d A^{-\frac{2}{d}} \int_{S_i}^{\beta} \frac{D(\eta)}{F(\eta) - F_w(\eta)} d\eta \right]^{\frac{d}{2-d}} d\beta.$$

Integrální řešení: 2/2

- pro $d \geq 3$: Fučík, Illangasekare a Beneš (2016):

$$F(S_w) = \int_{S_i}^{S_w} \left[(F'(S_i^+))^{\frac{2-d}{d}} + \frac{d-2}{d} C_d A^{-\frac{2}{d}} \int_{S_i}^{\beta} \frac{D(\eta)}{F(\eta) - F_w(\eta)} d\eta \right]^{\frac{d}{2-d}} d\beta,$$

s podmínkou/rovnicí pro neznámou hodnotu $F'(S_i^+)$:

$$1 = \int_{S_i}^{S_0} \left[(F'(S_i^+))^{\frac{2-d}{d}} + \frac{d-2}{d} C_d A^{-\frac{2}{d}} \int_{S_i}^{\beta} \frac{D(\eta)}{F(\eta) - F_w(\eta)} d\eta \right]^{\frac{d}{2-d}} d\beta.$$

- řešení integrální rovnice lze najít iteračně pomocí numerické integrace

Integrální řešení: 2/2

- pro $d \geq 3$: Fučík, Illangasekare a Beneš (2016):

$$F(S_w) = \int_{S_i}^{S_w} \left[(F'(S_i^+))^{\frac{2-d}{d}} + \frac{d-2}{d} C_d A^{-\frac{2}{d}} \int_{S_i}^{\beta} \frac{D(\eta)}{F(\eta) - F_w(\eta)} d\eta \right]^{\frac{d}{2-d}} d\beta,$$

s podmínkou/rovnicí pro neznámou hodnotu $F'(S_i^+)$:

$$1 = \int_{S_i}^{S_0} \left[(F'(S_i^+))^{\frac{2-d}{d}} + \frac{d-2}{d} C_d A^{-\frac{2}{d}} \int_{S_i}^{\beta} \frac{D(\eta)}{F(\eta) - F_w(\eta)} d\eta \right]^{\frac{d}{2-d}} d\beta.$$

- řešení integrální rovnice lze najít iteračně pomocí numerické integrace
- online implementace řešení pro $d = 1$, $d = 2$, a $d \geq 3$:

<http://mmg.fjfi.cvut.cz/~fucik/exact1d>

<http://mmg.fjfi.cvut.cz/~fucik/exact>

Obsah

Úvod

Ukázková úloha dvoufázového proudění

Přehled přesných řešení

Přesné řešení v $\mathbb{R}^d$ (a úkol pro SSM)

Pachatelé

Spolupachatelé (foto rok 2007)



Tissa H. Illangasekare RF Michal Beneš Jiří Mikyška