

# **ŘEŠENÉ PŘÍKLADY Z TEORETICKÉ FYZIKY**

**příručka pro začínající teoretické fyziky na FJFI**

konečná verze

spočítal a sepsal

**RADEK FUČÍK**

## PŘEDMLUVA

tato příručka seznamuje s řešením příkladů ze skriptu

### **Teoretická fyzika**

Doc.Ing. Ivan Štoll, CSc.

Prof. Ing. Jiří Tolar, DrSc.

(Vydavatelství ČVUT 1999).

Z časových i jiných důvodů tento dokument neposkytuje řešení všech příkladů vyskytujících se ve výše popsaném skriptu.

Veškeré příklady jsem spočítal sám a tudíž za jejich stoprocentní správnost ručit nemohu, rád ale poopravím špatně (nebo nepřehledně) řešené příklady - proto vaše přání, připomínky, náměty, řešení příkladů nebo objevené chyby mi prosím zasílejte na adresu [antareus@volny.cz](mailto:antareus@volny.cz) - na fyzice se může podílet přeci každý :o) - nebo icq 343915694.

### **Podmínky k užívání:**

Při užívání této příručky se uživatel (čtenář) zavazuje k dodržování dobrých mravů. Autor neručí za škody způsobené touto příručkou. Šíření za účelem finančního obohacování je důrazně zakázáno naopak šíření za účelem znalostního obohacování je vítáno.

### **Důležité upozornění:**

tato příručka vznikla jako pomůcka pro ty, kteří se učí na zkoušku z TF a neví si s nějakým příkladem rady. Jakékoliv zneužití této příručky k podvodům při písemné části zkoušky z Teoretické fyziky je proto porušením dobrých mravů a tudíž i práva k používání této příručky.

tato verze příručky je konečná a je dostupná ke stažení na adrese

<http://www.volny.cz/antareus>

autor, 21.5.2003

## STRUČNÝ OBSAH

| kapitola   | číslo příkladu řešeného v této příručce |   |   |   |   |   |    |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |  |  |
|------------|-----------------------------------------|---|---|---|---|---|----|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|--|--|--|
| kapitola 1 | 1                                       | 2 | 3 |   |   |   |    |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |  |  |
| kapitola 2 | 1                                       | 2 | 3 | 4 | 6 |   | 7  | 8 | 9 | 11 |    |    | 12 | 17 |    |    | 18 | 22 |    |    | 23 | 24 |    |    |    |  |  |  |
| kapitola 3 | 1                                       | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7  | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 17 |    | 19 |    | 20 | 22 |    | 23 | 24 | 27 |    |  |  |  |
|            | 28                                      |   |   |   |   |   |    |   |   |    | 37 |    |    | 38 | 39 | 41 |    | 42 |    |    |    |    |    |    |    |  |  |  |
| kapitola 4 | 2                                       |   | 3 | 4 | 5 | 6 | 9  |   |   | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 18 |    | 20 |    | 21 | 22 | 24 |    |    | 25 |  |  |  |
| kapitola 5 | 2                                       |   | 3 | 4 | 5 | 6 | 7  | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 15 |    |    | 17 | 19 |    | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |    |  |  |  |
| kapitola 7 | 1                                       | 2 | 4 |   | 5 | 6 | 10 |   |   |    | 11 | 15 |    |    | 17 | 18 | 24 |    |    |    |    | 26 |    | 27 |    |  |  |  |
|            | 28                                      |   |   |   |   |   |    |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |  |  |

## KAPITOLA 1: NEWTONOVA MECHANIKA

**1.1 Dokažte, že poloha hmotného středu, definovaného vztahem  $\vec{R} = \frac{\sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}}{\sum_{\alpha} m_{\alpha}}$ , nezávisí na volbě počátku.**

zvolme se nový počátek a transformujme souřadnice vztahy

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{a}$$

$$\vec{R} = \vec{R}' + \vec{a}$$

a dosadíme do daného vztahu

$$\vec{R} = \frac{\sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}}{\sum_{\alpha} m_{\alpha}} = \frac{\sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}' + \vec{a} \sum_{\alpha} m_{\alpha}}{\sum_{\alpha} m_{\alpha}} = \frac{\sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}'}{\sum_{\alpha} m_{\alpha}} + \vec{a}$$

porovnáním s  $\vec{R} = \vec{R}' + \vec{a}$  dostáváme

$$\vec{R}' + \vec{a} = \frac{\sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}'}{\sum_{\alpha} m_{\alpha}} + \vec{a}$$

a po odečtení  $\vec{a}$  od obou stran dostaneme opět

$$\vec{R}' = \frac{\sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}'}{\sum_{\alpha} m_{\alpha}}$$

**1.2 Pohybové rovnice bezsilového hmotného bodu v kartézském systému  $S'$ , který se libovolně pohybuje vůči inerciálnímu systému  $S$ , má tvar**

**$m\ddot{\vec{r}} = m\ddot{\vec{r}}' + m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' + m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + m\ddot{\vec{r}}(0') = 0$ , kde  $\vec{\omega}$  je vektor okamžité úhlové rychlosti otáčení  $S'$ , který se vzhledem k  $S$  otáčí kolem osy z konstantní úhlovou rychlostí  $\omega_0$  ( $\vec{r}(0') = 0$ ), se tato pohybová rovnice zjednoduší na  $\ddot{x}' - 2\omega_0 \dot{y}' - \omega_0^2 x' = 0$ ,  $\ddot{y}' + 2\omega_0 \dot{x}' - \omega_0^2 y' = 0$ ,  $\ddot{z}' = 0$ .**

vyjdeme tedy z rovnosti

$$m\ddot{\vec{r}} = m\ddot{\vec{r}}' + m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' + m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + m\ddot{\vec{r}}(0') = 0$$

kde  $\vec{\omega} = (0, 0, \omega_0)$  a  $\dot{\vec{\omega}} = (0, 0, 0)$ , takže rozepsáno po složkách dostaneme maticově

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}' + \begin{pmatrix} 0 & -2\omega_0 & 0 \\ 2\omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{\vec{r}}' + \begin{pmatrix} -\omega_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{r}' = 0$$

což je hledaná soustava diferenciálních rovnic

**1.3 Určete:**

**(a) obecné řešení soustavy diferenciálních rovnic z příkladu 1.2;**

**(b) parametrické rovnice trajektorie bezsilového bodu vypuštěného v čase  $t = 0$  s nulovou počáteční rychlostí z bodu  $x' = a$ ,  $y' = z' = 0$ .**

(a) řešení diferenciální rovnice z příkladu 1.2 zjednodušené vynecháním z-ové složky

$$\ddot{\vec{\eta}} + 2\omega_0 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \dot{\vec{\eta}} - \omega_0^2 \vec{\eta} = 0$$

budeme hledat ve tvaru

$$\vec{\eta} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} e^{\lambda t}$$

dosadíme tedy toto řešení do diferenciální rovnice

$$\begin{pmatrix} \lambda^2 - \omega_0^2 & -2\omega_0\lambda \\ 2\omega_0\lambda & \lambda^2 - \omega_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} e^{\lambda t} = 0$$

dostáváme tedy podmínku, že

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 - \omega_0^2 & -2\omega_0\lambda \\ 2\omega_0\lambda & \lambda^2 - \omega_0^2 \end{vmatrix} = 0$$

a tedy

$$(\lambda^2 - \omega_0^2)^2 + 4\omega_0^2\lambda^2 = (\lambda^2 + \omega_0^2)^2 = 0$$

s řešením

$$\lambda = \pm i\omega_0$$

které nám odhalí obecné řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$\vec{\eta} = \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} e^{i\omega_0 t} + \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix} e^{-i\omega_0 t}$$

$$\vec{\eta} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (X_1 + X_2) \cos \omega_0 t + i(X_2 - X_1) \sin \omega_0 t \\ (Y_1 + Y_2) \cos \omega_0 t + i(Y_2 - Y_1) \sin \omega_0 t \end{pmatrix}$$

(b) počáteční podmínky jsou

$$\vec{\eta}(0) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\vec{\eta}}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a tedy

$$\vec{\eta}(0) = \begin{pmatrix} X_1 + X_2 \\ Y_1 + Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{\eta}}(0) = \begin{pmatrix} i\omega_0(X_2 - X_1) \\ i\omega_0(Y_2 - Y_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a tak se nám podařilo vyřešit

$$X_1 = X_2 = \frac{a}{2}$$

$$Y_1 = Y_2 = 0$$

to jest

$$x'(t) = a \cos \omega_0 t$$

$$y'(t) = 0$$

$$z'(t) = 0$$

**1.4 Vypočtete celkový moment hybnosti  $\vec{L}^Q$  soustavy hmotných bodů v systému S, ale vzhledem k bodu  $Q \neq 0$ , který má v S pevnou polohu (tj.  $\dot{\vec{r}}(Q) = 0$ ). Udejte, pro které body Q je  $\vec{L}^Q = \vec{L}$ . Ukažte, že  $\vec{L}^Q = \vec{L}'$ , kde  $\vec{L}'$  je moment hybnosti v soustavě S' vzhledem k počátku  $O' \equiv Q$ , jestliže se S' neotáčí vůči S.**

použijme vztah

$$\vec{L} = \vec{L}^Q + \vec{r}(Q) \times \vec{P} + \vec{r}(Q) \times M \dot{\vec{r}}(Q) + t \dot{\vec{r}}(Q) \times \vec{P} - \dot{\vec{r}}(Q) \times M \vec{R}$$

do kterého dosadíme předpoklady a vyjádříme z něj

$$\vec{L}^Q = \vec{L} - \vec{r}(Q) \times \vec{P}$$

rovnost  $\vec{L} = \vec{L}^Q$  nastává právě když jsou vektory  $\vec{P}$  a  $\vec{r}(Q)$  kolineární.

## KAPITOLA 2: LAGRANGEŮV FORMALISMUS

**2.1 Napište Lagrangeovu funkci volného bezsilového hmotného bodu (a) v kartézských souřadnicích, (b) ve sférických souřadnicích, (c) v cylindrických souřadnicích**

(a)

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2)$$

(b) transformace (a) pomocí

$$x_1 = r \cos \varphi \sin \theta$$

$$x_2 = r \sin \varphi \sin \theta$$

$$x_3 = r \cos \theta$$

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + r^2 \dot{\theta}^2)$$

(c) transformace (a) pomocí

$$x_1 = r \cos \varphi$$

$$x_2 = r \sin \varphi$$

$$x_3 = x_3$$

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{x}_3^2)$$

**2.2 Napište Lagrangeovu funkci volného hmotného bodu, na který působí homogenní gravitační pole a elastická centrální izotropní síla.**

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - mgx_3 - \frac{1}{2} k (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

**2.3 Napište Lagrangeovu funkci volné nabitě částice v elektrostatickém poli.**

$$L = T - U = \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - q(\varphi - \sum_{i=1}^3 A_i \dot{x}_i)$$

**2.4 Najděte výraz pro obecnou hybnost a energii nabitě částice v elektromagnetickém poli z Lagrangeovy funkce  $L = \frac{1}{2} m v^2 - q(\varphi - \vec{v} \cdot \vec{A})$**

obecná hybnost

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = m \dot{x}_j - q A_j$$

$$\vec{p} = m \vec{v} + q \vec{A}$$

obecná energie

$$E = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} \dot{x}_j - L = \sum_j \frac{1}{2} m \dot{x}_j^2 + q \varphi$$

**2.5 Přesvědčete se, že vazba určená Pfaffovou formou**

$$\left[ x_2(x_1 - x_2)^2 - x_1 x_2^3 \right] dx_1 + \left[ x_1^3 x_2 - x_1(x_1 - x_2)^2 \right] dx_2 - x_1 x_2(x_1 - x_2)^2 dx_3 = 0$$

je ekvivalentní holonomní vazbě  $x_3 = \ln \left| \frac{x_1}{x_2} \right| + \frac{x_1 x_2}{x_1 - x_2} + C$

označíme-li pro přehlednost funkce u diferenciálů Pfaffovy formy  $a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3 = 0$ , můžeme podmínku ekvivalence vazeb zachytit jako

$$0 = \frac{\partial x_3}{\partial x_1} + \frac{a_1}{a_3}$$

$$0 = \frac{\partial x_3}{\partial x_2} + \frac{a_2}{a_3}$$

upravíme výrazy a dostaneme

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \ln \left| \frac{x_1}{x_2} \right| + \frac{x_1 x_2}{x_1 - x_2} + C \right) - \frac{x_2(x_1 - x_2)^2 - x_1 x_2^3}{x_1 x_2(x_1 - x_2)^2} = \frac{x_2}{x_1 x_2} + \frac{x_2(x_1 - x_2) - x_1 x_2}{(x_1 - x_2)^2} - \frac{1}{x_1} + \frac{x_2^2}{(x_1 - x_2)^2} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left( \ln \left| \frac{x_1}{x_2} \right| + \frac{x_1 x_2}{x_1 - x_2} + C \right) + \frac{x_1(x_1 - x_2)^2 - x_1^3 x_2}{x_1 x_2(x_1 - x_2)^2} = -\frac{x_2 x_1}{x_1 x_2^2} + \frac{x_1(x_1 - x_2) + x_1 x_2}{(x_1 - x_2)^2} + \frac{1}{x_2} - \frac{x_1^2}{(x_1 - x_2)^2} = 0$$

což bylo dokázati

**2.6 Napište Lagrangeovu funkci matematického kyvadla.**

použijeme polární souřadnice

$$L = T - U = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2 + mgr \cos \varphi$$

**2.7 Odvoďte pohybové rovnice matematického kyvadla s pružným závěsem tuhosti  $k$  a s rovnovážnou délkou  $r_0$  (bez zatížení). Zkoumejte limitu  $\frac{k}{m} \rightarrow \infty$  jako přechod k ideální vazbě.**

(pozn. osy volíme tak, že tíhové pole působí ve směru osy  $y$ )

pomocí

$$x = r(t) \cos \varphi(t)$$

$$y = r(t) \sin \varphi(t)$$

$$z = 0$$

Lagrangeovu funkci

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + mgy - \frac{1}{2} k (r - r_0)^2$$

transformujeme na

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + mgr \cos \varphi - \frac{1}{2} k (r - r_0)^2$$

Lagrangeovy pohybové rovnice

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = \frac{d}{dt} (m \dot{r}) - m r \dot{\varphi}^2 - mg \cos \varphi + k(r - r_0) = m \ddot{r} - m r \dot{\varphi}^2 - mg \cos \varphi + k(r - r_0) = 0$$



$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{d}{dt} (mr^2 \dot{\varphi}) - mgr \sin \varphi = 2mr\dot{r}\dot{\varphi} + mr^2\ddot{\varphi} - mgr \sin \varphi = 0$$

čímž jsme dostali soustavu diferenciálních rovnic

$$\frac{m}{k} (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - g \cos \varphi) + r - r_0 = 0$$

$$\ddot{\varphi} + 2\frac{\dot{r}}{r}\dot{\varphi} - \frac{g}{r} \sin \varphi = 0$$

a při limitě  $\frac{m}{k} \rightarrow \infty$  tj.  $\frac{m}{k} \rightarrow 0$  dostaneme z první rovnice  $r = r_0$  a druhá rovnice potom popisuje pohyb matematického kyvadla s pevným závěsem.

**2.8 Odvoďte pohybovou rovnici matematického kyvadla, jehož délka roste lineárně s časem  $r = r_0(1 + kt)$ , kde  $r_0$  a  $k$  jsou konstanty.**

(pozn. osy volíme tak, že tíhové pole působí ve směru osy  $y$ )  
pomocí

$$x = r_0(1 + kt) \sin \varphi(t)$$

$$y = r_0(1 + kt) \cos \varphi(t)$$

$$z = 0$$

Lagrangeovu funkci

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + mgy$$

transformujeme na

$$L = \frac{1}{2} m(r_0^2 k^2 + r_0^2 (1 + kt)^2 \dot{\varphi}^2) + mgr_0(1 + kt) \cos \varphi$$

a zjednodušíme vypuštěním konstant

$$L = \frac{1}{2} mr_0^2 (1 + kt)^2 \dot{\varphi}^2 + mgr_0(1 + kt) \cos \varphi$$

Lagrangeovy pohybové rovnice

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{d}{dt} (mr_0^2 (1 + kt)^2 \dot{\varphi}) + mgr_0(1 + kt) \sin \varphi = mr_0^2 2k(1 + kt)\dot{\varphi} + mr_0^2 (1 + kt)^2 \ddot{\varphi} + mgr_0(1 + kt) \sin \varphi = 0$$

čímž jsme dostali diferenciální rovnici

$$(1 + kt)\ddot{\varphi} + 2k\dot{\varphi} + \frac{g}{r_0} \sin \varphi = 0$$

**2.9 Napište Lagrangeovu funkci matematického kyvadla, jehož bod závěsu se pohybuje předepsaným způsobem v rovině kyvů (rheonomní vazba)**

(a) konstantní rychlostí po vodorovné přímce

(b) s konstantním zrychlením po vodorovné přímce

(c) kmitavým pohybem podle zákona  $a \cos \omega t$  po vodorovné přímce

**(d) kmitavým pohybem a  $\sin \omega t$  po svislé přímce**

**(e) s konstantní úhlovou rychlostí  $\omega$  po svislé kružnici**

v inerciální soustavě má Lagrangeova funkce tvar  $L = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 - U(\vec{r})$

po transformaci do obecně neinerciální soustavy vztahem  $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}(t)$ , kde  $\vec{V}(t)$  je rychlost, kterou se soustava pohybuje, a po vypuštění úplných časových derivací (viz teorie) dostaneme

$$L' = \frac{1}{2} m \vec{v}'^2 - m \vec{r}' \cdot \dot{\vec{V}} - U(\vec{r}')$$

poznamenejme ještě transformační vztahy do polárních souřadnic

$$x = r \sin \varphi(t)$$

$$y = r \cos \varphi(t)$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, 0)$$

$$\vec{v}^2 = r^2 \dot{\varphi}^2$$

$$(a) \quad \dot{\vec{V}}(t) = \frac{d}{dt}(V, 0, 0) = \vec{0}$$

$$L' = \frac{1}{2} m \vec{v}'^2 - m \vec{r}' \cdot \dot{\vec{V}} - U(\vec{r}') = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + mgr \cos \varphi$$

$$(b) \quad \dot{\vec{V}}(t) = \frac{d}{dt}(at, 0, 0) = (a, 0, 0)$$

$$L' = \frac{1}{2} m \vec{v}'^2 - m \vec{r}' \cdot \dot{\vec{V}} - U(\vec{r}') = \frac{1}{2} m (r^2 \dot{\varphi}^2) - mar \sin \varphi + mgr \cos \varphi$$

$$(c) \quad \dot{\vec{V}}(t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{d}{dt}(a \cos \omega t), 0, 0 \right) = (-\omega^2 a \cos \omega t, 0, 0)$$

$$L' = \frac{1}{2} m \vec{v}'^2 - m \vec{r}' \cdot \dot{\vec{V}} - U(\vec{r}') = \frac{1}{2} m (r^2 \dot{\varphi}^2) + \omega^2 mr \cos \omega t \sin \varphi + mgr \cos \varphi$$

$$(d) \quad \dot{\vec{V}}(t) = \frac{d}{dt} \left( 0, \frac{d}{dt}(a \sin \omega t), 0 \right) = (0, -\omega^2 a \sin \omega t, 0)$$

$$L' = \frac{1}{2} m \vec{v}'^2 - m \vec{r}' \cdot \dot{\vec{V}} - U(\vec{r}') = \frac{1}{2} m (r^2 \dot{\varphi}^2) + \omega^2 mr \sin \omega t \cos \varphi + mgr \cos \varphi$$

$$(e) \quad \dot{\vec{V}}(t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{d}{dt}(a \cos \omega t), \frac{d}{dt}(a \sin \omega t), 0 \right) = (-\omega^2 a \cos \omega t, -\omega^2 a \sin \omega t, 0)$$

$$L' = \frac{1}{2} m \vec{v}'^2 - m \vec{r}' \cdot \dot{\vec{V}} - U(\vec{r}') = \frac{1}{2} m (r^2 \dot{\varphi}^2) + \omega^2 mr \sin(\omega t + \varphi) + mgr \cos \varphi$$

**2.11 Hmotný bod se pohybuje působením tíže po svislé kružnici poloměru  $a$ . Byl vypuštěn s nulovou počáteční rychlostí z nejvyššího bodu kružnice. Určete polohu hmotného bodu v libovolném okamžiku, tj. určete  $\varphi = \varphi(t)$ .**

počátek kartézského souřadného systému umístíme do středu kružnice, kladný směr osy  $y$  volíme proti směru tíhového pole a vzhledem k vazbě na kružnici volíme transformaci

$$x = a \sin \varphi$$

$$y = a \cos \varphi$$

$$z = 0$$

sestavíme Lagrangeovu funkci

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy = \frac{1}{2} ma^2 \dot{\varphi}^2 - mga \cos \varphi$$

z obecná energie

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \dot{\varphi} - L = \frac{1}{2} ma^2 \dot{\varphi}^2 + mga \cos \varphi$$

zjistíme E neb víme, že v čase  $t = 0$ , kterému odpovídá  $\varphi = 0$ , bylo těleso vypuštěno s nulovou počáteční rychlostí, tedy

$$E = 0 + mga \cos 0 = mga$$

pomocí zákona zachování energie odvodíme pohybové rovnice

$$mga = \frac{1}{2} ma^2 \dot{\varphi}^2 + mga \cos \varphi$$

$$2 \frac{g}{a} (1 - \cos \varphi) = \dot{\varphi}^2$$

$$2 \frac{g}{a} (1 - \cos^2 \frac{\varphi}{2} + \sin^2 \frac{\varphi}{2}) = \dot{\varphi}^2$$

$$2 \sqrt{\frac{g}{a}} \sin \frac{\varphi}{2} = \dot{\varphi}$$

a tuto rovnici budeme integrovat

$$2 \sqrt{\frac{g}{a}} t + 2\delta = \int \frac{d\varphi}{\sin \frac{\varphi}{2}} = \int \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}} d\varphi = \left\{ z = \cos \frac{\varphi}{2} \right\} = -2 \int \frac{dz}{1-z^2} = -2 \operatorname{arctgh}(z)$$

a tedy výsledek můžeme napsat jako

$$\operatorname{tgh} \left( \sqrt{\frac{g}{a}} t + \delta \right) = -\cos \frac{\varphi}{2}$$

poznámka k výsledku ve skriptu: volbou úhlu  $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}$  dostaneme

$$-\cos \frac{\varphi}{2} = -\cos \left( -\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right) = -\cos \left( \frac{\pi}{2} \right) \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) + \sin \left( -\frac{\pi}{2} \right) \sin \left( -\frac{\theta}{2} \right) = \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) = \operatorname{tgh} \left( \sqrt{\frac{g}{a}} t + \delta \right)$$

**2.12 Ve vodorovné rovině může klouzat bez tření těleso hmotnosti  $m_1$ . Je spojeno nehmotnou tyčí délky  $r$  s tělesem hmotnosti  $m_2$ , které koná působením tíže kmitavý pohyb ve svislé rovině. Dokažte, že těleso  $m_2$  se pohybuje po elipse a vypočítejte dobu kmitu  $T$  tohoto eliptického kyvadla pro malé amplitudy.**

kartézský souřadný systém zvolíme tak, že kladný směr osy  $y$  je ve směru tíhového pole vazby:

$$z_1 = z_2 = y_1 = 0$$

$$(x_2 - x_1)^2 + y_2^2 = r^2$$

zvolíme nezávislé souřadnice podle vztahů

$$y_2 = r \cos \varphi$$

$$x_2 = x_1 + r \sin \varphi$$

$$\dot{y}_2 = -r \sin \varphi \dot{\varphi}$$

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_1 + r \cos \varphi \dot{\varphi}$$

potom Lagrangeova funkce

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + m_2 g y_2$$

bude mít v těchto nových souřadnicích tvar

$$L = \frac{1}{2} \dot{x}_1^2 (m_1 + m_2) + m_2 \dot{x}_1 r \cos \varphi \dot{\varphi} + \frac{1}{2} m_2 r^2 \dot{\varphi}^2 + m_2 g r \cos \varphi$$

abychom mohli při malých výchylkách určit periodu kmitů, aproximujeme Lagrangeovu funkci

$$\cos \varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2} \approx 1$$

$$\tilde{L} = \frac{1}{2} \dot{x}_1^2 (m_1 + m_2) + m_2 \dot{x}_1 r \dot{\varphi} + \frac{1}{2} m_2 r^2 \dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2} m_2 g r \varphi^2$$

potom budou mít Lagrangeovy rovnice mít tvar

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \varphi} = \frac{d}{dt} (m_2 r \dot{x}_1 + m_2 r^2 \dot{\varphi}) + m_2 g r \varphi = m_2 r \ddot{x}_1 + m_2 r^2 \ddot{\varphi} + m_2 g r \varphi = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x_1} = \frac{d}{dt} ((m_1 + m_2) \dot{x}_1 + m_2 r \dot{\varphi}) = (m_1 + m_2) \ddot{x}_1 + m_2 r \ddot{\varphi} = 0$$

a dostali jsme soustavu diferenciálních rovnic

$$\ddot{x}_1 + r \ddot{\varphi} + g \varphi = 0$$

$$\ddot{x}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} r \ddot{\varphi} = 0$$

odkud po úpravě dostaneme rovnici

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{r} \frac{m_1 + m_2}{m_1} \varphi = 0$$

která představuje rovnici harmonického  $\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0$  oscilátoru s úhlovou frekvencí

$\omega = \sqrt{\frac{g}{r} \frac{m_1 + m_2}{m_1}}$  a protože  $\omega = 2\pi v = \frac{2\pi}{T}$  dostaneme

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r}{g} \frac{m_1}{m_1 + m_2}}$$

nyní ještě stačí dokázat, že se  $m_2$  pohybuje po elipse - zde je výhodné se vrátit k neaproximované Lagrangeově funkci a využít, že

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt} ((m_1 + m_2)\dot{x}_1 + m_2 r \cos \varphi \dot{\varphi}) = 0$$

je integrál pohybu a tedy

$$(m_1 + m_2) \int dx_1 + m_2 r \int \cos \varphi d\varphi = C_1 \int dt + C_2$$

$$(m_1 + m_2)x_1 + m_2 r \sin \varphi = C_1 t + C_2$$

a protože chceme trajektorii hmotného bodu  $m_2$ , dosadíme za  $x_1 = x_2 - r \sin \varphi$

$$(m_1 + m_2)x_2 - m_1 r \sin \varphi = C_1 t + C_2$$

nyní eliminujeme  $\varphi$  - za tím účelem si vhodně vyjádříme předchozí rovnice

$$\frac{(m_1 + m_2)x_2 - C_1 t - C_2}{m_1 r} = \sin \varphi$$

$$\frac{y_2}{r} = \cos \varphi$$

které umocníme na druhou a sečteme, čímž dostaneme hledanou rovnici elipsy

$$\frac{y_2^2}{r^2} + \frac{((m_1 + m_2)x_2 - C_1 t - C_2)^2}{m_1^2 r^2} = 1$$

**2.17 Přesvědčete se, že funkce  $F_1(x, \dot{x}, t) = \dot{x} + gt$  a  $F_2(x, \dot{x}, t) = \dot{x}^2 + 2gx$  jsou první integrály rovnice  $\ddot{x} + g = 0$ , kde  $g$  je konstanta. Vypočítejte pomocí nich  $x = x(t)$ .**

$F$  je integrál rovnice  $\ddot{x} + g = 0$  právě když platí  $\frac{d}{dt} F = 0$  a to použijeme:

$$\frac{d}{dt} F_1(x, \dot{x}, t) = \ddot{x} + g = 0$$

$$\frac{d}{dt} F_2(x, \dot{x}, t) = 2\dot{x}\ddot{x} + 2g\dot{x} = 2\dot{x}(\ddot{x} + g) = 0$$

což bylo dokázati

$x = x(t)$  vypočítáme pomocí těchto integrálů tak, že z první funkce vyjádříme  $\dot{x} = F_1 - gt$  a dosadíme do druhé  $F_2 = (F_1 - gt)^2 + 2gx$  a z této jednoduché rovnice nám vyjde, že

$$x(t) = \frac{F_2 - (F_1 - gt)^2}{2g} = -\frac{1}{2}gt^2 + F_1 t + \frac{F_2 - F_1}{2g}$$

**2.18 Přesvědčete se, že funkce  $F_1(x, \dot{x}, t) = -\omega t + \arctg\left(\frac{\omega x}{\dot{x}}\right)$  a  $F_2(x, \dot{x}, t) = \frac{\dot{x}^2}{\omega^2} + x^2$  jsou první integrály rovnice  $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ , kde  $\omega$  je kladná konstanta. Vypočítejte pomocí nich  $x = x(t)$**

$$\frac{d}{dt} F_1 = -\omega + \frac{\dot{x}^2}{\dot{x}^2 + \omega^2 x^2} \frac{\dot{x}^2 - x\ddot{x}}{\dot{x}^2} \omega = \omega \frac{-(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2) + \dot{x}^2 - x\ddot{x}}{\dot{x}^2 + \omega^2 x^2} = -\omega x \frac{\ddot{x} + \omega^2 x}{\dot{x}^2 + \omega^2 x^2} = 0$$

$$\frac{d}{dt} F_2 = \frac{2\dot{x}\ddot{x}}{\omega^2} + 2x\ddot{x} = 2\dot{x} \frac{\ddot{x} + \omega^2 x}{\omega^2} = 0$$

což bylo dokázati

a nyní odvodíme  $x = x(t)$  tak, že z první funkce vyjádříme

$$\frac{\dot{x}}{\omega} = \frac{x}{\operatorname{tg}(F_1 + \omega t)}$$

a dosadíme do druhé

$$F_2 = \frac{x^2}{\operatorname{tg}^2(F_1 + \omega t)} + x^2 = x^2 \frac{1 + \operatorname{tg}^2(F_1 + \omega t)}{\operatorname{tg}^2(F_1 + \omega t)} = x^2 \frac{1}{\sin^2(F_1 + \omega t)}$$

čímž po úpravě dostaneme

$$x(t) = \sqrt{F_2} \sin(F_1 + \omega t)$$

**2.22 Vypočítejte složky vektorů dostředivého, Eulerova a Coriolisova zrychlení v neinerciální soustavě  $S'$ , která se otáčí kolem osy  $z'$  s předepsanou časovou závislostí úhlu otočení  $\varphi = \varphi(t)$ .**

vektor otáčení okolo osy  $z$  :

$$\vec{\Omega} = (0, 0, \dot{\varphi}(t))$$

$$\dot{\vec{\Omega}} = (0, 0, \ddot{\varphi}(t))$$

$$\text{dostředivé zrychlení } \vec{a}_d = -\vec{\Omega} \times (\vec{r}' \times \vec{\Omega}) = (-\dot{\varphi}^2 x', -\dot{\varphi}^2 y', 0)$$

$$\text{Eulerovo zrychlení } \vec{a}_E = -\vec{r}' \times \dot{\vec{\Omega}} = (-\ddot{\varphi} y', -\ddot{\varphi} x', 0)$$

$$\text{Coriolisovo zrychlení } \vec{a}_C = -2\dot{\vec{r}}' \times \vec{\Omega} = (-2\dot{\varphi} \dot{y}', -2\dot{\varphi} \dot{x}', 0)$$

**2.23 Hmotný bod je vázán na polopřímku vycházející z počátku  $O$  inerciálního systému  $S$  souřadnic  $x_1, x_2, x_3$ . Polopřímka leží v rovině  $x_1, x_2$  a otáčí se vůči  $S$  s konstantní úhlovou rychlostí  $\Omega$ . Hmotný bod o hmotnosti  $m$  je po přímce volně pohyblivý a nepůsobí na něj žádná skutečná síla. Pomocí Lagrangeovy funkce odvoďte jeho pohybovou rovnici a integrujte ji.**

vazby a následné transformace tedy jsou

$$\varphi = \Omega t + \varphi_0$$

$$x_1 = r \cos \varphi$$

$$x_2 = r \sin \varphi$$

$$x_3 = 0$$

sestavíme Lagrangeovu funkci

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \Omega^2)$$

a řešíme Lagrangeovu rovnici

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = \frac{d}{dt} (m\dot{r}) - m\Omega^2 r = m\ddot{r} - m\Omega^2 r = 0$$

dostali jsme diferenciální rovnici

$$\ddot{\mathbf{r}} - \Omega^2 \mathbf{r} = 0$$

jejímž řešení je

$$\mathbf{r}(t) = A \cosh(\Omega t + \varphi_0)$$

**2.24 Odvoďte rovnici pohybu hmotného bodu po kružnici poloměru  $R$ , která se otáčí konstantní úhlovou rychlostí  $\Omega$  kolem svislé osy, ležící v rovině kružnice. Vzdálenost středu kružnice od osy otáčení je  $a$ . Soustava je v homogenním tíhovém poli. Při  $a = 0$  diskutujte rovnovážné polohy bodu v závislosti na  $\Omega$ .**

počátek naší inerciální soustavy souřadné umístíme tak, že osa  $z$  je totožná s osou otáčení a kladný směr směřuje proti tíhovému poli, a zbylé dvě osy tvoří rovinu, ve které leží otáčející se střed kružnice

napišme Lagrangeovu funkci této soustavy

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz$$

a vazby, kterým se soustava podřizuje

$$(x-a)^2 + z^2 = R^2$$

vzhledem k těmto vazbám i ke konstantní rychlosti otáčení kolem svislé osy zavedme nové obecné souřadnice

$$x = (a + R \sin \varphi) \cos \Omega t$$

$$y = (a + R \sin \varphi) \sin \Omega t$$

$$z = R \cos \varphi$$

čímž Lagrangeova funkce dostane novou podobu

$$L = \frac{1}{2} m(R^2 \dot{\varphi}^2 + 2\Omega^2 a R \sin \varphi + \Omega^2 R^2 \sin^2 \varphi) - mgR \cos \varphi$$

a přistoupíme k napsání Lagrangeových rovnic II. druhu

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = mR^2 \ddot{\varphi} - m\Omega^2 a R \cos \varphi - \Omega^2 R^2 \sin \varphi \cos \varphi - mgR \sin \varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi} - \Omega^2 \sin \varphi \cos \varphi - \frac{g}{R} \sin \varphi - \frac{\Omega^2 a}{R} \cos \varphi = 0$$

a nyní položíme  $a = 0$  a hledejme rovnovážné body z podmínky  $\ddot{\varphi} = 0$

$$-\Omega^2 \sin \varphi \cos \varphi - \frac{g}{R} \sin \varphi = 0$$

$$\sin \varphi \left( \cos \varphi + \frac{g}{R\Omega^2} \right) = 0$$

odkud dostáváme rovnovážné body jako

$$\varphi \in \left\{ \pi \cdot \mathbb{Z}, -\frac{g}{R\Omega^2} \right\}$$

### KAPITOLA 3: ZÁKLADNÍ ÚLOHY MECHANIKY

**3.1 Řešte rovnici  $\ddot{x} = k \sin \omega t$ , kde  $k$  a  $\omega$  jsou kladné konstanty s počátečními podmínkami**

**$x(t_0) = x_0 = -\frac{k}{\omega^2} \sin \omega t_0$  a  $\dot{x}(t_0) = v_0 = -\frac{k}{\omega} \cos \omega t_0$ . (Vynucené kmity)**

rovnici

$$\ddot{x} = k \sin \omega t$$

dvojnásobně separujeme a integrujeme na

$$x(t) = k \iint \sin \omega t \, dt \, dt = -\frac{k}{\omega^2} \sin \omega t + v_0 t + x_0$$

z počátečních podmínek dostaneme  $x_0 = 0$  a  $v_0 = 0$  a tedy výsledkem je

$$x(t) = -\frac{k}{\omega^2} \sin \omega t$$

**3.2 Řešte rovnici  $\ddot{x} = -k\dot{x}$ , kde  $k$  je kladná konstanta, s počátečními podmínkami  $x(0) = x_0$ ,  $\dot{x}(0) = v_0$ . (Pohyb s odporem úměrným rychlosti) Znázorněte závislost  $x=x(t)$  graficky !**

v prvním kroku separací vyřešíme diferenciální rovnici v  $\dot{x}$

$$\frac{\ddot{x}}{\dot{x}} = -k \sim \int \frac{1}{\dot{x}} d\dot{x} = -kt \sim \dot{x} = C_1 e^{-kt}$$

po aplikaci počátečních podmínek:

$$\dot{x}(0) = C_1 e^0 = C_1 = v_0$$

dostaneme

$$\dot{x}(t) = v_0 e^{-kt}$$

v druhém kroku tento výraz separujeme na

$$dx(t) = v_0 e^{-kt} dt$$

a integrujeme obě strany, čímž dostaneme

$$x(t) = -\frac{v_0}{k} e^{-kt} + C_2$$

a obdobně jako v prvním kroku aplikujeme počáteční podmínky

$$x(0) = -\frac{v_0}{k} e^{-k \cdot 0} + C_2 = x_0$$

$$\text{odkud } C_2 = x_0 + \frac{v_0}{k}$$

výsledek je

$$x(t) = \frac{v_0}{k} (1 - e^{-kt}) + x_0$$



**3.3 Řešte rovnici  $\ddot{x} = -\omega^2 x$ , kde  $\omega$  je kladná konstanta (harmonický pohyb). Vyjádřete amplitudu  $A$  a počáteční fázi  $\beta$  kmitů pomocí počátečních hodnot  $x(t_0) = x_0$  a  $\dot{x}(t_0) = v_0$ .**

řešení rovnice  $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$  hledáme ve tvaru

$$x(t) = A \cos(\omega t - \omega t_0 + \beta)$$

$$\dot{x}(t) = -\omega A \sin(\omega t - \omega t_0 + \beta)$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t - \omega t_0 + \beta) = -\omega^2 x(t)$$

po dosazení do  $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$  dostaneme  $-\omega^2 x(t) + \omega^2 x(t) = 0$  čímž jsme našli obecné řešení

z počátečních podmínek

$$x(t_0) = x_0 = A \cos(\omega t_0 - \omega t_0 + \beta) = A \cos \beta$$

$$v(t_0) = v_0 = -\omega A \sin(\omega t_0 - \omega t_0 + \beta) = -\omega A \sin \beta$$

obdržíme soustavu dvou rovnic pro  $A$  a  $\beta$ , z které získáme  $A$  tak, že první z rovnic vynásobíme  $\omega$ , obě pak umocníme na druhou a sečteme

$$\omega^2 x_0^2 + v_0^2 = \omega^2 A^2$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$$

neznámou  $\beta$  dostaneme tak, že zkoumáme poměr  $-\frac{\omega x_0}{v_0}$

$$-\frac{\omega x_0}{v_0} = \frac{A \cos \beta}{A \sin \beta} = \cot \beta$$

$$\beta = \arctan\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right)$$

**3.4 Najděte obecné řešení rovnice  $\ddot{x} = -\omega_0^2 x - 2\delta \dot{x}$ , kde  $\omega_0, \delta$  jsou kladné konstanty (tlumený harmonický oscilátor)**

z charakteristické rovnice diferenciální rovnice  $\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

$$\lambda^2 + 2\delta \lambda + \omega_0^2 = 0$$

vypočteme

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2\delta \pm \sqrt{4\delta^2 - \omega_0^2}}{2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

a tudíž řešení pro tlumený harmonický oscilátor je

$$x(t) = C_1 e^{(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t}$$

**3.5 Najděte obecné řešení rovnice  $\ddot{z} = -\omega_0^2 z - 2\delta \dot{z} + B \sin \Omega t$ , kde  $\omega_0, \delta$  jsou kladné konstanty (tlumený harmonický oscilátor)**

vzhledem k výsledku příkladu 3.4 předpokládáme řešení rovnice  $\ddot{z} + 2\delta \dot{z} + \omega_0^2 z = B \sin \Omega t$  ve tvaru

$$z(t) = x(t) + \xi(t)$$

kde

$x(t) = C_1 e^{(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t}$  je obecné řešení diferenciální rovnice bez pravé strany

$\xi(t)$  je nějaké řešení diferenciální rovnice s pravou stranou (partikulární řešení)

po dosazení  $z(t)$  do  $\ddot{z} + 2\delta\dot{z} + \omega_0^2 z - B \sin \Omega t = 0$  dostaneme

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x + \ddot{\xi} + 2\delta\dot{\xi} + \omega_0^2 \xi - B \sin \Omega t = 0$$

protože  $x(t)$  je řešením rovnice  $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ , dostaneme opět stejnou diferenciální rovnici

$$\ddot{\xi} + 2\delta\dot{\xi} + \omega_0^2 \xi - B \sin \Omega t = 0$$

hledáme řešení ve tvaru

$$\xi(t) = A_1 \cos \Omega t + A_2 \sin \Omega t$$

$$\dot{\xi}(t) = -\Omega A_1 \sin \Omega t + \Omega A_2 \cos \Omega t$$

$$\ddot{\xi}(t) = -\Omega^2 \xi(t)$$

po dosazení upravujeme

$$(\omega_0^2 - \Omega^2)(A_1 \cos \Omega t + A_2 \sin \Omega t) - 2\delta A_1 \Omega \sin \Omega t + 2\delta A_2 \Omega \cos \Omega t - B \sin \Omega t = 0$$

$$[(\omega_0^2 - \Omega^2)A_1 + 2\delta A_2 \Omega] \cos \Omega t + [(\omega_0^2 - \Omega^2)A_2 - 2\delta A_1 \Omega - B] \sin \Omega t = 0$$

odkud získáme cennou soustavu rovnic

$$(\omega_0^2 - \Omega^2)A_1 + 2\delta A_2 \Omega = 0$$

$$(\omega_0^2 - \Omega^2)A_2 - 2\delta A_1 \Omega - B = 0$$

odkud

$$A_1 = -\frac{2\delta\Omega}{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\delta\Omega)^2} B$$

$$A_2 = -\frac{\Omega^2 - \omega_0^2}{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\delta\Omega)^2} B$$

řešením je tedy

$$z(t) = C_1 e^{(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} - \frac{B}{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\delta\Omega)^2} (2\delta\Omega \cos \Omega t + (\Omega^2 - \omega_0^2) \sin \Omega t)$$

### 3.6 Napište Lagrangeovu funkci hmotného bodu vázaného na kružnici o poloměru $R$ a integrujte pohybovou rovnici.

vazby:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$x(t) = R \cos \varphi$$

$$y(t) = R \sin \varphi$$

$$z(t) = 0$$

derivace

$$\dot{x}(t) = -\dot{\varphi}R \sin \varphi$$

$$\dot{y}(t) = \dot{\varphi}R \cos \varphi$$

$$\dot{z}(t) = 0$$

Lagrangeova funkce

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^2$$

pozn. ke stejnému výsledku můžeme dojít vyjádřením Lagrangeovy funkce v obecných souřadnicích

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{R}^2 + R^2\dot{\varphi}^2) = \frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^2$$

z Lagrangeovy pohybové rovnice dostaneme

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{d}{dt}(mR^2\dot{\varphi}) = 0$$

a máme integrál pohybu, který nám rovnou umožní vyjádřit si

$$\dot{\varphi} = \frac{C_1}{mR^2}$$

odkud integrací

$$\varphi(t) = \frac{C_1}{mR^2}t + C_2 = \omega t + \varphi_0$$

### 3.7 Řešte pohybovou rovnici volného pádu s odporem vzduchu úměrným rychlosti.

$m\ddot{x} + 2\delta\dot{x} = mg$ , kde  $\delta > 0$ , upravíme na tvar diferenciální rovnice  $\ddot{x} + k\dot{x} = g$ , kde  $k = \frac{2\delta}{m}$

obecné řešení diferenciální rovnice bez pravé strany  $\ddot{x} + k\dot{x} = 0$  (viz příklad 3.2) je

$$x(t) = K_1 e^{-kt} + K_2$$

řešení diferenciální rovnice s pravou stranou  $\ddot{x} + k\dot{x} = g$  (partikulární řešení) nalezneme metodou variace konstant

$$\dot{x}(t) = -kK_1 e^{-kt} + \dot{K}_1 e^{-kt} + \dot{K}_2 = -kK_1 e^{-kt}$$

kde klademe

$$\dot{K}_1 e^{-kt} + \dot{K}_2 = 0$$

dále pak

$$\ddot{x}(t) = k^2 K_1 e^{-kt} - \dot{K}_1 k e^{-kt}$$

dosadíme do  $\ddot{x} + k\dot{x} = g$

$$k^2 K_1 e^{-kt} - \dot{K}_1 k e^{-kt} - k^2 K_1 e^{-kt} = -\dot{K}_1 k e^{-kt} = g$$

odkud spočítáme

$$K_1 = -\frac{g}{k} \int e^{kt} dt + C_1 = -\frac{g}{k^2} e^{kt} + C_1$$

a z první rovnice  $\dot{K}_1 e^{-kt} + \dot{K}_2 = 0$  dopočítáme

$$K_2 = -\int \dot{K}_1 e^{-kt} dt + C_2 = \frac{g}{k} t + C_2$$

řešení je tedy

$$x(t) = K_1 e^{-kt} + K_2 = -\frac{g}{k^2} + C_1 e^{-kt} + \frac{g}{k} t + C_2$$

budeme-li ovšem nárokovat počáteční podmínky  $x(0) = x_0$  et  $\dot{x}(0) = v_0$  dostaneme

$$x(0) = -\frac{g}{k^2} + C_1 + C_2 = x_0$$

$$\dot{x}(0) = -kC_1 + \frac{g}{k} = v_0$$

odkud

$$C_1 = \frac{g}{k^2} - \frac{v_0}{k}$$

$$C_2 = x_0 + \frac{g}{k^2} - \frac{g}{k^2} + \frac{v_0}{k} = x_0 + \frac{v_0}{k}$$

celkem dostaneme řešení

$$x(t) = \left(\frac{g}{k^2} - \frac{v_0}{k}\right)e^{-kt} + \frac{g}{k} t + x_0 + \frac{v_0}{k} - \frac{g}{k^2}$$

a dosadíme ještě  $k = \frac{2\delta}{m}$

$$x(t) = \left(\frac{gm^2}{4\delta^2} - \frac{mv_0}{2\delta}\right)e^{-\frac{2\delta}{m}t} + \frac{mg}{2\delta} t + x_0 + \frac{mv_0}{2\delta} - \frac{m^2 g}{4\delta^2}$$

**3.8 Hmotný bod  $m$  pod vlivem tíže, zavěšený na pružině tuhosti  $k$ , je vázán na parabolou  $z = \frac{x^2}{4a}$ , v**

**jejímž ohnisku  $x = 0$ ,  $z = a$  je pružina uchycena. Zaveďte obecnou souřadnici, sestavte Lagrangeovu funkci a řešte Lagrangeovy rovnice.**

**1-sestavení Lagrangeovy funkce**

Lagrangeova funkce

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz - \frac{1}{2}k(r - r_0)^2$$

vazby jsou

$$z = \frac{x^2}{4a}, y = 0, r^2 = (z - a)^2 + x^2$$

volíme obecné souřadnice takto

$$x = r \sin \varphi$$

$$z = a - r \cos \varphi$$

a použijeme vazby k eliminaci  $r$

$$z = \frac{x^2}{4a} = a - r \cos \varphi = \frac{(r \sin \varphi)^2}{4a}$$

převědeme rovnici kvadratickou v  $r$

$$\sin^2(\varphi) r^2 + 4a \cos(\varphi) r - 4a^2 = 0$$

kterou lehce vyřešíme a z kořenů

$$r_{1,2} = \frac{-2a \cos \varphi \pm 2a}{\sin^2 \varphi} = \pm 2a \frac{1 \mp \cos \varphi}{1 - \cos^2 \varphi} = \pm 2a \frac{1}{1 \pm \cos \varphi}$$

zvolíme ten kladný

$$r = 2a \frac{1}{1 + \cos \varphi}$$

vyčíslíme nyní souřadnice  $x$  a  $z$  pouze pomocí  $\varphi$

$$x = 2a \frac{\sin \varphi}{1 + \cos \varphi}$$

$$z = \frac{4a^2}{4a} \frac{\sin^2 \varphi}{(1 + \cos \varphi)^2} = a \frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi}$$

jejichž časové derivace jsou

$$\dot{x} = 2a \frac{\cos \varphi (1 + \cos \varphi) + \sin^2 \varphi}{(1 + \cos \varphi)^2} \dot{\varphi} = 2a \frac{1}{1 + \cos \varphi} \dot{\varphi}$$

$$\dot{z} = \frac{x}{2a} \dot{x}$$

provedeme transformaci Lagrangeovy funkce na jedinou souřadnici  $\varphi$

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz - \frac{1}{2} k (r - r_0)^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \left( 1 + \frac{x^2}{4a^2} \right) - mgz - \frac{1}{2} k (r - r_0)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{\varphi}^2 4a^2 \frac{1}{(1 + \cos \varphi)^2} \left( 1 + \frac{\sin^2 \varphi}{(1 + \cos \varphi)^2} \right) - mga \frac{\sin^2 \varphi}{(1 + \cos \varphi)^2} - \frac{1}{2} k \left( \frac{2a}{1 + \cos \varphi} - r_0 \right)^2$$

a po úpravách goniometrických funkcí

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\varphi}^2 8a^2 \frac{1}{(1 + \cos \varphi)^3} - mga \frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi} - \frac{1}{2} k \frac{(2a - r_0)^2 - 2(2a - r_0)r_0 \cos \varphi + r_0^2 \cos^2 \varphi}{(1 + \cos \varphi)^2}$$

## 2-řešení Lagrangeových rovnic

kvůli řešitelnosti je potřeba provést aproximaci malých kmitů

$$\frac{1}{1 + \cos \varphi} \approx \frac{1}{2}$$

$$\cos \varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2!}$$

$$\cos^2 \varphi \approx 1 - \varphi^2$$

potom Lagrangeova funkce, kde při úpravách vypustíme přebytečné konstanty, má mnohem jednodušší tvar

$$L = \frac{1}{2} m a^2 \dot{\varphi}^2 - m g a \frac{\varphi^2}{4} - \frac{1}{2} k \frac{(2a - r_0) r_0 \varphi^2 - r_0^2 \varphi^2}{4} = \frac{1}{2} m \dot{\varphi}^2 a^2 - \frac{m g a - k(a r_0 - r_0^2)}{4} \varphi^2$$

Lagrangeova pohybová rovnice druhého druhu

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = m a^2 \ddot{\varphi} + \frac{m g a - k(a r_0 - r_0^2)}{2} \varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{m g a - k(a r_0 - r_0^2)}{2 m a^2} \varphi = 0$$

což je rovnice harmonického oscilátoru  $\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0$ , kde  $\omega^2 = \frac{m g a - k(a r_0 - r_0^2)}{2 m a^2}$

aproximovaným řešením této pohybové rovnice je tedy

$$\varphi(t) = A \cos\left(\frac{m g a - k(a r_0 - r_0^2)}{2 m a^2} t\right) + B \sin\left(\frac{m g a - k(a r_0 - r_0^2)}{2 m a^2} t\right)$$

**3.9 Určete periodu kmitů v závislosti na energii,  $T=T(E)$ , při jednorozměrném pohybu částice hmotnosti  $m$  v polích s potenciálními energiemi:**

a)  $U(x) = A|x|^n$

b)  $U(x) = -\frac{U_0}{\cosh^2 \alpha x}$ ,  $-U_0 < E < 0$

c)  $U(x) = U_0 \operatorname{tg}^2 \alpha x$

nejprve si připomeneme odvození obecného vyjádření periody  $T=T(E)$ , kdy vyjdeme od zákona zachování energie

$$E = T + U = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + U(x) = \text{konst}$$

odkud vyjádříme

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} (E - U)}$$

a vynásobíme-li tuto rovnici diferenciálem  $dt$ , vydělíme pravou stranou a zintegrujeme, dostaneme

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - U}} + t_0$$

pro určení periody je nutné znát tzv. body obratu, které získáme z podmínky nulovosti kinetické energie

$$\dot{x}^2 = \frac{2}{m} (E - U) = 0$$

a tedy vyšetřujeme, pro jaká  $x$  nastává  $E = U$

požadovanou periodu v závislosti na  $E$  dostaneme jako dvojnásobek určitého integrálu času mezi body obratu  $x_1, x_2$ :

$$T = T(E) = \sqrt{2m} \int_{x_1}^{x_2} (E - U)^{-1/2} dx$$

**případ za a)**

potenciál je  $U(x) = A|x|^n$

body obratu získáme z rovnice  $E = U = A|x|^n$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt[n]{\frac{E}{A}}$$

počítáme tedy určitý integrál

$$T(E) = \sqrt{2m} \int_{x_1}^{x_2} (E - A|x|^n)^{-1/2} dx = 2\sqrt{2m} \int_0^{\sqrt[n]{E/A}} (E - A|x|^n)^{-1/2} dx = \left\{ y = \frac{A}{E} x^n \right\} = \frac{2}{n} \sqrt{\frac{2m}{E}} \sqrt[n]{\frac{E}{A}} \int_0^1 y^{\frac{1}{n}-1} (1-y)^{-\frac{1}{2}} dy$$

$$T(E) = \frac{2}{n} \sqrt{\frac{2m\pi}{E}} \sqrt[n]{\frac{E}{A}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\right)}$$

**případ za b)**

potenciál je  $U(x) = -\frac{U_0}{\cosh^2 \alpha x}$  kde  $-U_0 < E < 0$

body obratu získáme z rovnice  $E = U = -\frac{U_0}{\cosh^2 \alpha x}$

$$\sinh^2 \alpha x = \cosh^2 \alpha - 1 = -\frac{U_0}{E} - 1 = -\frac{U_0 + E}{E}$$

$$\sinh \alpha x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{U_0 + E}{E}}$$

poznamenejme jen, že vzhledem k podmínce  $-U_0 < E < 0$  má výše uvedený výraz smysl a důvod, proč ho ponecháváme právě v tomto vyjádření vyplne z následujícího výpočtu určitého integrálu

$$\begin{aligned} T(E) &= \sqrt{2m} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\cosh \alpha x}{\sqrt{E \cosh^2 \alpha x + U_0}} dx = \sqrt{\frac{2m}{U_0 + E}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\cosh \alpha x}{\sqrt{\frac{E}{U_0 + E} \sinh^2 \alpha x + 1}} dx = \left\{ y = \sqrt{\frac{-E}{E + U_0}} \sinh \alpha \right\} = \\ &= \frac{\sqrt{2m}}{\alpha \sqrt{-E}} \int_{-1}^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{\sqrt{2m}}{\alpha \sqrt{-E}} [\arcsin y]_{-1}^1 = \frac{\pi}{\alpha} \sqrt{\frac{2m}{-E}} \\ T(E) &= \frac{\pi}{\alpha} \sqrt{\frac{2m}{-E}} \end{aligned}$$

**případ za c)**

potenciál je  $U(x) = U_0 \operatorname{tg}^2 \alpha x$

body obratu získáme z rovnice  $E = U = U_0 \operatorname{tg}^2 \alpha x$

$$\operatorname{tg} \alpha x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{E}{U_0}}$$

výpočet určitého integrálu

$$T(E) = \sqrt{2m} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{E - U_0 \tan^2 \alpha x}} dx = \sqrt{\frac{2m}{E}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\cos \alpha x}{\sqrt{1 - (E+U_0)/E \sin^2 \alpha x}} dx = \left\{ y = \sqrt{\frac{E+U_0}{E}} \sin \alpha x \right\} =$$

$$= \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{2m}{E+U_0}} \int_{-1}^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{2m}{E+U_0}} [\arcsin y]_{-1}^1 = \frac{\pi}{\alpha} \sqrt{\frac{2m}{E+U_0}}$$

$$T(E) = \frac{\pi}{\alpha} \sqrt{\frac{2m}{E+U_0}}$$

**3.10 Odvoďte jednorozměrný pohyb částice v poli  $U(x) = A(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x})$ ,  $A > 0$ ,  $\alpha > 0$ :**

**1) určete body obratu v závislosti na E**

**2) určete  $x = x(t)$**

**1) body obratu**

body obratu zjistíme z rovnice  $E = U = A(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x})$ , neb  $T = 0$ , tj. vyřešíme rovnici kvadratickou v  $e^{-\alpha x}$ :

$$e^{-\alpha x_{1,2}} = \frac{2A \pm \sqrt{4A^2 + 4AE}}{2A} = 1 \pm \sqrt{1 + \frac{E}{A}}$$

pro další vývoj bádání je nutné si položit otázku, kdy má tato rovnice dvě různá řešení - je to právě když  $E > -A$ , aby byl diskriminant kladný a když  $1 \pm \sqrt{1 + \frac{E}{A}} > 0$

odsud a ze zadání příkladu dostaneme celkem podmínky na A a E

$$-A < E < 0 < A$$

body obratu jsou

$$2) x = x(t) x_{1,2} = -\frac{1}{\alpha} \ln \left( 1 \pm \sqrt{1 + \frac{E}{A}} \right)$$

vyjdeme ze zákona zachování energie

$$E = T + U = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + U(x) = \text{konst}$$

odkud vyjádříme

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U)}$$

a vynásobíme-li tuto rovnici diferenciálem dt, vydělíme pravou stranou a zintegrujeme, dostaneme

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - U}} + t_0$$

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - A e^{-2\alpha x} + 2A e^{-\alpha x}}} = \left\{ y = \frac{E}{\sqrt{AE + A^2}} \left( e^{\alpha x} + \frac{A}{E} \right) \right\} = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{m}{-2E}} \int \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} =$$



$$= \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{m}{-2E}} \arcsin y = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{m}{-2E}} \arcsin \frac{E}{\sqrt{AE + A^2}} \left( e^{\alpha x} + \frac{A}{E} \right)$$

a po úpravách vedoucích k vyjádření  $x$  dostaneme

$$x(t) = \frac{1}{\alpha} \ln \left( -\frac{A}{E} - \frac{\sqrt{AE + A^2}}{E} \sin \alpha \sqrt{\frac{-2E}{m}} (t - t_0) \right)$$

**3.11** Na ose  $x$  inerciálního systému  $S$  se pohybují dva hmotné body  $m_1, x_1; m_2, x_2$ , pod účinkem konzervativní síly vzájemného působení s potenciální energií  $U(x)$ , kde  $x = x_1 - x_2$ . Zaveďte souřadnice  $x_1', x_2'$  vzhledem k těžišti, vyjádřete kinetickou energii v těžišťové soustavě pomocí  $x = x_1' - x_2' = x_1 - x_2$  a napište Lagrangeovou funkci  $L$ . Jak souvisí obecná hybnost  $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$  s

hybnostmi  $p_1 = m_1 \dot{x}_1, p_2 = m_2 \dot{x}_2$ ?

označme souřadnice těžiště

$$R = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

zaveďme tedy čárkované souřadnice vzhledem k těžišti

$$x_1' = x_1 - R$$

$$x_2' = x_2 - R$$

pro těžišťovou soustavu platí

$$m_1 x_1' + m_2 x_2' = 0$$

a zavedeme ještě

$$x = x_1' - x_2' = x_1 - x_2$$

můžeme tedy vyjádřit souřadnice v těžišťové soustavě pomocí jedné souřadnice  $x$  takto

$$x_1' = \frac{m_2}{m_1 + m_2} x$$

$$x_2' = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} x$$

kinetická energie vyjádřená v těžišťové soustavě

$$T = m_1 \dot{x}_1'^2 + m_2 \dot{x}_2'^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{x}^2$$

přičemž Lagrangeova funkce bude mít tvar

$$L = T - U = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{x}^2 - U(x)$$

a hybnost

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{x} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$$

$$p = \frac{m_2}{m_1 + m_2} p_1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} p_2$$

**3.12 Soustava se skládá z jedné částice hmotnosti  $M$  a  $n$  částic o stejných hmotnostech  $m$ .****Vyloučením pohybu hmotného středu zredukuj te úlohu na problém pohybu  $n$  těles.**

$\vec{R}$  je polohový vektor částice o hmotnosti  $M$ ,  $\vec{R}_i$  jsou polohové vektory  $n$  částic o hmotnosti  $m$   
zavedeme nové proměnné  $\vec{r}_i = \vec{R}_i - \vec{R}$  a počátek umístíme do hmotného středu tak, že platí

$$M\vec{R} + m \sum_{i=1}^n \vec{R}_i = 0$$

nyní si vyjádříme "staré" proměnné pomocí "nových"

po úpravách a dosazení nových proměnných platí, že

$$\vec{R} = -\frac{m}{M} \sum_{i=1}^n \vec{R}_i = -\frac{m}{M} \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i + \vec{R}) = \frac{m}{M} \sum_{i=1}^n \vec{r}_i - n \frac{m}{M} \vec{R}$$

odkud snadno dostaneme

$$\vec{R} = -\frac{m}{M + nm} \sum_{i=1}^n \vec{r}_i$$

$$\dot{\vec{R}} = -\frac{m}{M + nm} \sum_{i=1}^n \dot{\vec{r}}_i$$

zbývající staré souřadnice vyjádříme takto (rovnou jejich derivace)

$$\dot{\vec{R}}_k = \dot{\vec{r}}_k + \dot{\vec{R}} = \dot{\vec{r}}_k - \frac{m}{M + nm} \sum_{i=1}^n \dot{\vec{r}}_i$$

Lagrangeovu funkci  $L = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} m \sum_{k=1}^n \dot{\vec{R}}_k^2 - U$  nyní přetransformujeme do nových souřadnic

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} M \left( -\frac{m}{M + nm} \sum_{i=1}^n \dot{\vec{r}}_i \right)^2 + \frac{1}{2} m \sum_{k=1}^n \left( \dot{\vec{r}}_k - \frac{m}{M + nm} \sum_{i=1}^n \dot{\vec{r}}_i \right)^2 - U = \\ &= \frac{1}{2} \frac{M m^2}{(M + nm)^2} \left( \sum_{i=1}^n \dot{\vec{r}}_i \right)^2 + \frac{1}{2} m \sum_{k=1}^n \left( \dot{\vec{r}}_k^2 - 2 \frac{m}{M + nm} \dot{\vec{r}}_k \sum_{i=1}^n \dot{\vec{r}}_i + \frac{m^2}{(M + nm)^2} \left( \sum_{i=1}^n \dot{\vec{r}}_i \right)^2 \right) - U = \\ &= \frac{1}{2} \frac{M m^2 + n m^3}{(M + nm)^2} \left( \sum_{i=1}^n \dot{\vec{r}}_i \right)^2 + \frac{1}{2} m \sum_{k=1}^n \dot{\vec{r}}_k^2 - \frac{m^2}{M + nm} \left( \sum_{k=1}^n \dot{\vec{r}}_k \right) \left( \sum_{i=1}^n \dot{\vec{r}}_i \right) - U = \\ &= L = \frac{1}{2} m \sum_{k=1}^n \dot{\vec{r}}_k^2 - \frac{1}{2} \frac{m^2}{M + nm} \left( \sum_{i=1}^n \dot{\vec{r}}_i \right)^2 - U \end{aligned}$$

**3.13 Odvoďte Newtonův zákon gravitační z Keplerových zákonů.**

z rovnic  $r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}$  a  $r^2 \dot{\varphi} = A$  vypočítáme  $a_\varphi = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi})$  a  $a_r = \ddot{r} - r \dot{\varphi}^2$

$$a_\varphi = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi}) = \frac{1 + e \cos \varphi}{p} \frac{d}{dt} A = 0$$

$$a_r = \ddot{r} - r \dot{\varphi}^2 = \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{p}{1 + e \cos \varphi} \right) - \frac{A^2}{r^3} = \frac{d}{dt} \left( \frac{p e \sin \varphi}{(1 + e \cos \varphi)^2} \dot{\varphi} \right) - \frac{A^2}{r^3} = \frac{d}{dt} \left( \frac{A}{r^2} \frac{p e r^2 \sin \varphi}{p^2} \right) - \frac{A^2}{r^3} =$$

$$= \frac{d}{dt} \left( \frac{Ae}{p} \sin \varphi \right) - \frac{A^2}{r^3} = \frac{Ae}{p} \cos \varphi \dot{\varphi} - \frac{A^2}{r^3} = \frac{A^2}{r^2} \left( \frac{e}{p} \cos \varphi - \frac{1}{r} \right) = \frac{A^2}{r^2} \left( \frac{e \cos \varphi}{p} - \frac{1 + e \cos \varphi}{p} \right) = -\frac{A^2}{pr^2}$$

poznamenejme jen pro přehlednost, že jsme v předchozích krocích použili  $\dot{\varphi} = \frac{A}{r^2}$

výsledek opravdu odpovídá Newtonovu gravitačnímu zákonu

$$a_{\varphi} = 0 \text{ et } a_r = -\frac{A}{pr^2}$$

**3.14 Ze vzdálenosti R (s nulovou počáteční rychlostí) padá těleso malé hmotnosti  $m_1$  (meteor) k tělesu hmotnosti  $m_2 \gg m_1$  (Země). Zapište a řešte pohybovou rovnici meteoru ve vhodném**

**inerciálním systému. Určete dobu pádu  $t(h)$ , kde  $h = R - r$  a ukažte, že  $t(h) \approx \sqrt{\frac{2h}{g}}$  je-li  $h \ll R$ .**

za souřadný inerciální systém zvolíme systém spojený s tělesem hmotnosti  $m_1$  a za počátek zvolíme přirozeně jeho střed

vyjádříme zákon zachování energie druhého tělesa (meteoru) v gravitačním poli tělesa prvního

$$E = \frac{1}{2} m_1 \dot{r}^2 - \gamma \frac{m_1 m_2}{r}$$

kde  $r$  je vzdálenost mezi středy oněch těles a ještě určíme z počátečních podmínek celkovou energii soustavy - totiž, že v čase  $t = 0$  padá těleso s nulovou počáteční rychlostí v výšce  $R$

$$E = -\gamma \frac{m_1 m_2}{R}$$

a tak nás rovnice

$$E = -\gamma \frac{m_1 m_2}{R} = \frac{1}{2} m_1 \dot{r}^2 - \gamma \frac{m_1 m_2}{r}$$

přivádí k možnosti vyjádřit pohybovou rovnici

$$\dot{r} = -\sqrt{2\gamma \frac{m_1 m_2}{m_1} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)}$$

odkud po separaci dostaneme výraz elementu času  $dt$ , který zintegrujeme a dostaneme řešení pohybové rovnice

$$t - t_0 = -\int \frac{dr}{\sqrt{2\gamma m_2 \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)}} = \left\{ \xi = \sqrt{\frac{r}{R}} \right\} = -\frac{2R\sqrt{R}}{\sqrt{2\gamma m_2}} \int \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = -\frac{2R\sqrt{R}}{\sqrt{2\gamma m_2}} \left[ -\frac{1}{2} \xi \sqrt{1-\xi^2} + \frac{1}{2} \arcsin(\xi) \right]$$

čímž dostaneme

$$t - t_0 = -\frac{\sqrt{R}}{\sqrt{2\gamma m_2}} \left[ -\sqrt{\frac{r}{R}} \sqrt{1-\frac{r}{R}} + R \arcsin \left( \sqrt{\frac{r}{R}} \right) \right]$$

pro zjištění doby pádu z výšky  $R$  (počáteční  $r = R$  pro  $t_0 = 0$ ) do nějaké výšky  $r = R - h$

$$t(h) = -\frac{R\sqrt{R}}{\sqrt{2\gamma m_2}} \left[ -\sqrt{\frac{R-h}{R}} \sqrt{1-\frac{(R-h)}{R}} + \arcsin\left(\sqrt{\frac{R-h}{R}}\right) + \sqrt{\frac{R}{R}} \sqrt{1-\frac{R}{R}} - \arcsin\left(\sqrt{\frac{R}{R}}\right) \right]$$

$$t(h) = \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{2\gamma m_2}} \left[ \sqrt{h(R-h)} - R \arcsin\left(\sqrt{\frac{R-h}{R}}\right) + R \frac{\pi}{2} \right]$$

**3.17 Nakreslete si graf efektivního potenciálu pro izotropní prostorový oscilátor  $U = \frac{1}{2}kr^2$ ,  $k > 0$ .**

**Diskutujte kruhovou dráhu částice: určete poloměr dráhy, rychlost a energii částice při dané hodnotě momentu hybnosti  $l$ .**

(pozn. kreslit v této verzi příručky nebudeme)

efektivní potenciál je

$$U_{\text{ef}}(r) = U(r) + \frac{l^2}{2mr^2} = \frac{1}{2}kr^2 + \frac{l^2}{2mr^2}$$

kruhová dráha částice v tomto poli nastává právě když  $E_0 = (U_{\text{ef}})_{\min} = U_{\text{ef}}(r_0)$ , takže nám nezbyvá než najít minimum funkce  $U_{\text{ef}}(r)$ , přičemž si rovnou všimneme, že funkce  $U_{\text{ef}}(r)$  je pro kladná  $r$  spojitá a zdola omezená (např. 0) a shora omezená není ( $\lim_{r \rightarrow \infty} U_{\text{ef}}(r) = \infty$ ), takže minimum existuje

$$U'_{\text{ef}}(r) = kr - \frac{l^2}{mr^3}$$

$$U'_{\text{ef}}(r_0) = 0 = kr_0 - \frac{l^2}{mr_0^3}$$

$$r_0^2 = \frac{l}{\sqrt{km}}$$

energie

$$E_0 = (U_{\text{ef}})_{\min} = U_{\text{ef}}(r_0) = \sqrt{\frac{k}{m}}l$$

rychlost zjistíme ze zákona zachování energie

$$E_0 = T + U = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}mr_0^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}\frac{l}{\sqrt{km}} = \sqrt{\frac{k}{m}}l$$

$$v_0^2 = \frac{\sqrt{km}}{m^2}l$$

**3.19 Ukažte, že orbita je v bodech obratu k centru vyduťá, je-li tam skutečná síla přitažlivá, a je vypuklá, je-li tam skutečná síla odpudivá.**

budeme zkoumat vztah

$$ma_r = m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) = -U'(r)$$

v bodech obratu platí, že  $\ddot{r} = 0$  a tedy

$$ma_r = -mr\dot{\phi}^2 = -U'(r)$$

a odtud rovnou vidíme, že je-li v tomto místě skutečná síla přitažlivá, tj. je  $-U'(r) < 0$  a tudíž i  $ma_r < 0$  a obráceně.

**3.20 Ukažte, že při pohybu částice v poli  $U(r) = \frac{\alpha}{r}$ , kde  $\alpha$  má libovolné znamení, existuje**

**vektorový integrál pohybu  $\vec{A} = \vec{v} \times \vec{L} + \alpha \frac{\vec{r}}{r}$  (Runge-Lentzův vektor) specifický právě pro toto pole.**

$$\vec{A} = \vec{v} \times \vec{L} + \alpha \frac{\vec{r}}{r} \text{ je integrálem pohybu } \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \vec{A} = \vec{0}$$

zkoumejme tedy

$$\frac{d}{dt} \vec{A} = \frac{d}{dt} (\vec{v} \times \vec{L}) + \alpha \frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{r}}{r} \right) = \ddot{\vec{r}} \times \vec{L} + \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{L}} + \alpha \frac{\dot{\vec{r}}r - \vec{r}\dot{r}}{r^2}$$

zde je dobré si uvědomit několik vztahů:

$$m\ddot{\vec{r}} = -\nabla U = -\nabla \frac{\alpha}{r} = \frac{\alpha}{r^3} \vec{r}$$

$$\vec{r} \times \vec{r} = \vec{0}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \text{ (věta "bac-cab")}$$

na jejichž základě rovnou dostaneme, že

$$\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{L}} = \dot{\vec{r}} \times (\vec{r} \times m\ddot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}} \times m\dot{\vec{r}}) = \dot{\vec{r}} \times \left( \vec{r} \times \frac{\alpha}{r^3} \vec{r} + m\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} \right) = \dot{\vec{r}} \times (\vec{0} + \vec{0}) = \vec{0}$$

a zbude nám

$$\frac{d}{dt} \vec{A} = \ddot{\vec{r}} \times \vec{L} + \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{L}} + \alpha \frac{\dot{\vec{r}}r - \vec{r}\dot{r}}{r^2} = \ddot{\vec{r}} \times (\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}) + \alpha \frac{\dot{\vec{r}}r - \vec{r}\dot{r}}{r^2} = \alpha \frac{\dot{\vec{r}}}{r^3} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) + \alpha \frac{\dot{\vec{r}}r - \vec{r}\dot{r}}{r^2}$$

kde jsme použili  $m\ddot{\vec{r}} = \frac{\alpha}{r^3} \vec{r}$ .

nyní opět aplikujeme větu "bac-cab" na vektorový součin

$$\frac{d}{dt} \vec{A} = \alpha \frac{\dot{\vec{r}}}{r^3} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) + \alpha \frac{\dot{\vec{r}}r - \vec{r}\dot{r}}{r^2} = \frac{\alpha}{r^3} (\vec{r}(\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) - \dot{\vec{r}}(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) + \dot{\vec{r}}r^2 - \vec{r}\dot{r}r)$$

a ze znalosti že  $\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = r \dot{r}$  rovnou plyne, že

$$\frac{d}{dt} \vec{A} = \frac{\alpha}{r^3} (\vec{r}(\dot{r}r) - \dot{\vec{r}}r^2 + \dot{\vec{r}}r^2 - \vec{r}\dot{r}r) = 0$$

což bylo dokázati

**3.22 Určete rovnici dráhy v potenciálu  $U(r) = -\frac{\alpha}{r^2}$  pro ty hodnoty  $l$ , při nichž nastane pád na centrum.**

efektivní potenciál je

$$U_{\text{ef}} = U(r) + \frac{l^2}{2mr^2}$$

podmínka pádu na centrum zní:

$$r^2 U(r) + \frac{l^2}{2mr^2} < 0$$

a odtud snadno přeformulujeme tuto podmínku na

$$\frac{l^2}{2mr^2} < \alpha$$

a nyní pro tyto hodnoty určíme rovnici dráhy - vyjdeme ze zákona zachování energie

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + U_{\text{ef}} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{l^2}{2m} - \alpha \right)$$

který separujeme na rovnici

$$\frac{2}{m} \left( E + B \frac{1}{r^2} \right) = \dot{r}^2$$

kde jsme označili  $B = \left( \alpha - \frac{l^2}{2m} \right)$  a z podmínky pro pád na centrum  $\frac{l^2}{2mr^2} < \alpha$  vidíme, že  $B > 0$  potom

$$dt = - \frac{r dr}{\sqrt{\frac{2}{m} (E r^2 + B)}}$$

vyjádřili jsme si tak diferenciál času, který budeme dosazovat do rovnice

$$\dot{\phi} = \frac{l}{mr^2}$$

kterou ovšem za tím účelem musíme separovat

$$d\phi = \frac{l}{mr^2} dt = - \frac{l}{mr^2} \frac{r dr}{\sqrt{\frac{2}{m} (E r^2 + B)}}$$

a tuto rovnici budeme integrovat

$$\phi + \phi_0 = - \frac{l}{\sqrt{2Bm}} \int \frac{dr}{r \sqrt{\frac{E}{B} r^2 + 1}} = \left\{ \xi = \sqrt{\frac{|E|}{B}} \frac{1}{r} \right\} = \frac{l}{\sqrt{2Bm}} \int \frac{\xi d\xi}{\xi^2 \sqrt{\frac{E}{|E|} \frac{1}{\xi^2} + 1}} = \frac{l}{\sqrt{2Bm}} \int \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{E}{|E|} + \xi^2}}$$

uvědomme si, že integrál

$$\int \frac{d\xi}{\sqrt{-1 + \xi^2}} = \text{arccosh}(\xi)$$

$$\int \frac{d\xi}{\sqrt{1 + \xi^2}} = \text{arcsinh}(\xi)$$

dostaneme tedy dvě různá řešení v závislosti na znaménku energie

$$\frac{1}{r} = \sqrt{\frac{2m|E|}{2m\alpha - l^2}} \cosh \left( \sqrt{\frac{2m\alpha}{l^2}} - 1 (\phi + \phi_0) \right) \text{ pro } E \leq 0$$

$$\frac{1}{r} = \sqrt{\frac{2m|E|}{2m\alpha - l^2}} \sinh \left( \sqrt{\frac{2m\alpha}{l^2}} - 1 (\phi + \phi_0) \right) \text{ pro } E \geq 0$$

**3.23 Při jakých hodnotách  $l$  je možný finitní pohyb v polích**

**(a)  $U(r) = -\alpha \frac{1}{r} e^{-\kappa r}$  ( $\alpha > 0$ )**

**(b)  $U(r) = -V e^{-\kappa^2 r^2}$  ( $V > 0$ )**

finitní pohyb nastává v případě, jen když  $U_{\text{ef}}$  má minimum

budeme předpokládat pouze kladná  $r$

$$(a) \quad U(r) = -\alpha \frac{e^{-\kappa r}}{r}$$

efektivní energie je

$$U_{\text{ef}}(r) = -\alpha \frac{e^{-\kappa r}}{r} + \frac{l^2}{2mr^2}$$

zajímá nás, jestli a pro jaké hodnoty  $l$  nabývá efektivní energie minimum - z toho důvodu budeme zkoumat její první derivaci podle  $r$

$$U'_{\text{ef}} = \alpha \frac{e^{-\kappa r}}{r^2} + \alpha \kappa \frac{e^{-\kappa r}}{r} - \frac{l^2}{mr^3}$$

a budeme hledat, za jakých podmínek je tato funkce rovna nule

$$\frac{\alpha}{r^3} \left( r e^{-\kappa r} + \kappa r^2 e^{-\kappa r} - \frac{l^2}{\alpha m} \right) = 0$$

rovnou je vidět, že tato podmínka bude splněna, pokud (použijeme-li pro přehlednost následující označení)

$$g(r) = e^{-\kappa r} (r + \kappa r^2) - \frac{l^2}{\alpha m} = 0$$

vlastnosti funkce  $g(r)$ :

limita v krajních bodech definičního oboru

$$\lim_{r \rightarrow \infty} g(r) = \lim_{r \rightarrow 0^+} g(r) = -\frac{l^2}{\alpha m} < 0$$

pro zjištění znaménka funkce potřebujeme

$$g'(r) = e^{-\kappa r} (1 + \kappa r - \kappa^2 r^2)$$

nyní přichází nejdůležitější úvaha celého příkladu - protože potřebujeme vědět, kdy funkce  $U_{\text{ef}}(r)$  nabývá minima, je nezbytné zjistit, za jakých podmínek je její první derivace podle  $r$  nulová

tento problém ovšem přeneseme na hledání nulového bodu funkce  $g(r)$  a protože známe limity této funkce na okrajích definičního oboru a tato funkce je spojitá na tomto definičním oboru, stačí když najdeme bod  $r_0$  takový, že  $g'(r_0) = 0$  (křivka  $g(r)$  se v tomto bodě láme) a  $g(r_0) \geq 0$  (křivka  $g(r)$  má v okrajích svého definičního oboru záporné limity a proto nalezneme-li touto podmínkou taková  $l$ , pro která bude díky spojitosti zaručena existence alespoň jednoho nulového bodu, máme vyhráno)

hledejme tedy

$$g'(r_0) = e^{-\kappa r_0} (1 + \kappa r_0 - \kappa^2 r_0^2) = 0$$

neboli

$$1 + \kappa r_0 - \kappa^2 r_0^2 = 0$$

a tuto kvadratickou rovnici vyřešíme a protože hledáme pouze nezáporná řešení, dostaneme

$$r_0 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\kappa}$$

z podmínky  $g(r_0) \geq 0$  dostaneme podmínku

$$g(r_0) = e^{-\kappa r_0} (r_0 + \kappa r_0^2) - \frac{l^2}{\alpha m} \geq 0$$

$$l^2 \leq \alpha m e^{-\kappa r_0} (r_0 + \kappa r_0^2)$$

takže po dosazení za  $r_0$  výše zmíněný výraz dostaneme, že finitní pohyb v tomto potenciálním poli nastává pro hodnoty

$$l^2 \leq \frac{\alpha m}{\kappa} e^{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}} (2 + \sqrt{5})$$

(b)  $U(r) = -Ve^{-\kappa^2 r^2}$

budeme postupovat obdobně jako v případě (a), tentokrát ovšem stručněji

$$U_{\text{ef}}(r) = -Ve^{-\kappa^2 r^2} + \frac{l^2}{2mr^2}$$

první derivace podle  $r$

$$U'_{\text{ef}} = 2V\kappa^2 r e^{-\kappa^2 r^2} - \frac{l^2}{mr^3}$$

a budeme hledat, za jakých podmínek je tato funkce rovna nule, tedy

$$2V\kappa^2 r e^{-\kappa^2 r^2} - \frac{l^2}{mr^3} = 0$$

a tuto rovnici přeformulujeme pro kladná  $r$  takto (přičemž opět provedeme pro přehlednost následující označení)

$$g(r) = r^4 e^{-\kappa^2 r^2} - \frac{l^2}{2V\kappa^2 m} = 0$$

vlastnosti funkce  $g(r)$ :

limita v krajních bodech definičního oboru

$$\lim_{r \rightarrow \infty} g(r) = \lim_{r \rightarrow 0^+} g(r) = -\frac{l^2}{2V\kappa^2 m} < 0$$

pro zajištění existence nulového bodu funkce  $g(r)$  potřebujeme vědět, kdy

$$g'(r) = e^{-\kappa^2 r^2} (4r^3 - 2\kappa^2 r^5) = 0$$

neboli



$$4 - 2\kappa^2 r^2 = 0$$

$$r_0^2 = \frac{2}{\kappa^2}$$

a protože nás zajímají pouze kladné body

$$r_0 = \frac{\sqrt{2}}{\kappa}$$

v tomto bodě tedy funkce  $g(r)$  nabývá stacionární hodnoty a vzhledem k její spojitosti a kladným limitám v krajních bodech svého definičního oboru nyní stačí určit, při jakých hodnotách  $l$  je  $g(r_0) \geq 0$

$$g(r_0) = r_0^4 e^{-\kappa^2 r_0^2} - \frac{l^2}{2V\kappa^2 m} = \frac{4}{\kappa^4} e^{-2} - \frac{l^2}{2V\kappa^2 m} \geq 0$$

$$l^2 \leq Vm \frac{8}{\kappa^2} e^{-2}$$

**3.24 Najděte trajektorie a zákon pohybu částice v poli sférické potenciálové jámy  $U = \begin{cases} -U_0, & r < R \\ 0, & r > R \end{cases}$  při různých hodnotách  $l$ ,  $E$ .**

pro  $r < R$  vyjádříme ze zákona zachování energie (kde při úpravě použijeme  $\dot{\phi} = \frac{l}{mr^2}$ )

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\phi}^2 + U = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} - U_0$$

diferenciál  $dt$  takto

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{m} (E + U_0) - \frac{l^2}{m^2 r^2}$$

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} (E + U_0) - \frac{l^2}{m^2 r^2}}}$$

z již zmíněného vztahu  $\dot{\phi} = \frac{l}{mr^2}$  vyjádříme

$$d\phi = \frac{l}{mr^2} dt = \frac{l}{mr^2} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} (E + U_0) - \frac{l^2}{m^2 r^2}}} = \frac{l dr}{r^2 \sqrt{2m(E + U_0) - \frac{l^2}{r^2}}}$$

zintegrujeme tento vztah a dostaneme

$$\phi = \int \frac{l dr}{r^2 \sqrt{2m(E + U_0) - \frac{l^2}{r^2}}} = \frac{l}{\sqrt{2m(E + U_0)}} \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{l^2}{2m(E + U_0)r^2}}} = \left\{ y = \frac{l}{r \sqrt{2m(E + U_0)}} \right\} = - \int \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \arccos(y)$$

$$\cos(\phi + \phi_0) = \frac{l}{\sqrt{2m(E + U_0)}} \frac{1}{r}$$

rovnice trajektorie je

$$r(\phi) = \frac{l}{\cos(\phi + \phi_0) \sqrt{2m(E + U_0)}}$$

### 3.27 Při jakém poměru hmotností částic $\kappa = \frac{m_1}{m_2}$ je energie předaná při jejich pružné srážce maximální ?

budeme diskutovat čelní ráz  $\frac{E_2'}{E_1} = \frac{4m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}$  kdy chceme, aby poměr energií byl co největší při daných hmotnostech

označíme si tedy tento poměr jako funkci  $f(\kappa)$

$$f(\kappa) = \frac{E_2'}{E_1} = \frac{4m_1m_2}{(m_1+m_2)^2} = 2 \frac{(m_1+m_2)^2}{(m_1+m_2)^2} - 2 \frac{m_1^2+m_2^2}{(m_1+m_2)^2} = 2 - 2 \frac{\kappa^2+1}{(\kappa+1)^2}$$

a hledejme extrém této funkce

$$f'(\kappa) = -2 \frac{2\kappa(\kappa+1)^2 - 2(\kappa+1)(\kappa^2+1)}{(\kappa+1)^4} = -2 \frac{2\kappa(\kappa+1) - 2(\kappa^2+1)}{(\kappa+1)^3} = -2 \frac{2\kappa-2}{(\kappa+1)^3} = 0$$

$$\kappa_0 = 1$$

odkud plyne, že energie předaná při pružné srážce je maximální pro  $m_1 = m_2$ .

### 3.28 Dokažte zákon odrazu (rovnost úhlu odrazu a úhlu dopadu) pro pružný odraz částice m na pevné stěně ( $M \rightarrow \infty$ ).

vyjdeme ze vztahu pro pružné srážky dvou hmotných bodů hmotností m a M, kdy těleso hmotnosti M je v klidu a těleso hmotnosti m na něj nalétává pod úhlem  $\theta_1$  a úhel rozptylu částic se značí  $\chi$

ona rovnice zní

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{M \sin \chi}{m + M \cos \chi} = \frac{\sin \chi}{\kappa + \cos \chi}$$

kde  $\kappa$  značí poměr  $\kappa = \frac{m}{M}$

při  $M \rightarrow \infty$  jde  $\kappa \rightarrow 0$  a vztah mezi úhly přechází v

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{\sin \chi}{\cos \chi} = \operatorname{tg} \chi$$

což bylo dokázati

### 3.37 Soustava podle obr. 3.38 (skriptum str. 112) se otáčí kolem svislé osy s konstantní úhlovou rychlostí $\dot{\phi} = \Omega$ ; bod $m_2$ se může volně pohybovat podél osy.

(1) Napište Lagrangeovu funkci soustavy.

(2) Při  $m_1 = m_2 = m$  a  $\Omega > \Omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{a}}$  určete úhlovou frekvenci  $\omega$  malých kmitů soustavy kolem rovnovážné polohy.

(1) Lagrangeovu funkci soustavy

$$L = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{y}_3^2 + \dot{z}_1^2 + \dot{z}_3^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2) + m_1 g(y_1 + y_3) + m_2 g y_2$$

vyjádříme v obecné souřadnici  $\theta$  (viz obrázek) a k tomu použijeme vazby

$$x_1^2 + (y_2 - y_1)^2 = a^2$$

$$x_3^2 + (y_3 - y_1)^2 = a^2$$

$$y_1 = y_3$$

a vzhledem k otáčení soustavy kolem osy  $y$  úhlovou rychlostí  $\varphi = \Omega t$  zavedeme nové polární souřadnice vztahy :

$$x_1 = a \sin \theta \cos \Omega t$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 = -a \sin \theta \cos \Omega t$$

$$y_1 = a \cos \theta$$

$$y_2 = 2a \cos \theta$$

$$y_3 = a \cos \theta$$

$$z_1 = a \sin \theta \sin \Omega t$$

$$z_2 = 0$$

$$z_3 = -a \sin \theta \sin \Omega t$$

a tak tedy dostaneme Lagrangeovu funkci

$$L = m_1 a^2 (\dot{\theta}^2 + \Omega^2 \sin^2 \theta) + 2a^2 m_2 \sin^2 \theta \dot{\theta}^2 + 2ga(m_1 + m_2) \cos \theta$$

(2) nyní je potřeba odvodit úhlovou frekvenci malých kmitů kolem rovnovážné polohy (viz teorie) při  $m_1 = m_2 = m$  a pro tento účel vyjdeme z upravené Lagrangeovy funkce

$$L = ma^2 (\dot{\theta}^2 + \Omega^2 \sin^2 \theta + 2 \sin^2 \theta \dot{\theta}^2 + 2\Omega_0^2 \cos \theta)$$

odvodíme Lagrangeovy pohybové rovnice

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = ma^2 \frac{d}{dt} (2\dot{\theta} + 4 \sin^2 \theta \dot{\theta}) - ma^2 (2\Omega^2 \sin \theta \cos \theta + 4 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta}^2 - 2\Omega_0^2 \sin \theta) = 0$$

$$\ddot{\theta} + 2 \sin^2 \theta \ddot{\theta} - \Omega^2 \sin \theta \cos \theta + 2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta}^2 + \Omega_0^2 \sin \theta = 0$$

rovnovážnou polohu dostaneme z podmínky  $\left[ \dot{\theta} \right]_{\theta=\theta_0} = 0$ , pak se předchozí vztah zjednoduší na

$$-\Omega^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0 + \Omega_0^2 \sin \theta_0 = 0$$

a rovnováha nastává pro úhel

$$\cos \theta_0 = \frac{\Omega_0^2}{\Omega^2}$$

určíme úhlovou frekvenci malých kmitů kolem rovnovážné polohy tak, že pomocí Taylorovy věty rozvineme  $U$  a  $T$  v bodě  $\theta_0$ , kdy nás bude zejména zajímat (opět viz teorie)

$$\gamma = \left( \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \right)_{\theta=\theta_0} \quad \text{a} \quad \mu = \left( \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right)_{\theta=\theta_0}$$

a potom podmínka

$$|\gamma - \omega^2 \mu| = 0$$

nám konečně nabídne hledanou frekvenci

z potenciální energie

$$U = -ma^2(\Omega^2 \sin^2 \theta + 2\Omega_0^2 \cos \theta)$$

$$\gamma = -ma^2 \frac{1}{2!} \left( -2\Omega^2 + 4\Omega^2 \frac{\Omega_0^4}{\Omega^4} - 2\Omega_0^2 \frac{\Omega_0^2}{\Omega^2} \right) = ma^2 \frac{\Omega^4 - \Omega_0^4}{\Omega^2}$$

z kinetické energie

$$T = ma^2 \dot{\theta}^2 (1 + 2 \sin^2 \theta)$$

$$\mu = ma^2 \left( 3 - 2 \frac{\Omega_0^4}{\Omega^4} \right) = ma^2 \frac{3\Omega^4 - 2\Omega_0^4}{\Omega^4}$$

rovnice  $|\gamma - \omega^2 \mu| = 0$  se převede na

$$ma^2 \frac{\Omega^4 - \Omega_0^4}{\Omega^2} - \omega^2 ma^2 \frac{3\Omega^4 - 2\Omega_0^4}{\Omega^4} = 0$$

odkud snadno dostaneme výsledek

$$\omega^2 = \frac{\Omega^4 - \Omega_0^4}{\Omega^2} \frac{\Omega^4}{3\Omega^4 - 2\Omega_0^4} = \Omega^2 \frac{\Omega^4 - \Omega_0^4}{3\Omega^4 - 2\Omega_0^4}$$

**3.38 Určete normální kmity dvojitého kyvadla (viz skripta U 2.4) při malých amplitudách. Zkoumejte zvláště případ  $l_1 = l_2$ ,  $m_1 \gg m_2$ , v němž jsou vlastní frekvence téměř stejné. Ukažte, že po malém vychýlení horní hmoty se amplitudy obou hmot budou střídavě zvětšovat a zmenšovat ("rázy").**

v tomto příkladě volně navážeme na řešený příklad U2.4 na straně 44 a tedy přepíšeme Lagrangeovu funkci v polárních souřadnicích

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + (m_1 + m_2)gl_1 \cos \varphi_1 + m_2 gl_2 \cos \varphi_2$$

najdeme (pomocí teorie) vlastní frekvence těchto kmitů kolem rovnovážné polohy ( $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ ) při malých výchylkách

vyjádříme si potenciální energii

$$U = -(m_1 + m_2)gl_1 \cos \varphi_1 - m_2 gl_2 \cos \varphi_2$$

a najdeme matici charakterizující aproximaci potenciální energie do druhého řádu

$$\gamma_{i,k} = \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_i \partial \varphi_k} \right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (m_1 + m_2)gl_1 & 0 \\ 0 & m_2 gl_2 \end{pmatrix}$$

vyjádříme si kinetickou energii

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

a najdeme matici charakterizující aproximaci kinetické energie do druhého řádu

$$\mu_{i,k} = \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\varphi}_i \partial \dot{\varphi}_k} \right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (m_1 + m_2)l_1^2 & m_2 l_1 l_2 \\ m_2 l_1 l_2 & m_2 l_2^2 \end{pmatrix}$$

vlastní frekvence dostaneme z rovnice (opět viz teorie)

$$|\gamma_{i,k} - \omega^2 \mu_{i,k}| = 0$$

čímž dostaneme

$$\begin{vmatrix} (m_1 + m_2)gl_1 - \omega^2(m_1 + m_2)l_1^2 & -\omega^2 m_2 l_1 l_2 \\ -\omega^2 m_2 l_1 l_2 & m_2 gl_2 - \omega^2 m_2 l_2^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$[(m_1 + m_2)gl_1 - \omega^2(m_1 + m_2)l_1^2][m_2 gl_2 - \omega^2 m_2 l_2^2] - \omega^4 m_2^2 l_1^2 l_2^2 = 0$$

$$(m_1 + m_2)g^2 m_2 l_2 l_1 - \omega^2(m_1 + m_2)m_2 gl_2 l_1^2 - \omega^2(m_1 + m_2)gm_2 l_2^2 l_1 + \omega^4(m_1 + m_2)m_2 l_2^2 l_1^2 - \omega^4 m_2^2 l_1^2 l_2^2 = 0$$

a zjednodušíme na

$$(m_1 + m_2)g^2 - \omega^2 g(m_1 + m_2)(l_1 + l_2) + \omega^4 m_1 l_2 l_1 = 0$$

což je kvadratická rovnice v  $\omega^2$ , kterou snadno vyřešíme a dostaneme

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{g}{2m_1 l_1 l_2} \left( (m_1 + m_2)(l_1 + l_2) \pm \sqrt{(m_1 + m_2)^2 (l_1 + l_2)^2 - 4m_1(m_1 + m_2)l_1 l_2} \right)$$

### 3.39 Určete kmity soustavy dvou harmonických oscilátorů se slabou bilineární vazbou,

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}\omega_0^2(x^2 + y^2) + \alpha xy, \quad \alpha \ll \omega_0^2.$$

příslušné Lagrangeovy rovnice II. druhu získáme

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = \ddot{x} + \omega_0^2 x - \alpha y = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = \ddot{y} + \omega_0^2 y - \alpha x = 0$$

dostaneme tak soustavu dvou diferenciálních rovnic, z které sečtením a také odečtením dostaneme nové dvě rovnice

$$\frac{d^2}{dt^2}(x - y) + \omega_0^2(x - y) + \alpha(x - y) = 0$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(x + y) + \omega_0^2(x + y) - \alpha(x + y) = 0$$

zavedeme nové souřadnice  $q_1, q_2$  vztahy

$$q_1 = x - y, \quad q_2 = x + y$$

a soustava rovnic přejde na

$$\ddot{q}_1 + (\omega_0^2 + \alpha)q_1 = 0$$

$$\ddot{q}_2 + (\omega_0^2 - \alpha)q_2 = 0$$

odkud lehce zjistíme normální kmity soustavy jako

$$\omega_{1,2}^2 = \omega_0^2 \pm \alpha$$

(poznámka: k nalezení těchto frekvencí lze také použít obdobnou metodiku jako v příkladě 3.28)

**3.41 Padostroj.** Přes volně otáčivý válec poloměru  $R$  a momentem setrvačnosti  $I$  je nataženo nehmotné vlákno délky  $l$ , na němž jsou zavěšena tělesa hmotností  $m_1, m_2$ . Sestavte a řešte Lagrangeovu rovnici.

počátek soustavy souřadné umístíme do středu válce, kladný směr osy  $z$  směřuje proti směru tíhového pole, úhel  $\varphi$  určuje pootočení válce

vazby jsou

$$\begin{aligned}x_1 &= -x_2 = R \\y_1 &= y_2 = 0 \\z_1 + z_2 + \pi R &= l \\z_1 &= \varphi R + z_1^{(0)}\end{aligned}$$

Lagrangeovu funkci

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{z}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{z}_2^2 + \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 + m_1 g z_1 + m_2 g z_2$$

pomocí těchto vazeb přetransformujeme (s vypuštěním konstantních členů) na

$$L = \frac{1}{2} \left( m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2} \right) \dot{z}_1^2 + (m_1 - m_2) g z_1$$

řešme nyní Lagrangeovu rovnici II. druhu

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial z_1} = \left( m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2} \right) \ddot{z}_1 - (m_1 - m_2) g = 0$$

kterou řeší s ohledem na neznámé počáteční podmínky

$$\begin{aligned}z_1(t) &= \frac{1}{2} \frac{(m_1 - m_2) R^2}{(m_1 + m_2) R^2 + I} g t^2 + \dot{z}_1^{(0)} t + z_1^{(0)} \\z_2(t) &= -\frac{1}{2} \frac{(m_1 - m_2) R^2}{(m_1 + m_2) R^2 + I} g t^2 + \dot{z}_2^{(0)} t + z_2^{(0)}\end{aligned}$$

**3.42 Dvojitý padostroj.** Na soustavu podle obr. 3.39 (skriptum strana 113) působí síla tíže. Horní otáčivá kladka (moment setrvačnosti  $I_1$ , poloměr  $r_1$ ) je pevně zavěšena, dolní otáčivá kladka (hmotnost  $m_2$ , poloměr  $r_2$ , moment setrvačnosti  $I_2$ ) je pohyblivá ve svislém směru. Vlákno spojující tělesa  $m_1, m_2$  má délku  $l_1$ , vlákno spojující tělesa  $m_3, m_4$  má délku  $l_2$ . Sestavte a řešte Lagrangeovy rovnice.

napišme nejprve vazby

$$\begin{aligned}z_1 + z_2 + \pi r_1 &= l_1 \\z_3 - z_2 + z_4 - z_2 + \pi r_2 &= l_2 \\z_1 &= \varphi_1 r_1 + z_1^{(0)} \\z_3 &= \varphi_2 r_2 + z_3^{(0)}\end{aligned}$$

ze kterých vyjádříme

$$\begin{aligned}z_2 &= l_1 - \pi r_1 - z_1 \\z_4 &= l_2 - \pi r_2 + 2l_1 - 2\pi r_1 - 2z_1 - z_3\end{aligned}$$

$$\varphi_1 = \frac{z_1 - z_1^{(0)}}{r_1}$$

$$\varphi_2 = \frac{z_3 - z_3^{(0)}}{r_2}$$

a dosadíme do této Lagrangeova funkce

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 m_i \dot{z}_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 I_i \dot{\varphi}_i^2 + \sum_{i=1}^4 m_i g z_i$$

čímž po úpravách dostaneme

$$L = \underbrace{\frac{(m_1 + m_2 + 4m_4)r_1^2 + I_1}{2r_1^2}}_A \dot{z}_1^2 + \underbrace{\frac{(m_3 + m_4)r_2^2 + I_2}{2r_2^2}}_B \dot{z}_3^2 + \underbrace{2m_4}_{C} \dot{z}_1 \dot{z}_3 + \underbrace{(m_1 - m_2 - 2m_4)g}_{D} z_1 + \underbrace{(m_3 - m_4)g}_{E} z_3$$

a pro přehlednost dalších kroků jsme si jednotlivé členy označili písmenky

$$L = A\dot{z}_1^2 + B\dot{z}_3^2 + C\dot{z}_1\dot{z}_3 + Dz_1 + Ez_3$$

sestavme Lagrangeovy rovnice II. druhu

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial z_1} = 2A\ddot{z}_1 + C\ddot{z}_3 - D = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_3} \right) - \frac{\partial L}{\partial z_3} = 2B\ddot{z}_3 + C\ddot{z}_1 - E = 0$$

které nás dovedou na soustavu diferenciálních rovnic, maticově zapsanou jako

$$\ddot{\bar{z}} = \begin{pmatrix} 2A & C \\ C & 2B \end{pmatrix} \ddot{\bar{z}} + \begin{pmatrix} D \\ E \end{pmatrix} = 0$$

kterou vyřešíme tak, že najdeme inverzní matici

$$\frac{1}{4AB - C^2} \begin{pmatrix} 2B & -C \\ -C & 2A \end{pmatrix}$$

a celou rovnost zprava touto maticí vynásobíme a dostaneme tak

$$\ddot{\bar{z}} = \begin{pmatrix} 2BD - CE \\ 2AE - CD \end{pmatrix}$$

a tedy řešením je

$$\bar{z} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2BD - CE \\ 2AE - CD \end{pmatrix} t^2 + \dot{\bar{z}}^{(0)} t + \bar{z}^{(0)}$$

## KAPITOLA 4: ZÁKLADNÍ PRINCIPY MECHANIKY

### 4.2 Přes hřeben střechy (vrcholový úhel $2\alpha$ ) je nataženo nehmotné vlákno délky $l$ zatížené na koncích hmotnostmi $m_1, m_2$ . Kdy nastane rovnováha ?

označme souřadnice obou těles:  $m_1 : [x_1, z_1]$  resp.  $m_2 : [x_2, z_2]$  a zvolme počátek ve vrcholu střechy přičemž kladný směr osy  $z$  míří proti tíhovému zrychlení

nejprve si zapíšeme vazby, které tato tělesa podstupují

$$\varphi_1 \equiv x_1 - z_1 \operatorname{tg} \alpha_1 = 0$$

$$\varphi_2 \equiv x_2 + z_2 \operatorname{tg} \alpha_2 = 0$$

$$\varphi_3 \equiv \sqrt{x_1^2 + z_1^2} + \sqrt{x_2^2 + z_2^2} - l = 0$$

a skutečné síly, které na tělesa působí

$$\vec{F}_1 = (0, 0, -m_1 g)$$

$$\vec{F}_2 = (0, 0, -m_2 g)$$

problém statické rovnováhy budeme řešit metodou Lagrangeových multiplikátorů (viz teorie), která nás v tomto případě přivede na soustavu rovnic:

$$\lambda_1 + \lambda_3 \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + z_1^2}} = 0$$

$$-m_1 g - \lambda_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + \lambda_3 \frac{z_1}{\sqrt{x_1^2 + z_1^2}} = 0$$

$$\lambda_2 + \lambda_3 \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + z_2^2}} = 0$$

$$-m_2 g + \lambda_2 \operatorname{tg} \alpha_2 + \lambda_3 \frac{z_2}{\sqrt{x_2^2 + z_2^2}} = 0$$

$$x_1 - z_1 \operatorname{tg} \alpha_1 = 0$$

$$x_2 + z_2 \operatorname{tg} \alpha_2 = 0$$

$$\sqrt{x_1^2 + z_1^2} + \sqrt{x_2^2 + z_2^2} - l = 0$$

z této soustavy si vyjádříme

$$x_1 = z_1 \operatorname{tg} \alpha_1$$

$$x_2 = -z_2 \operatorname{tg} \alpha_2$$

odkud plyne (z předpokladu pohybu pouze po střeše, tj. že souřadnice  $z$  jsou záporné), že z první a třetí rovnice dostaneme

$$\lambda_1 = -\lambda_3 \frac{z_1 \operatorname{tg} \alpha_1}{\sqrt{z_1^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_1)}} = -\lambda_3 \frac{z_1}{|z_1|} \sin \alpha_1 = \lambda_3 \sin \alpha_1$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 \frac{z_2 \operatorname{tg} \alpha_2}{\sqrt{z_2^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_2)}} = \lambda_3 \frac{z_2}{|z_2|} \sin \alpha_2 = -\lambda_3 \sin \alpha_2$$

a druhá a čtvrtá na tvar



$$-m_1 g - \lambda_1 \operatorname{tg} \alpha_1 - \lambda_3 \cos \alpha_1 = 0$$

$$-m_2 g + \lambda_2 \operatorname{tg} \alpha_2 - \lambda_3 \cos \alpha_2 = 0$$

kde ještě provedeme dosazení za  $\lambda_1$  a  $\lambda_2$

$$-m_1 g - \lambda_3 \sin \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_1 - \lambda_3 \cos \alpha_1 = 0$$

$$-m_2 g - \lambda_3 \sin \alpha_2 \operatorname{tg} \alpha_2 - \lambda_3 \cos \alpha_2 = 0$$

čímž po vyjádření  $\lambda_3$  z každé rovnice dostaneme podmínku statické rovnováhy (pro libovolné souřadnice obou hmotných bodů svázaných pouze vazebními podmínkami)

$$\lambda_3 = -m_1 g \cos \alpha_1$$

$$\lambda_3 = -m_2 g \cos \alpha_2$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_1}$$

**4.3 Dva hmotné body  $m_1, m_2$  kloužou bez tření po parabole  $z = -\frac{x^2}{2p}$  a jsou spojeny nehmotným**

**vlákem délky  $r$ , které prochází ohniskem paraboly  $[0, 0, -\frac{p}{2}]$ . Která poloha hmotných bodů je rovnovážná ?**

poznamenejme, že tíhové pole má směr jako obvykle, totiž působí proti směru osy  $z$ .

tuto úlohu opět budeme řešit metodou Lagrangeových multiplikátorů (hledání extrémů na varietách)

síly působící na hmotné body jsou

$$\vec{F}_1 = (0, 0, -m_1 g)$$

$$\vec{F}_2 = (0, 0, -m_2 g)$$

napišme vazby, podle kterých se pohyb může uskutečnit

$$\varphi_1 \equiv \sqrt{x_1^2 + (z_1 + \frac{p}{2})^2} + \sqrt{x_2^2 + (z_2 + \frac{p}{2})^2} - r = 0$$

$$\varphi_2 \equiv z_1 + \frac{x_1^2}{2p} = 0$$

$$\varphi_3 \equiv z_2 + \frac{x_2^2}{2p} = 0$$

pro jednoduchost dalších výpočtů aplikací vazeb  $\varphi_2$  a  $\varphi_3$  na vazbu první dostaneme

$$\varphi_1 \equiv -z_1 - z_2 + p - r = 0$$

$$\varphi_2 \equiv z_1 + \frac{x_1^2}{2p} = 0$$

$$\varphi_3 \equiv z_2 + \frac{x_2^2}{2p} = 0$$

již zmiňovanou metodou Lagrangeových multiplikátorů dostaneme rovnice

$$\lambda_2 \frac{x_1}{p} = 0$$

$$\lambda_3 \frac{x_2}{p} = 0$$

$$-m_1 g + \lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

$$-m_2 g + \lambda_1 + \lambda_3 = 0$$

a k této soustavě patří ještě již zmiňované vazby

$$-z_1 - z_2 + p - r = 0$$

$$z_1 + \frac{x_1^2}{2p} = 0$$

$$z_2 + \frac{x_2^2}{2p} = 0$$

ze kterých dostaneme přípustná řešení

| $x_1$               | $z_1$ | $x_2$               | $z_2$ | $\lambda_1$ | $\lambda_2$    | $\lambda_3$ |
|---------------------|-------|---------------------|-------|-------------|----------------|-------------|
| 0                   | 0     | $\pm\sqrt{2p(r-p)}$ | $p-r$ | $m_2$       | $g(m_1 - m_2)$ | 0           |
| $\pm\sqrt{2p(r-p)}$ | $p-r$ | 0                   | 0     | 0           | $g(m_2 - m_1)$ | $m_1$       |

poznámka: povšimněme si, že kromě velikosti vazbových sil (udané Lagrangeovými multiplikátory) nezávisí rovnovážná poloha na hmotnostech.

**4.4 Nehmotné vlákno délky  $l$  je položeno přes vrcholek paraboly  $z = -\frac{x^2}{2p}$ . Jeho konce jsou zatíženy hmotnostmi  $m_1, m_2$ . Ve které poloze vlákna nastane rovnováha ?**

poznámka: k řešení tohoto příkladu, ostatně jako k mnoha dalším lze použít různé přístupy, znalosti a podobně - avšak i tentokrát použijeme do jisté míry (s ohledem na řešitelnost rovnic) univerzální Lagrangeův formalismus

začneme tedy tak, že popíšeme vazby, kterými se tělesa při svém pohybu řídí

$$\varphi_1 \equiv z_1 + \frac{x_1^2}{2p} = 0$$

$$\varphi_2 \equiv z_2 + \frac{x_2^2}{2p} = 0$$

$$\varphi_3 \equiv \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + z'^2} dx - l = 0$$

povšimněme si na vysvětlenou vazby  $\varphi_3$  - tato vazba vyjadřuje spojení obou hmotných bodů nehmotným vláknem délky  $l$ , která se docela snadno odvodí přes Pythagorovu větu aplikovanou na infinitesimální přírůstky  $(dl)^2 = (dx)^2 + (dz)^2$  - zbytek už si laskavý čtenář jistě domyslí sám

tuto vazbu si samozřejmě zjednodušíme a to následovně : ze vztahů

$$z = -\frac{x^2}{2p}, z' = -\frac{x}{p}$$

po dosazení do vazby  $\varphi_3$  dostaneme

$$\varphi_3 \equiv \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}} dx - l = 0$$

nyní se pustíme do hledání bodů statické rovnováhy - budeme postupovat obdobně jako v předchozím příkladě, a to metodou Lagrangeových multiplikátorů, čímž dostaneme tyto čtyři rovnice

$$\lambda_1 \frac{x_1}{p} - \lambda_3 \sqrt{1 + \frac{x_1^2}{p^2}} = 0$$

$$-m_1 g + \lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 \frac{x_2}{p} + \lambda_3 \sqrt{1 + \frac{x_2^2}{p^2}} = 0$$

$$-m_2 g + \lambda_2 = 0$$

matematická poznámka:  $\int_{x_1}^{x_2} f'(x) dx = f(x_2) - f(x_1)$  a proto jsme při odvozování předchozích

rovníc mohli použít  $\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}} dx \right) = -\sqrt{1 + \frac{x_1^2}{p^2}}$  et  $\frac{\partial}{\partial x_2} \left( \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}} dx \right) = \sqrt{1 + \frac{x_2^2}{p^2}}$

z těchto čtyř rovnic si vyjádříme

$$\lambda_1 = m_1 g$$

$$\lambda_2 = m_2 g$$

a po dosazení do zbylých dvou rovnic máme

$$m_1 g \frac{x_1}{p} - \lambda_3 \sqrt{1 + \frac{x_1^2}{p^2}} = 0$$

$$m_2 g \frac{x_2}{p} + \lambda_3 \sqrt{1 + \frac{x_2^2}{p^2}} = 0$$

odkud nakonec eliminací  $\lambda_3$  vyplyne rovnice

$$\frac{m_1 x_1}{\sqrt{1 + \frac{x_1^2}{p^2}}} + \frac{m_2 x_2}{\sqrt{1 + \frac{x_2^2}{p^2}}} = 0$$

to je ovšem jen jedna rovnice pro dvě neznámé - tu druhou nám zajistí dosud nepoužitá vazba

$$\varphi_3 \equiv \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}} dx - l = 0$$

spočtíme integrál

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}} dx = \left\{ \frac{x}{p} = \sinh \xi \right\} = \int_{\xi_1}^{\xi_2} p \cosh^2(\xi) d\xi = \frac{p}{4} [2\xi + \sinh 2\xi]_{\xi_1}^{\xi_2}$$

$$\xi = \operatorname{arcsinh} \frac{x}{p}$$

druhá rovnice tedy bude

$$\frac{p}{4} \left[ 2 \operatorname{arcsinh} \frac{x_2}{p} + \sinh \left( 2 \operatorname{arcsinh} \frac{x_2}{p} \right) \xi - 2 \operatorname{arcsinh} \frac{x_1}{p} - \sinh \left( 2 \operatorname{arcsinh} \frac{x_1}{p} \right) \xi \right] = l$$

kterou lze ještě nepatrně zjednodušit na

$$\frac{p}{2} \left[ \operatorname{arcsinh} \frac{x_2}{p} + \frac{x_2}{p} \sqrt{1 + \frac{x_2^2}{p^2}} - \operatorname{arcsinh} \frac{x_1}{p} - \frac{x_1}{p} \sqrt{1 + \frac{x_1^2}{p^2}} \right] = l$$

a tedy rovnovážné hodnoty souřadnic  $x_1, x_2$  jsou řešením těchto dvou zarámovaných rovnic.

**4.5 Hmotný bod m je vázán na elipsu ve svislé rovině s poloosami a (vodorovná), b (svislá),  $a < b$ . Kromě tíže g působí na bod pružina o tuhosti k uchycená ve středu elipsy, jejíž rovnovážná délka  $a_0 < a$ . Určete rovnovážné polohy bodu.**

souřadný systém zvolíme, jako obvykle, tak, střed souřadného systému umístíme přirozeně do středu elipsy a kladný směr osy y bude opět směřovat proti směru působení tíhového pole  
vazbu v takovéto soustavě potom zachycuje rovnice

$$\varphi \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \equiv b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 = 0$$

k nalezení rovnovážných poloh použijeme opět Lagrangeův formalismus, tj. metodu hledání extrému funkce na varietě - stacionární bod potenciálu U

vyjádříme si potenciální energii jako

$$U = mgy + \frac{1}{2} k (\sqrt{x^2 + y^2} - a_0)^2$$

hledejme tedy stacionární body této funkce dvou proměnných na varietě  $\varphi$  (pomocí Lagrangeových multiplikátorů - viz matematická analýza)

$$\frac{\partial U}{\partial x} - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = k \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} (\sqrt{x^2 + y^2} - a_0) - 2b^2 x \lambda = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = mg + k \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} (\sqrt{x^2 + y^2} - a_0) - 2a^2 y \lambda = 0$$

celkem se tedy dostáváme soustavu rovnic

$$x \left( 1 - 2b^2 \lambda - \frac{a_0}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = 0$$

$$y \left( 1 - 2a^2 \lambda - \frac{a_0}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \frac{mg}{k}$$

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 = 0$$

tuto soustavu řeší následující dva stacionární body:

$$x = 0, y = \pm b$$

a body, které jsou řešením této soustavy rovnic

$$x^2 = a^2 - \frac{a^2}{b^2} y^2, \text{ kde } x \neq 0$$

$$y \left( 1 - \frac{a_0}{\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{b^2} y^2 + y^2}} \right) = \frac{mg}{k} \frac{2b^2}{b^2 - a^2}$$

poznámka: z poslední rovnice je vidět, že při  $\frac{m}{k} \rightarrow 0$  je dalším přibližným stacionárním bodem  $x = \pm b, y = 0$

**4.6 Na přímce jsou dány tři ekvidistantní elektricky nabitě hmotné body s náboji  $e_1, e_2, e_3$ . Určete náboje tak, aby soustava byla v udané konfiguraci v rovnováze a ukažte, že tato rovnováha není stabilní.**

statická rovnováha pro ekvidistantní náboje znamená, že podle principu virtuální práce (virtuálního posunutí) musí platit

$$\sum_i F_i \delta x_i = 0$$

protože naším úkolem bude zjistit, je-li tato konfigurace v takové rovnováze stabilní či nikoliv, vyčíslíme nejdříve potenciál této soustavy

$$U(x_1, x_2, x_3) = \frac{e_1 e_2}{x_2 - x_1} + \frac{e_1 e_3}{x_3 - x_1} + \frac{e_2 e_3}{x_3 - x_2}$$

potom síly působící v této soustavě se vyjádří

$$F_i = - \frac{\partial U}{\partial x_i}$$

a podmínka statické rovnováhy je pak

$$- \sum_i \frac{\partial U}{\partial x_i} \delta x_i = 0$$

a protože  $\delta x_i$  můžou být obecně lineárně nezávislá je tato podmínka splněna právě když

$$- \frac{\partial U}{\partial x_i} = 0$$

což nás dovede v ekvidistantních bodech  $x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = a$ ;  $x_3 - x_1 = 2a$  na soustavu rovnic

$$- \frac{e_1 e_2}{a^2} - \frac{e_1 e_3}{4a^2} = 0$$

$$\frac{e_1 e_2}{a^2} - \frac{e_2 e_3}{a^2} = 0$$

$$\frac{e_1 e_3}{4a^2} + \frac{e_2 e_3}{a^2} = 0$$

odtud dostaneme podmínku pro rovnováhu

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_3 = \mathbf{e} \\ \mathbf{e}_2 &= -\frac{1}{4}\mathbf{e}_1 = -\frac{1}{4}\mathbf{e} \end{aligned}$$

abychom mohli nyní rozhodnout, zda-li je tato rovnováha stabilní, je nutné zjistit, jestli v bodech stability potenciál  $U$  nabývá minimum.

pro přehlednost nyní zvolme nové souřadnice  $y_i = x_i - x_2$ ,  $i \in \hat{3}$ , tj. spojíme novou soustavu souřadnou pevně s prostředním nábojem

potenciál má nyní tvar

$$U(y_1, y_3) = \frac{1}{4}e^2 \left( +\frac{1}{y_1} + 4\frac{1}{y_3 - y_1} - \frac{1}{y_3} \right) = \frac{1}{4}e^2 \frac{(y_1 + y_3)^2}{y_1 y_2 (y_3 - y_1)}$$

a budeme zkoumat extrém této funkce dvou reálných proměnných v bodě  $[y_1 = -a, y_3 = a]$

$$U'(y_1, y_3) = \frac{1}{4}e^2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{y_1^2} + \frac{4}{(y_3 - y_1)^2} \\ \frac{1}{y_3^2} - \frac{4}{(y_3 - y_1)^2} \end{pmatrix}$$

a budeme zkoumat definitnost druhé derivace potenciálu (podrobnosti vyšetřování reálných funkcí více proměnných se dozvíte v matematické analýze)

$$U''(y_1, y_3) = \frac{1}{2}e^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{y_1^3} + \frac{4}{(y_3 - y_1)^3} & -\frac{4}{(y_3 - y_1)^3} \\ -\frac{4}{(y_3 - y_1)^3} & -\frac{1}{y_3^3} + \frac{4}{(y_3 - y_1)^3} \end{pmatrix}$$

$$U''(-a, a) = \frac{1}{2} \frac{e^2}{a^3} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

tato matice je indefinitní a tudíž potenciál nemá v této konfiguraci minimum a rovnováha je proto nestabilní

**4.9 Na hmotný bod vázaný na kulové ploše  $\varphi \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - r^2 = 0$  působí konstantní gravitační síla  $\vec{F} = (0, 0, -mg)$ . Určete rovnovážné polohy  $(x_i^0)$  a složky reakční síly  $R_i^0$  v  $(x_i^0)$ .**

opět použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů a tak dostaneme podmínky statické rovnováhy jako

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - r^2 = 0$$

$$0 + 2\lambda x_1 = 0$$

$$0 + 2\lambda x_2 = 0$$

$$-mg + 2\lambda x_3 = 0$$

odkud dostaneme řešení

$$\vec{x}^0 = (0, 0, \pm r)$$

a reakční síla v těchto bodech je

$$\vec{R}^0 = (0, 0, mg)$$

**4.10 Hmotný bod, na který působí konstantní gravitační síla  $\vec{F} = (0, 0, -mg)$  je vázán na dvě válcové plochy  $\varphi_1 \equiv x_1^2 + x_3^2 - a^2 = 0$  a  $\varphi_2 \equiv x_1^2 + x_2^2 - b^2 = 0$ , kde  $a^2 > b^2 > 0$ . Určete rovnovážné polohy  $(x_i^0)$  a složky reakční síly  $R_i^0$  v  $(x_i^0)$ . Které rovnovážné polohy jsou stabilní ?**

protože budeme na konci rozhodovat o stabilitě, použijeme v tomto příkladě metodu hledání extrému funkce více proměnné na varietách z matematické analýzy - zkoumaná funkce bude potenciál  $U$  a budou nás zajímat

(a) stacionární body této funkce vzhledem k varietám

(b) v kterých bodech má tato funkce minimum vzhledem k varietám (v takových bodech je potom rovnováha stabilní).

**(a) stacionární body**

sestavme funkci

$$\Lambda = U - \lambda_1 \varphi_1 - \lambda_2 \varphi_2$$

po dosazení

$$\Lambda = mgx_3 - \lambda_1(x_1^2 + x_3^2 - a^2) - \lambda_2(x_1^2 + x_2^2 - b^2)$$

a hledejme její stacionární body (tj.  $\frac{\partial \Lambda}{\partial x_i} = 0$ )

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x_1} = -2\lambda_1 x_1 - 2\lambda_2 x_1 = 0$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x_2} = -2\lambda_2 x_2 = 0$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} = mg - 2\lambda_1 x_3 = 0$$

a nezapomeňme ještě na vazbové podmínky

$$\Phi \equiv \begin{cases} \varphi_1 \equiv x_1^2 + x_3^2 - a^2 = 0 \\ \varphi_2 \equiv x_1^2 + x_2^2 - b^2 = 0 \end{cases}$$

takovouto soustavu rovnic potom řeší (pro přehlednost liché indexy řešení odpovídají bodům majícím kladnou složku odpovídající souřadnici  $x_3$  a sudé opačně - tj. body s lichými indexy jsou "nahore" a body se sudými "dole", budeme-li se orientovat podle působení tíhového pole)

| indexy řešení | $x_1$   | $x_2$   | $x_3$               | $\lambda_1$                     | $\lambda_2$                     | $\vec{R}$ |
|---------------|---------|---------|---------------------|---------------------------------|---------------------------------|-----------|
| ①<br>③        | 0       | $\pm b$ | a                   | $\frac{mg}{2a}$                 | 0                               | (0,0,mg)  |
| ②<br>④        | 0       | $\pm b$ | -a                  | $-\frac{mg}{2a}$                | 0                               | (0,0,mg)  |
| ⑤<br>⑦        | $\pm b$ | 0       | $\sqrt{a^2 - b^2}$  | $\frac{mg}{2\sqrt{a^2 - b^2}}$  | $-\frac{mg}{2\sqrt{a^2 - b^2}}$ | (0,0,mg)  |
| ⑥<br>⑧        | $\pm b$ | 0       | $-\sqrt{a^2 - b^2}$ | $-\frac{mg}{2\sqrt{a^2 - b^2}}$ | $\frac{mg}{2\sqrt{a^2 - b^2}}$  | (0,0,mg)  |

kde jsme použili  $\vec{R} = (2x_1\lambda_1 + 2x_1\lambda_2, 2\lambda_2x_2, 2\lambda_1x_3)$

**(b) otázka minima ve stacionárních bodech**

první derivaci funkce  $\Lambda$  lze obecně zapsat (viz předchozí rovnice)

$$\Lambda' = \begin{pmatrix} -2\lambda_1x_1 - 2\lambda_2x_1 \\ -2\lambda_2x_2 \\ mg - 2\lambda_1x_3 \end{pmatrix}$$

druhá derivace bude

$$\Lambda'' = \begin{pmatrix} -2\lambda_1 - 2\lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & -2\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & -2\lambda_1 \end{pmatrix}$$

zkoumejme nyní definitnost v jednotlivých stacionárních bodech a to tak, že zúžíme druhou derivaci na tečný prostor (podrobnosti viz matematická analýza)

protože  $\Phi' = \begin{pmatrix} 2x_1 & 0 & 2x_3 \\ 2x_1 & 2x_2 & 0 \end{pmatrix}$ , dostaneme v konkrétních případech

|        | $\Phi'$                                                                           | $\Lambda''$                                                                                      | příslušná kvadratická forma                                                                                                                                                                                                                                  |
|--------|-----------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ①<br>③ | $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2a \\ 0 & \pm 2b & 0 \end{pmatrix}$                      | $\frac{mg}{a} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$               | $Q(h) = \frac{mg}{a} (h, 0, 0) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{mg}{a} h^2$<br>lokální maximum $\Rightarrow$ nestabilní rovnovážná poloha                              |
| ②<br>④ | $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2a \\ 0 & \pm 2b & 0 \end{pmatrix}$                     | $\frac{mg}{a} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$                 | $Q(h) = \frac{mg}{a} (h, 0, 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{mg}{a} h^2$<br>lokální minimum $\Rightarrow$ stabilní rovnovážná poloha                                   |
| ⑤<br>⑦ | $\begin{pmatrix} \pm 2b & 0 & 2\sqrt{a^2 - b^2} \\ \pm 2b & 0 & 0 \end{pmatrix}$  | $\frac{mg}{\sqrt{a^2 - b^2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ | $Q(h) = \frac{mg}{\sqrt{a^2 - b^2}} (0, h, 0) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ h \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{mg}{\sqrt{a^2 - b^2}} h^2$<br>lokální minimum $\Rightarrow$ stabilní rovnovážná poloha    |
| ⑥<br>⑧ | $\begin{pmatrix} \pm 2b & 0 & -2\sqrt{a^2 - b^2} \\ \pm 2b & 0 & 0 \end{pmatrix}$ | $\frac{mg}{\sqrt{a^2 - b^2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $Q(h) = \frac{mg}{\sqrt{a^2 - b^2}} (0, h, 0) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ h \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{mg}{\sqrt{a^2 - b^2}} h^2$<br>lokální maximum $\Rightarrow$ nestabilní rovnovážná poloha |

poznámka k řešení: postup užitý v tomto příkladě není jediný možný, je však názorný z hlediska aplikace poznatků matematické analýzy



**4.11 Pomocí d'Alembertova principu odvodte pohybovou rovnici matematického kyvadla.**

zavedeme úhel  $\varphi$  jako obecnou souřadnici a pomocí něj vyjádříme všechny veličiny vystupující v d'Alembertově principu

d'Alembertův princip v kartézských souřadnicích je (kde osa  $y$  směřuje ve směru tíhového zrychlení)

$$(-m\ddot{x})\delta x + (mg - m\ddot{y})\delta y = 0$$

a použijeme vzhledem k povaze matematického kyvadla transformace

$$x = r \sin \varphi$$

$$y = r \cos \varphi$$

kde

$$\ddot{x} = -r\dot{\varphi}^2 \sin \varphi + r\ddot{\varphi} \cos \varphi$$

$$\ddot{y} = -r\dot{\varphi}^2 \cos \varphi - r\ddot{\varphi} \sin \varphi$$

a

$$\delta x = r \cos \varphi \delta \varphi$$

$$\delta y = -r \sin \varphi \delta \varphi$$

transformujeme d'Alembertův princip na

$$(mr\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - mr\ddot{\varphi} \cos \varphi)r \cos \varphi \delta \varphi - (mg + mr\dot{\varphi}^2 \cos \varphi + mr\ddot{\varphi} \sin \varphi)r \sin \varphi \delta \varphi = 0$$

$$mr^2 \left( -\ddot{\varphi} - \frac{g}{r} \sin \varphi \right) \delta \varphi = 0$$

a má-li být tato rovnost splněna pro libovolné  $\delta \varphi$ , dostáváme pohybovou rovnici matematického kyvadla

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{r} \sin \varphi = 0$$

**4.13 Dvě tělesa hmotností  $m_1, m_2$  jsou spojena nehmotným vláknem délky  $l$  klouzajícím bez tření po pevném válci o poloměru  $R$ . Určete pohyb soustavy pod vlivem tíže s použitím d'Alembertova principu. Vypočítejte sílu napínající vlákno.**

nechť kladný směr osy  $z$  směřuje ve směru působení tíhového zrychlení

zapišme vazbu mezi tělesy jako

$$z_1 + z_2 = l - \pi R$$

odkud plyne

$$\ddot{z}_1 = -\ddot{z}_2$$

zapišme d'Alembertův princip

$$(m_1 g - T - m_1 \ddot{z}_1) \delta z_1 + (m_2 g - T - m_2 \ddot{z}_2) \delta z_2 = 0$$

z kterého, má-li být tato rovnost splněna pro libovolné  $\delta z_i$ , obdržíme soustavu rovnic (po použití vazby)

$$m_1 g - T - m_1 \ddot{z}_1 = 0$$

$$m_2 g - T + m_2 \ddot{z}_1 = 0$$

snadno z této soustavy rovnic vyjádříme

$$T = 2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

a

$$\ddot{z}_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$

odkud integrací dostáváme

$$z_1(t) = \frac{1}{2} \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g t^2 + \dot{z}_1^0 t + z_1^0$$

$$z_2(t) = -\frac{1}{2} \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g t^2 - \dot{z}_1^0 t - z_1^0 + l - \pi R$$

**4.14 Těžní klec. Lano nesoucí klec o hmotnosti  $M$  je vedeno přes kolo poloměru  $R$  a je taženo silou  $F=F(t)$ . Pomocí d'Alembertova principu odvoďte pohybovou rovnici klece. Moment setrvačnosti kola hmotnosti  $m$  vyjádřete pomocí gyračního poloměru  $R_g$ ,  $I = m R_g^2$ .**

d'Alembertův princip pro tuto situaci zní

$$(F - Mg - M\ddot{z})\delta z + (-I\ddot{\phi})\delta\phi = 0$$

s použitím vztahů

$$\ddot{\phi} = \frac{\ddot{z}}{R}$$

$$\delta z = R \delta\phi$$

dostáváme

$$(F - Mg - M\ddot{z})\delta z + \left(-m \frac{R_g^2}{R}\right) \frac{\delta z}{R} = 0$$

a tedy

$$(F - Mg - M\ddot{z} - m \frac{R_g^2}{R^2} \ddot{z})\delta z = 0$$

odkud pohybová rovnice

$$\left( M + m \frac{R_g^2}{R^2} \right) \ddot{z} = F - Mg$$

**4.15 Pomocí d'Alembertova principu odvoďte pohybovou rovnici rotačního tělesa ( hmotnost  $m$ , poloměr  $R$ , gyrační poloměr  $R_g$ ), které se valí bez klouzání po rovině nakloněné pod úhlem  $\alpha$ .**

d'Alembertův princip v této situaci je

$$(mg \sin \alpha - m\ddot{s})\delta s + (-I\ddot{\phi})\delta\phi = 0$$

transformujeme pomocí vztahů

$$\delta\varphi = \frac{\delta s}{R}$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{\ddot{s}}{R}$$

$$I = mR_g^2$$

na

$$(mg \sin \alpha - m\ddot{s})\delta s + (-mR_g^2 \frac{\ddot{s}}{R}) \frac{\delta s}{R} = 0$$

a po úpravě dostaneme

$$m \left[ g \sin \alpha - \ddot{s} \left( 1 + \frac{R_g^2}{R^2} \right) \right] \delta s = 0$$

odkud obdržíme pohybovou rovnici

$$\ddot{s} = \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{R_g^2}{R^2}}$$

**4.18 Přesvědčete se přímým výpočtem, že změna vázanosti  $Z(\ddot{x}_i)$  při změně zrychlení o  $\delta\ddot{x}_i$  je**

**rovna  $Z(\ddot{x}_i + \delta\ddot{x}_i) - Z(\ddot{x}_i) = \sum_i (m_i \ddot{x}_i - F_i) \delta\ddot{x}_i + \frac{1}{2} \sum_i m_i (\delta\ddot{x}_i)^2$  a tedy podle Gaussova principu**

**$\sum_i F_i - m_i \ddot{x}_i) \delta\ddot{x}_i = 0$ , ( $\delta x_i = \delta \dot{x}_i = 0$ )  $Z$  nabývá při skutečném pohybu svého minima.**

veličina vázanost (nutkání) představuje

$$Z(\ddot{x}_i) = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left( \ddot{x}_i - \frac{F_i}{m_i} \right)^2$$

zkoumejme tedy

$$Z(\ddot{x}_i + \delta\ddot{x}_i) - Z(\ddot{x}_i) = \frac{1}{2} \sum_i \left\{ m_i [(\ddot{x}_i + \delta\ddot{x}_i)^2 - \ddot{x}_i^2] - 2F_i [\ddot{x}_i + \delta\ddot{x}_i - \ddot{x}_i] + \frac{F_i^2}{m_i} - \frac{F_i^2}{m_i} \right\}$$

$$Z(\ddot{x}_i + \delta\ddot{x}_i) - Z(\ddot{x}_i) = \frac{1}{2} \sum_i m_i [2\ddot{x}_i \delta\ddot{x}_i + (\delta\ddot{x}_i)^2] - 2F_i \delta\ddot{x}_i = \sum_i (m_i \ddot{x}_i - F_i) \delta\ddot{x}_i + \frac{1}{2} \sum_i m_i (\delta\ddot{x}_i)^2$$

což bylo dokázati

**4.20 Vypočtete hodnotu akce  $S = \int_0^T L dt$  pro**

**(a) skutečný pohyb při volném pádu hmotného bodu hmotnosti  $m$ ,  $z_a(t) = \frac{1}{2}gt^2$**

**(b) variovaný pohyb  $z_b(t) = ct$ , kde  $c$  je určeno podmínkou pevných konců  $z_b(T) = z_a(T)$**

**(c) variovaný pohyb  $z_c(t) = at^3$ , kde  $a$  je určeno podmínkou pevných konců  $z_c(T) = z_a(T)$ .**

**Ukažte, že hodnota  $S$  je v případě (a) menší než v případech (b), (c).**

Lagrangeova funkce popisující volný pád je

$$L = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 + mgz$$

nejprve určíme z podmínek pevných konců konstantu  $c$

$$z_b(T) = cT = z_a(T) = \frac{1}{2} gT^2$$

$$c = \frac{1}{2} gT$$

a konstantu  $a$

$$z_c(T) = aT^3 = z_a(T) = \frac{1}{2} gT^2$$

$$a = \frac{1}{2} \frac{g}{T}$$

dosazujeme tedy za  $z(t)$  postupně  $z(a)$ ,  $z(b)$  a  $z(c)$  a spočítáme hodnotu akce

$$S_a = \int_0^T L dt = \int_0^T \frac{1}{2} mg^2 t^2 + \frac{1}{2} mg^2 t^2 dt = \frac{1}{3} mg^2 T^3$$

$$S_b = \int_0^T L dt = \int_0^T \frac{1}{8} mg^2 T^2 + \frac{1}{2} mg^2 Tt dt = \frac{3}{8} mg^2 T^3$$

$$S_c = \int_0^T L dt = \int_0^T \frac{9}{8} \frac{mg^2}{T^2} t^4 + \frac{1}{2} \frac{mg^2}{T} t^3 dt = \frac{7}{20} mg^2 T^3$$

je tedy zřejmé, že skutečnému pohybu skutečně odpovídá nejmenší akce

což bylo dokázati a spočítati

**4.21 Bylo zjištěno, že hmotný bod při volném pádu s nulovou počáteční rychlostí urazí dráhu  $z_0$  za dobu  $t_0 = \sqrt{\frac{2z_0}{g}}$ . Předpokládejme, že pro  $z \neq z_0$  doba pádu není známa a že víme jen to, že  $z(t)$  závisí na  $t$  podle vztahu  $z(t) = at + bt^2$ . Ukažte, že když konstanty  $a, b$  zvolíte tak, aby doba pádu z výšky  $z_0$  byla  $t_0$ , pak akce  $S = \int_0^{t_0} L dt$  bude mít extrém jen při  $a = 0, b = \frac{1}{2} g$ .**

Lagrangeova funkce popisující volný pád je

$$L = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 + mgz$$

kde ovšem

$$z(t) = at + bt^2$$

spočítáme akci

$$S(a, b) = \int_0^{t_0} \frac{1}{2} m(a^2 + 2abt + b^2 t^2) + mgat + mgbt^2 dt = \frac{1}{6} m [3a^2 t_0 + 6abt_0^2 + 4b^2 t_0^3 + 3agt_0^2 + 2bgt_0^3]$$

zvolme nyní konstanty  $a, b$  tak, aby

$$z(t_0) = z_0 = at_0 + bt_0^2$$

kde

$$t_0 = \sqrt{\frac{2z_0}{g}}$$

odkud zřejmě

$$z_0 = \frac{1}{2}gt_0^2$$

celkem jsme dostali rovnici

$$\frac{1}{2}gt_0^2 = at_0 + bt_0^2$$

odkud si vyjádříme

$$a = \frac{1}{2}(g - 2b)t_0$$

nyní si můžeme pomocí tohoto vztahu vyjádřit akci už jen jako funkci jedné proměnné  $b$

$$S(b) = \frac{1}{6}m \left[ 3\left(\frac{g}{2} - b\right)^2 t_0^3 + 6\left(\frac{g}{2} - b\right)bt_0^3 + 4b^2t_0^3 + 3\left(\frac{g}{2} - b\right)gt_0^3 + 2bgt_0^3 \right] = mt_0^3 \left[ \frac{3}{8}g^2 - \frac{1}{6}gb + \frac{1}{6}b^2 \right]$$

abychom našli extrém této funkce, musíme znát stacionární bod její derivace

$$S'(b_0) = \frac{1}{6}mt_0^3 [-g + 2b_0] = 0$$

$$b_0 = \frac{g}{2}$$

a dopočítáme ještě

$$a_0 = \frac{1}{2}(g - 2b_0)t_0 = 0$$

což bylo dokázati

**4.22 Vypočítejte akci  $S = \frac{1}{2} \int_0^1 \dot{x}^2 - x^2 \, dt$  pro jednoparametrický systém trajektorií  $x = x_\epsilon(t) = \frac{\sin t + \epsilon t}{\sin 1 + \epsilon}$  a**

**vyneste závislost  $S = S(\epsilon)$  do grafu.**

nejprve si tedy spočteme první derivaci (respektive kvadrát derivace) trajektorie

$$\dot{x}_\epsilon(t) = \frac{\cos t + \epsilon}{\sin 1 + \epsilon}$$

$$\dot{x}_\epsilon^2 = \frac{\cos^2 t + 2\epsilon \cos t + \epsilon^2}{(\sin 1 + \epsilon)^2}$$

$$x_\epsilon^2 = \frac{\sin^2 t + 2\epsilon t \sin t + \epsilon^2 t^2}{(\sin 1 + \epsilon)^2}$$

spočteme tedy akci

$$S = \frac{1}{2(\sin 1 + \epsilon)^2} \int_0^1 \cos^2 t + 2\epsilon \cos t + \epsilon^2 - \sin^2 t - 2\epsilon t \sin t - \epsilon^2 t^2 dt$$

jemně ještě zjednodušíme

$$S = \frac{1}{2(\sin 1 + \epsilon)^2} \int_0^1 \cos 2t + 2\epsilon \cos t + \epsilon^2 - 2\epsilon t \sin t - \epsilon^2 t^2 dt$$

a ze znalostí integrálů, zvláště pak

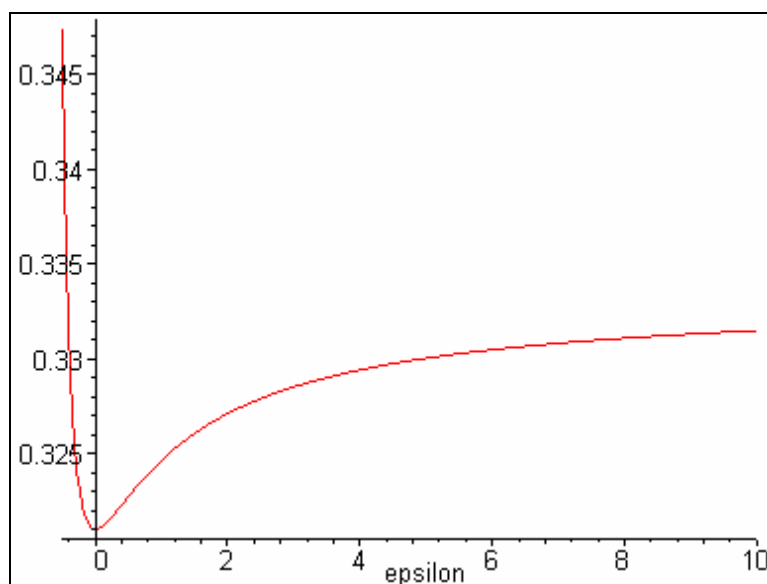
$$\int_0^1 t \sin t dt = -\cos 1 + \int_0^1 \cos t dt = \sin 1 - \cos 1$$

dostaneme

$$S = \frac{1}{2(\sin 1 + \epsilon)^2} \left( \frac{1}{2} \sin 2 + 2\epsilon \sin 1 + \epsilon^2 - 2\epsilon \sin 1 + 2\epsilon \cos 1 - \frac{1}{3} \epsilon^2 \right)$$

$$S = \frac{3 \sin 1 \cos 1 + 6\epsilon \cos 1 + 2\epsilon^2}{6(\sin 1 + \epsilon)^2}$$

graf akce v závislosti na  $\epsilon$



#### 4.24 Zapište Lagrangeovu funkci a pohybové rovnice částice v poli $U(x)$ , jestliže zavedeme "místní čas" $\tau = t - \lambda x$ .

Lagrangeova funkce se při přechodu k novým obecným souřadnicím a "času" transformuje takto

$$L'(x, \frac{dx}{d\tau}, \tau) = L(x, \frac{dx}{dt}, t) \frac{dt}{d\tau}$$

Lagrangeova funkce v tomto případě je

$$L(x, \frac{dx}{d\tau}, \tau) = \frac{1}{2} m \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 - U(x)$$

a pomocí vztahů

$$t = \tau + \lambda x$$

ji transformujeme

$$L'(x, \frac{dx}{d\tau}, \tau) = L(x, \frac{dx}{dt}, t) \frac{dt}{d\tau} = \left[ \frac{1}{2} m \left( \frac{dx}{dt} \frac{dt}{d\tau} \right)^2 - U(x) \right] \left( 1 + \lambda \frac{dx}{d\tau} \right) = \frac{1}{2} m \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 \frac{1}{1 + \lambda \frac{dx}{d\tau}} - \left( 1 + \lambda \frac{dx}{d\tau} \right) U(x)$$

a tedy zkráceně můžeme psát

$$L'(x, \dot{x}, \tau) = \frac{1}{2} m \frac{\dot{x}^2}{1 + \lambda \dot{x}} - (1 + \lambda \dot{x}) U(x)$$

**4.25 Jak se transformuje Lagrangeova funkce  $L = -\sqrt{1 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2}$  při přechodu k souřadnicím  $q$  a**

**"času"  $\tau$  podle vztahů  $x = q \cosh \lambda + \tau \sinh \lambda$ ,  $t = q \sinh \lambda + \tau \cosh \lambda$  (Lorentzova transformace) ?**

pomocí vztahů

$$dx = \cosh \lambda dq + \sinh \lambda d\tau$$

$$dt = \sinh \lambda dq + \cosh \lambda d\tau$$

přetransformujeme Lagrangeovu funkci

$$\begin{aligned} L' &= L \frac{dt}{d\tau} = - \left( \sinh \lambda \frac{dq}{d\tau} + \cosh \lambda \frac{d\tau}{d\tau} \right) \sqrt{1 - \left( \frac{\cosh \lambda dq + \sinh \lambda d\tau}{\sinh \lambda dq + \cosh \lambda d\tau} \right)^2} = \\ &= - \sqrt{\frac{(\sinh \lambda dq + \cosh \lambda d\tau)^2}{(d\tau)^2} \frac{(\sinh \lambda dq + \cosh \lambda d\tau)^2 - (\cosh \lambda dq + \sinh \lambda d\tau)^2}{(\sinh \lambda dq + \cosh \lambda d\tau)^2}} = \\ &= - \sqrt{\frac{\text{sh}^2 \lambda (dq)^2 + 2 \text{sh} \lambda \text{ch} \lambda dq d\tau + \text{ch}^2 \lambda (d\tau)^2 - \text{ch}^2 \lambda (dq)^2 - 2 \text{sh} \lambda \text{ch} \lambda dq d\tau - \text{sh}^2 \lambda (d\tau)^2}{(d\tau)^2}} = \\ &= - \sqrt{\frac{\text{sh}^2 \lambda (dq)^2 + 2 \text{sh} \lambda \text{ch} \lambda dq d\tau + \text{ch}^2 \lambda (d\tau)^2 - \text{ch}^2 \lambda (dq)^2 - 2 \text{sh} \lambda \text{ch} \lambda dq d\tau - \text{sh}^2 \lambda (d\tau)^2}{(d\tau)^2}} = \\ &= - \sqrt{\frac{(d\tau)^2 - (dq)^2}{(d\tau)^2}} \end{aligned}$$

a tedy konečný výsledek

$$L' = - \sqrt{1 - \left( \frac{dq}{d\tau} \right)^2}$$

## KAPITOLA 5: HAMILTONŮV FORMALISMUS

### 5.2 Napište Hamiltonovu funkci volného hmotného bodu v kartézských, sférických a cylindrických souřadnicích.

Hamiltonova funkce v obecných souřadnicích je definovaná takto

$$H(p_j, q_j, t) = \sum_j p_j \dot{q}_j - L(q_j, \dot{q}_j, t)$$

kde v našem případě platí

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

(a) kartézské souřadnice

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z)$$

odkud

$$p_x = m\dot{x}$$

$$p_y = m\dot{y}$$

$$p_z = m\dot{z}$$

a zpětně si vyjádříme časové derivace souřadnice

$$\dot{x} = \frac{1}{m} p_x$$

$$\dot{y} = \frac{1}{m} p_y$$

$$\dot{z} = \frac{1}{m} p_z$$

takže Hamiltonova funkce dostane tvar

$$H = \frac{1}{m} \sum_{j \in \{x, y, z\}} p_j^2 - \frac{1}{2} m \left( \frac{1}{m} p_j \right)^2 + U(x, y, z) = \frac{1}{2m} \sum_{j \in \{x, y, z\}} p_j^2 + U(x, y, z)$$

(b) polární souřadnice

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + r^2 \dot{\theta}^2) - U(r, \phi, \theta)$$

odkud

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m r^2 \dot{\phi} \sin^2 \theta$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta}$$

a zpětně



$$\dot{r} = \frac{1}{m} p_r$$

$$\dot{\phi} = \frac{1}{mr^2 \sin^2 \theta} p_\phi$$

$$\dot{\theta} = \frac{1}{mr^2} p_\theta$$

Hamiltonova funkce poté dostane tvar

$$H = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\phi^2}{r^2} + \frac{p_\theta^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + U(r, \phi, \theta)$$

(c) cylindrické souřadnice

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - U(r, \phi, z)$$

odkud dostaneme

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2 \dot{\phi}$$

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$$

zpětně si vyjádříme

$$\dot{r} = \frac{1}{m} p_r$$

$$\dot{\phi} = \frac{1}{mr^2} p_\phi$$

$$\dot{z} = \frac{1}{m} p_z$$

a Hamiltonova funkce dostává tvar

$$H = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\phi^2}{r^2} + p_z^2 \right) + U(r, \phi, z)$$

**5.3 Sestavte Hamiltonovy rovnice pro pohyb volného hmotného bodu v poli konzervativních sil (v kartézských souřadnicích) a ukažte, že získané rovnice jsou ekvivalentní s rovnicemi Newtonovými.**

Hamiltonovy rovnice jsou dány vztahy

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$$

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$$

uplatníme tedy znalost Hamiltonovy funkce v kartézských souřadnicích (viz předchozí příklad)

$$H = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + U(x_1, x_2, x_3)$$

a po dosazení do výše zmíněných rovnic dostaneme, že pro  $j \in \hat{3}$  platí

$$\dot{x}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} = \frac{1}{m} p_j$$

což se dalo očekávat neb se jedná o hybnost a z druhé rovnosti dostaneme při použití prvního výsledku

$$\dot{p}_j = m\ddot{x}_j = -\frac{\partial H}{\partial x_j} = -\frac{\partial U}{\partial x_j}$$

a zapíšeme-li tuto rovnici vektorově, dostáváme výsledek

$$\dot{\vec{p}} = -\nabla U$$

#### 5.4 Napište Hamiltonovu funkci harmonického oscilátoru.

Lagrangeova funkce harmonického oscilátoru má tvar

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

Hamiltonovu funkci dostaneme použitím

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{x} - L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

a po dosazení výrazu

$$\dot{x} = \frac{1}{m}p$$

obdržíme Hamiltonovu funkci

$$H(x, p) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

#### 5.5 Sestavte Hamiltonovy rovnice pro pohyb volného hmotného bodu pod vlivem centrální síly s potenciálem $U(r)$ ve sférických souřadnicích. Určete integrály pohybu.

Hamiltonova funkce v sférických souřadnicích má tvar

$$H = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\phi^2}{r^2} + \frac{p_\theta^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + U(r)$$

Hamiltonovy rovnice

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}$$

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2}$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2 \sin^2 \theta}$$

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\varphi^2}{mr^3} + \frac{p_\theta^2}{mr^3 \sin^2 \theta} - \frac{\partial U}{\partial r}$$

$$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{integrál pohybu}$$

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{p_\theta^2}{mr^2} \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta}$$

**5.6 Hmotný bod  $m$  je vázán na válcovou plochu  $x^2 + y^2 = R^2$  a pohybuje se pod vlivem centrální elastické síly  $\vec{F} = -k\vec{r}$ . Určete Hamiltonovu funkci, sestavte Hamiltonovy rovnice a řešte je (v cylindrických souřadnicích).**

Hamiltonova funkce volného hmotného bodu v cylindrických souřadnicích (viz příklad 5.2) je dána vztahem

$$H = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} + p_z^2 \right) + U(r, \varphi, z)$$

kde ovšem  $r = R = \text{konst}$  a  $U(r, \varphi, z) = U(z) = \frac{1}{2} k \underbrace{(x^2 + y^2)}_{R^2} + z^2 = \frac{1}{2} k(R^2 + z^2)$

mějme tedy tuto Hamiltonovu funkci s přesností na konstantu

$$H = \frac{1}{2m} \left( \frac{p_\varphi^2}{R^2} + p_z^2 \right) + \frac{1}{2} k z^2$$

Hamiltonovy pohybové rovnice mají tvar

$$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{integrál pohybu}$$

$$\dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = -kz$$

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{1}{m} p_z \quad \text{odkud } p_z = m\dot{z}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{1}{mR^2} p_\varphi \quad \text{odkud } p_\varphi = mR^2\dot{\varphi}$$

takže máme tuto soustavu diferenciálních rovnic a po dosazení dostaneme rovnice

$$\dot{p}_z = m\ddot{z} = -kz$$

$$\dot{p}_\varphi = mR^2\ddot{\varphi} = 0$$

kterou řeší

$$z(t) = A \cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \delta)$$

$$\varphi(t) = v_{\varphi 0}t + \varphi_0$$

**5.7 Napište Hamiltonovu funkci částice s nábojem  $e$  a hmotností  $m$  v daném vnějším elektromagnetickém poli s potenciály  $\varphi(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{A}(\vec{r}, t)$ .**

napišme nejprve Lagrangeovu funkci a drobě si ji upravme

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - e(\varphi - \dot{\vec{r}} \vec{A}) = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 + e \dot{\vec{r}} \vec{A} - e\varphi$$

pomocí obecné hybnosti

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m \dot{\vec{r}} + e \vec{A}$$

odvodíme, že

$$\dot{\vec{r}} = \frac{1}{m} (\vec{p} - e \vec{A})$$

nyní na základě Lagrangeovy funkce sestavíme Hamiltonovu funkci tak, že za  $\dot{\vec{r}}$  dosadíme z předešlého vztahu

$$H = \vec{p} \dot{\vec{r}} - L = \frac{1}{m} \vec{p} (\vec{p} - e \vec{A}) - \frac{1}{2} m \frac{1}{m^2} (\vec{p} - e \vec{A})^2 - \frac{1}{m} (\vec{p} - e \vec{A}) e \vec{A} + e\varphi$$

$$H = \frac{1}{2m} \vec{p}^2 - \frac{e}{m} \vec{p} \vec{A} + \frac{1}{2m} e^2 \vec{A}^2 + e\varphi$$

$$H = \frac{1}{2m} (\vec{p} - e \vec{A})^2 + e\varphi$$

### 5.8 Napište Hamiltonovu funkci částice v neinerciální soustavě souřadné rotující s konstantní úhlovou rychlostí $\vec{\Omega}$ .

vyjdeme ze vztahu pro energii v neinerciální soustavě

$$H = E = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 + U - \vec{p} \times \vec{r} \cdot \vec{\Omega}$$

a dosadíme do něj z výrazu pro hybnost

$$\vec{v} = \frac{1}{m} \vec{p}$$

čímž obdržíme

$$H = \frac{1}{2m} \vec{p}^2 + U - \vec{p} \times \vec{r} \cdot \vec{\Omega}$$

### 5.9 Najděte Routhovu funkci symetrického setrvačnicku ve vnějším poli $U(\varphi, \theta)$ , vyloučí-li se cyklická souřadnice $\psi$ .

vyjdeme z Lagrangeovy funkce

$$L = \frac{I_1}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 - U(\varphi, \theta)$$

obecnou hybnost ve směru  $\psi$  spočítáme z

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)$$

a zpětně dostaneme, že

$$\dot{\psi} = \frac{1}{I_3} p_{\psi} - \dot{\phi} \cos \theta$$

vyloučíme  $\psi$ , tj. Routhovu funkci budeme počítat jako

$$R = p_{\psi} \dot{\psi} - L = \frac{1}{I_3} p_{\psi}^2 - p_{\psi} \dot{\phi} \cos \theta - \frac{I_1}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) - \frac{I_3}{2} \left( \frac{1}{I_3} p_{\psi} - \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\phi} \cos \theta \right)^2 + U(\phi, \theta)$$

$$R = \frac{1}{2I_3} p_{\psi}^2 - p_{\psi} \dot{\phi} \cos \theta - \frac{I_1}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + U(\phi, \theta)$$

### 5.10 Odvoďte Hamiltonovu funkci, zvolíte-li za Lagrangeovu funkci výraz

$$L = \left[ \frac{1}{2} m(\dot{x} + ax)^2 - \frac{1}{2} m(b^2 - a^2)x^2 \right] e^{2at}$$

Ukažte, že Hamiltonovy rovnice jsou ekvivalentní rovnici  $\ddot{x} + 2a\dot{x} + b^2x = 0$  pro tlumený harmonický oscilátor.

vyjádříme nejprve obecnou hybnost

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m(\dot{x} + ax)e^{2at}$$

odkud zřejmě

$$\dot{x} = \frac{e^{-2at}}{m} p - ax$$

sestavme Hamiltonovu funkci

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{x} - L = \left[ m(\dot{x} + ax)\dot{x} - \frac{1}{2} m(\dot{x} + ax)^2 + \frac{1}{2} m(b^2 - a^2)x^2 \right] e^{2at}$$

$$H = \frac{1}{2} m \left[ \dot{x}^2 - 2a^2 x^2 + b^2 x^2 \right] e^{2at}$$

a dosadíme sem za  $\dot{x}$

$$H = \frac{1}{2} m \left[ \left( \frac{e^{-2at}}{m} p - ax \right)^2 - 2a^2 x^2 + b^2 x^2 \right] e^{2at}$$

$$H = \frac{1}{2} m \left[ \frac{e^{-4at}}{m^2} p^2 - 2 \frac{e^{-2at}}{m} pax + a^2 x^2 - 2a^2 x^2 + b^2 x^2 \right] e^{2at}$$

$$H = \frac{e^{-2at}}{2m} p^2 - pax + \frac{1}{2} m(b^2 - a^2)x^2 e^{2at}$$

Hamiltonovy rovnice

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{e^{-2at}}{m} p - ax$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = pa - m(b^2 - a^2)x e^{2at}$$

a když za  $p$  dosadíme z první rovnice do druhé dostáváme po provedení operace derivace

$$m(\ddot{x} + a\dot{x})e^{2at} + 2am(\dot{x} + ax)e^{2at} = am(\dot{x} + ax)e^{2at} - m(b^2 - a^2)x e^{2at}$$

tuto rovnici vydělíme  $m^{2at}$  a dostaneme tak

$$\ddot{x} + 2a\dot{x} + b^2x = 0$$

**5.11 Napište pohybové rovnice částice, jejíž Hamiltonova funkce je  $H(\vec{r}, \vec{k}) = c \frac{|\vec{k}|}{n(\vec{r}, \vec{k})}$  (světelný paprsek s vlnovým vektorem  $\vec{k}$ ).**

nejprve si uvědomíme, že

$$|\vec{k}| = \sqrt{\vec{k}\vec{k}} = k$$

a tedy Hamiltonovy rovnice budou

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}} &= \frac{\partial H}{\partial \vec{k}} = \frac{c\vec{k}}{nk} - \frac{c\vec{k}}{n^2} \frac{\partial n}{\partial \vec{k}} \\ \dot{\vec{k}} &= -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}} = \frac{ck}{n^2} \frac{\partial n}{\partial \vec{r}}\end{aligned}$$

**5.12 Vypočtete  $\{e^{\alpha q}, e^{\beta p}\}$ .**

$$\{e^{\alpha q}, e^{\beta p}\} = \frac{\partial e^{\alpha q}}{\partial q} \frac{\partial e^{\beta p}}{\partial p} - \frac{\partial e^{\alpha q}}{\partial p} \frac{\partial e^{\beta p}}{\partial q} = \alpha\beta e^{\alpha q + \beta p}$$

**5.15 Dokažte, že platí: jsou-li  $L_1, L_2$  integrály pohybu, je i  $L_3$  integrálem pohybu.**

vzhledem k výsledku příkladu 5.13 snadno určíme, že

$$\{L_1, L_2\} = \sum_k \epsilon_{12k} L_k = L_3$$

a tedy zkoumání, je-li  $L_3$  integrálem pohybu, tj. zda

$$\{L_3, H\} \stackrel{?}{=} 0$$

převeďme na problém

$$\{\{L_1, L_2\}, H\} \stackrel{?}{=} 0$$

zde ovšem aplikací Poissonovy věty: "Poissonova závorka dvou integrálů pohybu je opět integrálem pohybu." dostáváme, že předchozí rovnost skutečně platí a otazníček můžeme smazat.

což bylo dokázat.

**5.17 Pomocí Poissonovy věty odvoďte další integrál Hamiltonových rovnic v případě hmotného bodu pod vlivem centrální síly v otáčející se soustavě, znáte-li první integrály  $v = \sum_{i \in \mathbb{3}} \frac{p_i^2}{2m} + U(r)$  a**

$$u = \sum_{i \in \mathbb{3}} \frac{p_i^2}{2m} - \Omega(x_1 p_2 - x_2 p_1) + U(r).$$

spočítáme tedy nějakou novou funkci (označíme ji  $w$ ) jako Poissonovu závorku z již známých prvních integrálů pohybu (Poissonova věta)

$$w = \{u, v\} = 0 = \sum_{i \in \mathbb{3}} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} =$$

$$\begin{aligned}
&= \left( -\Omega p_2 + \frac{\partial U}{\partial x_1} \right) \frac{p_1}{m} - \left( \frac{p_1}{m} + \Omega x_2 \right) \frac{\partial U}{\partial x_1} + \left( \Omega p_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} \right) \frac{p_2}{m} - \left( \frac{p_2}{m} - \Omega x_1 \right) \frac{\partial U}{\partial x_2} + \frac{\partial U}{\partial x_3} \frac{p_3}{m} - \frac{p_3}{m} \frac{\partial U}{\partial x_3} = \\
&= -\Omega x_2 \frac{\partial U}{\partial x_1} + \Omega x_1 \frac{\partial U}{\partial x_2} = 0
\end{aligned}$$

dostali jsme tak další integrál pohybu

$$w = -\Omega x_2 \frac{\partial U}{\partial x_1} + \Omega x_1 \frac{\partial U}{\partial x_2} = 0$$

**5.19 Ukažte, že transformace  $Q_j = p_j$ ,  $P_j = -q_j$  je kanonická.**

budeme zkoumat, zda-li existuje taková funkce  $F$ , která splňuje rovnici

$$\sum_j P_j dQ_j - p_j dq_j = dF$$

to jest po dosazení

$$\sum_j -q_j dp_j - p_j dq_j = dF$$

odkud je rovnou vidět, že

$$\begin{aligned}
&-d \left( \sum_j q_j p_j \right) = dF \\
&-2 \sum_j q_j p_j = F
\end{aligned}$$

takže se nám to ukázat podařilo.

**5.20 Ukažte, že kanonická transformace  $(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) \rightarrow (R, \varphi, z, P_R, P_\varphi, P_z)$  s vytvořující funkcí  $F_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} P_R + (\arctg \frac{x_2}{x_1}) P_\varphi + x_3 P_z$  převádí souřadnice kartézské na cylindrické.**

ze vztahů

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial x_i} \text{ kde } i \in \hat{3}$$

$$P_i = -\frac{\partial F_2}{\partial i} \text{ kde } i \in \{R, \varphi, z\}$$

dostaneme po dosazení za  $F_2$  soustavu vztahů

$$p_1 = \frac{\partial F_2}{\partial x_1} = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} P_R - \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} P_\varphi$$

$$p_2 = \frac{\partial F_2}{\partial x_2} = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} P_R + \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} P_\varphi$$

$$p_3 = \frac{\partial F_2}{\partial x_3} = P_z$$

$$R = \frac{\partial F_2}{\partial P_R} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

$$\varphi = \frac{\partial F_2}{\partial P_\varphi} = \arctg \frac{x_2}{x_1}$$

$$z = \frac{\partial F_2}{\partial P_z} = x_3$$

pomocí nich můžeme též lehce vyjádřit

$$x_1 = R \cos \varphi$$

$$x_2 = R \sin \varphi$$

$$x_3 = z$$

a dosadit do výrazů pro hybnosti, čímž dostaneme

$$p_1 = P_R \cos \varphi - P_\varphi \frac{\sin \varphi}{R}$$

$$p_2 = P_R \sin \varphi + P_\varphi \frac{\cos \varphi}{R}$$

$$p_3 = P_z$$

**5.21 Ukažte, že transformace  $Q = \arctg\left(\sqrt{km} \frac{q}{p}\right)$ ,  $P = \frac{1}{2}\left(\sqrt{km}q^2 + \frac{1}{\sqrt{km}}p^2\right)$  je kanonická. Užijte ji k řešení pohybových rovnice harmonického oscilátoru  $H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{k}{2}q^2$ .**

nejprve vyjádříme souřadnice  $q, p$  v závislosti na  $Q, P$

$$q = \sqrt{\frac{2P}{\sqrt{km}}} \sin Q$$

$$p = \sqrt{2P\sqrt{km}} \cos Q$$

pro ověření, zda jsou takovéto transformace kanonické se pokusíme nalézt takovou funkci  $F$ , která splňuje rovnost

$$dF = PdQ - pdq$$

budeme tedy za  $p$  a  $q$  dosazovat výše napsané vztahy

$$dF \stackrel{?}{=} PdQ - \sqrt{2P\sqrt{km}} \cos Q \left( \sqrt{\frac{2P}{\sqrt{km}}} \cos Q dQ + \sqrt{\frac{1}{2P\sqrt{km}}} \sin Q dP \right)$$

$$dF \stackrel{?}{=} P(1 - 2 \cos^2 Q) dQ - \frac{1}{2} \sin 2Q dP$$

použijeme vztahu  $2 \cos^2 Q = 1 + \cos 2Q$

$$dF \stackrel{?}{=} -P \cos 2Q dQ - \frac{1}{2} \sin 2Q dP$$

$$dF = d\left(-\frac{1}{2} P \sin 2Q\right)$$

našli jsme tak hledanou funkci, proto je takováto transformace kanonická  
přetransformujeme ještě Hamiltonovu funkci



$$H' = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{k}{2} q^2 = \sqrt{\frac{k}{m}} P$$

Hamiltonovy rovnice v nových souřadnicích tedy budou

$$\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial Q} = 0$$

a tedy

$$Q = \sqrt{\frac{k}{m}} t + C_Q$$

$$P = C_P$$

**5.22 Ukažte, že transformace  $q = -\sqrt{\frac{2Q}{\sqrt{km}}} \sin P$ ,  $p = \sqrt{2Q\sqrt{km}} \cos P$  je kanonická.**

opět budeme hledat nějakou funkci  $F$ , která vyhovuje rovnici

$$dF = PdQ - pdq$$

tedy

$$dF \stackrel{?}{=} PdQ - \sqrt{2Q\sqrt{km}} \cos P \left( -\sqrt{\frac{2}{2Q\sqrt{km}}} \sin P - \sqrt{\frac{2Q}{\sqrt{km}}} \cos P dP \right)$$

$$dF \stackrel{?}{=} PdQ + \sin P \cos P dQ + 2Q \cos^2 P dP$$

$$dF \stackrel{?}{=} \left( P + \frac{1}{2} \sin 2P \right) dQ + 2Q \left( \frac{1 + \cos 2P}{2} \right) dP$$

$$dF \stackrel{?}{=} \left( P + \frac{1}{2} \sin 2P \right) dQ + Q(1 + \cos 2P) dP$$

$$dF = d \left( PQ + \frac{1}{2} Q \sin 2P \right)$$

podářilo se nám najít takovou funkci a proto je transformace kanonická.

**5.23 Jaké kanonické transformace určují vytvořující funkce  $F_1 = \frac{1}{2} \sqrt{km} q^2 \cot gQ$ , resp.**

**$F_3 = -\frac{p^2 \operatorname{tg} Q}{2\sqrt{km}}$  ? Lze je použít k řešení pohybových rovnic harmonického oscilátoru ?**

první funkce určuje kanonické transformace dané vztahy

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = \sqrt{km} q \cot gQ$$

$$P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{1}{2} \sqrt{km} q^2 \frac{1}{\sin^2 Q} = \frac{1}{2} \sqrt{km} q^2 (1 + \cot^2 gQ)$$

odkud dostaneme závislosti

$$\operatorname{tg} Q = \sqrt{km} \frac{q}{p} \Rightarrow Q = \operatorname{arctg} \left( \sqrt{km} \frac{q}{p} \right)$$

$$P = \frac{1}{2} \sqrt{km} q^2 \left( 1 + \frac{p^2}{q^2 km} \right) = \frac{1}{2} \left( \sqrt{km} q^2 \frac{1}{\sqrt{km}} p^2 \right)$$

které jsou identické s kanonickými transformacemi z příkladu 5.21 a lze je tedy použít k řešení pohybových rovnic harmonického oscilátoru

druhá funkce určuje kanonické transformace

$$q = -\frac{\partial F_3}{\partial p} = p \frac{1}{\sqrt{km}} \operatorname{tg} Q$$

$$P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{p^2}{2\sqrt{km}} \frac{1}{\cos^2 Q} = \frac{p^2}{2\sqrt{km}} (\operatorname{tg}^2 Q + 1)$$

odkud dostaneme závislosti

$$\operatorname{tg} Q = \frac{q}{p} \sqrt{km} \Rightarrow Q = \operatorname{arctg} \left( \frac{q}{p} \sqrt{km} \right)$$

$$P = \frac{p^2}{2\sqrt{km}} \left( \frac{q^2}{p^2} km + 1 \right) = \frac{1}{2} \left( q^2 \sqrt{km} + p^2 \frac{1}{\sqrt{km}} \right)$$

které jsou identické s kanonickými transformacemi z první části tohoto příkladu a tedy i příkladu 5.21 a lze je tedy použít k řešení pohybových rovnic harmonického oscilátoru

**5.24 Uvažujte transformaci  $(q, p) \rightarrow (Q, P)$ ,  $Q = q^\alpha \cos \beta p$ ,  $P = q^\alpha \sin \beta p$ . Reálné konstanty  $\alpha, \beta$  je třeba určit tak, aby transformace byla kanonická. Odvoďte též vytvořující funkci  $F$ .**

budeme požadovat, aby pro nějakou funkci  $F$  platilo

$$dF = PdQ - pdq$$

dosadíme tedy do tohoto výrazu za  $Q$  a  $P$

$$dF = \alpha q^{2\alpha-1} \sin(\beta p) \cos(\beta p) dq - pdq - q^{2\alpha} \beta \sin^2(\beta p) dp$$

použijeme trigonometrické vzorce a tento vztah upravíme na

$$dF = \left( \frac{\alpha}{2} q^{2\alpha-1} \sin(2\beta p) - p \right) dq + \left( \frac{\beta}{2} q^{2\alpha} \cos(2\beta p) - \frac{\beta}{2} q^{2\alpha} \right) dp$$

abychom mohli napsat

$$dF = d(uv) = u dv + v du$$

je třeba, aby se rovnaly integrály

$$\begin{aligned} \int \frac{\alpha}{2} q^{2\alpha-1} \sin(2\beta p) - p \, dq &= \int \frac{\beta}{2} q^{2\alpha} \cos(2\beta p) - \frac{\beta}{2} q^{2\alpha} \, dp \\ \frac{\alpha}{2} \frac{1}{2\alpha} q^{2\alpha} \sin(2\beta p) - pq &= \frac{\beta}{2} \frac{1}{2\beta} q^{2\alpha} \sin(2\beta p) - \frac{\beta}{2} pq^{2\alpha} \end{aligned}$$

tedy krátce

$$pq = \frac{\beta}{2} pq^{2\alpha}$$

odkud plyne, že hledaná reálná čísla jsou

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\beta = 2$$

a tedy

$$dF = \left( \frac{1}{4} \sin(4p) - p \right) dq + (q \cos(4p) - q) dp$$

$$dF = d \left[ \frac{q}{4} (\sin(4p) - 4p) \right]$$

a hledanou vytvořující funkci tak můžeme zapsat jako

$$F = \frac{q}{4} (\sin(4p) - 4p)$$

### 5.25 Ukažte, že tyto transformace jsou kanonické

(a)  $Q = \sqrt{\frac{2q}{K}} \cos p$ ,  $P = \sqrt{2qK} \sin p$

(b)  $Q = \ln \left( \frac{\sin p}{q} \right)$ ,  $P = q \cot g p$

(c)  $Q = \ln(1 + \sqrt{q} \cos p)$ ,  $P = 2(1 + \sqrt{q} \cos p) \sqrt{q} \sin p$

v každém ze tří případů se budeme snažit nalézt nějakou funkci  $F$  takovou, že splňuje rovnici

$$dF = PdQ - pdq$$

případ (a)

$$dF = PdQ - pdq = \sqrt{2Kq} \sin p \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{Kq}} \cos p dq - \sqrt{\frac{2q}{K}} \sin p dp \right) - pdq$$

$$dF = \left( \frac{1}{2} \sin 2p - p \right) dq + q(\cos 2p - 1) dp = d \left( \frac{1}{2} q \sin 2p - qp \right)$$

$$F = \frac{1}{2} q \sin 2p - qp$$

případ (b)

$$dF = PdQ - pdq = q \cot g(p) \left( \cot g(p) dp - \frac{1}{q} dq \right) - pdq$$

$$dF = q \cot^2 g(p) dp - \cot g(p) dq - pdq$$

$$dF = -d[q(\cot g(p) + 1)]$$

$$F = -q(\cot g(p) + 1)$$

případ (c)

$$dF = PdQ - pdq = \frac{2(1 + \sqrt{q} \cos p)\sqrt{q} \sin p}{1 + \sqrt{q} \cos p} \left[ \frac{1}{2\sqrt{q}} \cos p \, dq - \sqrt{q} \sin p \, dp \right] - pdq$$

$$dF = \left( \frac{1}{2} \sin 2p - p \right) dq + (q \cos 2p - q) dp$$

$$dF = d \left( \frac{1}{2} q \sin 2p - qp \right)$$

$$\boxed{F = \frac{1}{2} q \sin 2p - qp}$$

## KAPITOLA 7: SPECIÁLNÍ TEORIE RELATIVITY

**7.1 Transformační matice**  $A = (\alpha_\nu^\mu)$  má prvky  $\alpha_0^0 = \gamma$ ,  $\alpha_k^0 = \alpha_0^k = -\beta\gamma n_k$ ,  $\alpha_k^j = \alpha_j^k = (\gamma - 1)n_j n_k + \delta_{jk}$ , kde  $\beta$ ,  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ ,  $n_1, n_2, n_3$  jsou parametry a  $\vec{n}^2 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ .

**Ukažte, že**

1) matice  $A$  splňuje podmínku  $A^T G A = G$  Lorentzovy transformace

2) systém  $S'$  se pohybuje vzhledem k  $S$  konstantní rychlostí  $\vec{V} = c\beta\vec{n}$

3) pro pohyb ve směru  $x^1$  (tj.  $\vec{n}^T = (1, 0, 0)$ ) dostaneme matici (7.2.11 str. 244)

zadanou matici  $A$  přepíšeme do přehlednějšího tvaru

$$A = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma\vec{n}^T \\ -\beta\gamma\vec{n} & I + (\gamma - 1)\vec{n}\vec{n}^T \end{pmatrix}$$

1) vyšetříme platnost vztahu  $A^T G A = G$

poznamenejme, že matice  $A$  je symetrická -proto  $A = A^T$

$$\begin{aligned} A^T G A &= \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma\vec{n}^T \\ -\beta\gamma\vec{n} & I + (\gamma - 1)\vec{n}\vec{n}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma\vec{n}^T \\ -\beta\gamma\vec{n} & I + (\gamma - 1)\vec{n}\vec{n}^T \end{pmatrix} \\ A^T G A &= \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma\vec{n}^T \\ -\beta\gamma\vec{n} & -I - (\gamma - 1)\vec{n}\vec{n}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma\vec{n}^T \\ -\beta\gamma\vec{n} & I + (\gamma - 1)\vec{n}\vec{n}^T \end{pmatrix} \\ A^T G A &= \begin{pmatrix} \gamma^2 - \beta^2\gamma^2\vec{n}^T\vec{n} & (-\beta\gamma^2 + \beta\gamma + \beta\gamma(\gamma - 1)\vec{n}^T\vec{n})\vec{n}^T \\ (-\beta\gamma^2 + \beta\gamma + \beta\gamma(\gamma - 1)\vec{n}^T\vec{n})\vec{n} & \beta^2\gamma^2\vec{n}\vec{n}^T - (I + (\gamma - 1)\vec{n}\vec{n}^T)^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

v dalším kroku použijeme  $\vec{n}^T\vec{n} = \vec{n}^2 = 1$

$$A^T G A = \begin{pmatrix} \gamma^2 - \beta^2\gamma^2 & (-\beta\gamma^2 + \beta\gamma + \beta\gamma^2 - \beta\gamma)\vec{n}^T \\ (-\beta\gamma^2 + \beta\gamma + \beta\gamma^2 - \beta\gamma)\vec{n} & \beta^2\gamma^2\vec{n}\vec{n}^T - I - 2(\gamma - 1)\vec{n}\vec{n}^T - (\gamma - 1)^2\vec{n}\vec{n}^T\vec{n}\vec{n}^T \end{pmatrix}$$

použijeme též  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$  a rovnou dostaneme

$$A^T G A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} = G$$

2) vzájemný pohyb systémů

vezměme čtyřvektor počátku soustavy  $S'$  v soustavě  $S$   $\vec{x} = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{r} \end{pmatrix}$ , který se má pohybovat rychlostí  $\vec{V}$ , tj.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{V}t \end{pmatrix}$$

dále známe polohu tohoto počátku v soustavě  $S'$

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} ct' \\ \vec{0} \end{pmatrix}$$

pomocí transformačních vztahů

$$\vec{x}' = \mathbf{A}\vec{x}$$

odkud

$$\vec{x} = \mathbf{A}^{-1}\vec{x}'$$

snadno určíme hledanou rychlost a to použitím výše ověřené identity

$$\mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{A} = \mathbf{G}$$

totiž

$$\mathbf{A}^T \mathbf{G} = \mathbf{G} \mathbf{A}^{-1}$$

a tak nám stačí zleva vynásobit zkoumaný výraz maticí  $\mathbf{G}$

$$\mathbf{G}\vec{x} = \mathbf{G}\mathbf{A}^{-1}\vec{x}'$$

neboli po dosazení

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ \vec{V}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma\vec{n}^T \\ -\beta\gamma\vec{n} & \mathbf{I} + (\gamma-1)\vec{n}\vec{n}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ \vec{0} \end{pmatrix}$$

odkud

$$\begin{pmatrix} ct \\ -\vec{V}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma ct' \\ -\beta\gamma\vec{n}ct' \end{pmatrix}$$

a konečně vyjádříme-li si  $t' = \frac{1}{\gamma}t$ , dostáváme po menších kráceních hledaný výraz

$$\vec{V} = c\beta\vec{n}$$

### 3) poslední část příkladu

obyčejným dosazením do výše uvedené matice  $\mathbf{A}$  vektoru  $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  získáme hledanou matici

**7.2 Přesvědčete se, že Lorentzovy transformace je možno zapsat v kompaktní vektorové podobě**

$$\vec{r}' = \vec{r} + \left( \frac{\gamma-1}{V^2} \vec{V} \cdot \vec{r} - \gamma t \right) \vec{V}, \quad t' = \gamma \left( t - \frac{\vec{V} \cdot \vec{r}}{c^2} \right).$$

rozložíme radius vektor na dvě složky -  $\vec{r}_{\parallel}$  rovnoběžnou s  $\vec{V}$  a  $\vec{r}_{\perp}$  kolmou k  $\vec{V}$

$$\vec{r} = \vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp}$$

kde  $\vec{r}_{\parallel}$  lze vyjádřit ve tvaru

$$\vec{r}_{\parallel} = \frac{\vec{V} \cdot \vec{r}}{V^2} \vec{V}$$

a proto též

$$\vec{r}_\perp = \vec{r} - \frac{\vec{V} \cdot \vec{r}}{V^2} \vec{V}$$

Lorentzovou transformací  $\vec{r}_\perp$  zůstává nezměněné a  $\vec{r}_\parallel$  se transformuje jako

$$\vec{r}_\parallel' = \frac{\vec{r}_\parallel - \vec{V}t}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \gamma(\vec{r}_\parallel - \vec{V}t)$$

dostaneme tedy

$$\vec{r}' = \vec{r}_\perp + \gamma\vec{r}_\parallel - \gamma\vec{V}t$$

po dosazení výše vyjádřených složek obdržíme

$$\vec{r}' = \vec{r} - \frac{\vec{V} \cdot \vec{r}}{V^2} \vec{V} + \gamma \frac{\vec{V} \cdot \vec{r}}{V^2} \vec{V} - \gamma\vec{V}t$$

a po úpravách

$$\boxed{\vec{r}' = \vec{r} + \left( (\gamma - 1) \frac{\vec{V} \cdot \vec{r}}{V^2} - \gamma t \right) \vec{V}}$$

čas se transformuje jako

$$\boxed{t' = \gamma \left( t - \frac{\vec{V} \cdot \vec{r}}{c^2} \right)}$$

**7.4 Odvoďte zákon skládání rychlostí pro libovolnou vzájemnou orientaci obou rychlostí. Jak se zjednoduší pro  $V \ll c$ ? Jaká bude velikost výsledné rychlosti?**

budeme zkoumat  $\frac{d\vec{r}}{dt}$  (viz 7.2) přičemž vezmeme v úvahu časovou konstantnost rychlosti  $\vec{V}$

inverzní transformace k výsledku z příkladu 7.2 jsou až na znaménko u  $\vec{V}$  identické

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}' - \left( -(\gamma - 1) \frac{\vec{V} \cdot \vec{r}'}{V^2} - \gamma t' \right) \vec{V} \\ t &= \gamma \left( t' + \frac{\vec{V} \cdot \vec{r}'}{c^2} \right) \end{aligned}$$

tedy

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}' - \left( -(\gamma - 1) \frac{\vec{V} \cdot d\vec{r}'}{V^2} - \gamma dt' \right) \vec{V}}{\gamma \left( dt' + \frac{\vec{V} \cdot d\vec{r}'}{c^2} \right)} = \frac{\frac{d\vec{r}'}{dt'} - \left( -(\gamma - 1) \frac{\vec{V}}{V^2} \frac{d\vec{r}'}{dt'} - \gamma \right) \vec{V}}{\gamma \left( 1 + \frac{\vec{V}}{c^2} \frac{d\vec{r}'}{dt'} \right)}$$

což lze také zapsat

$$\dot{\vec{r}} = \left[ \frac{\dot{\vec{r}}'}{\gamma} + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\vec{V} \cdot \dot{\vec{r}}'}{V^2} \vec{V} + \vec{V} \right] \left( 1 + \frac{\vec{V} \cdot \dot{\vec{r}}'}{c^2} \right)^{-1} = \left[ \dot{\vec{r}}' \sqrt{1 - \beta^2} + (1 - \sqrt{1 - \beta^2}) \frac{\vec{V} \cdot \dot{\vec{r}}'}{V^2} \vec{V} + \vec{V} \right] \left( 1 + \frac{\vec{V} \cdot \dot{\vec{r}}'}{c^2} \right)^{-1}$$

při aproximaci  $V \ll c$  se tento vztah zjednoduší na

$$\dot{\vec{r}} = (\dot{\vec{r}}' + \vec{V}) \left( 1 + \frac{\vec{V} \dot{\vec{r}}'}{c^2} \right)^{-1}$$

pomocí binomické věty dostaneme při zanedbání vyšších řádů v  $\frac{V}{c}$  vztah

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}' + \vec{V} - \frac{\vec{V} \dot{\vec{r}}'}{c^2} \dot{\vec{r}}'$$

velikost výsledné rychlosti dostaneme přímým výpočtem normy

$$\begin{aligned} \dot{r}^2 &= \left[ \dot{r}' \sqrt{1-\beta^2} + (1-\sqrt{1-\beta^2}) \frac{\vec{V} \dot{\vec{r}}'}{V^2} \vec{V} + \vec{V} \right]^2 \left( 1 + \frac{\vec{V} \dot{\vec{r}}'}{c^2} \right)^{-2} \\ \dot{r}^2 &= \left[ (\dot{r}' + \vec{V}) + (1-\sqrt{1-\beta^2}) \left( \frac{\vec{V} \dot{\vec{r}}'}{V^2} \vec{V} - \dot{\vec{r}}' \right) \right]^2 \left( 1 + \frac{\vec{V} \dot{\vec{r}}'}{c^2} \right)^{-2} \end{aligned}$$

... po zdoluhavých úpravách ...

$$\begin{aligned} \dot{r}^2 &= \left[ (\dot{r}' + \vec{V})^2 + \beta^2 \frac{\vec{V} \dot{\vec{r}}' \vec{V} \dot{\vec{r}}'}{V^2} - \beta^2 \dot{r}'^2 \right] \left( 1 + \frac{\vec{V} \dot{\vec{r}}'}{c^2} \right)^{-2} \\ \dot{r}^2 &= \left[ (\dot{r}' + \vec{V})^2 + \frac{1}{c^2} (\vec{V} \dot{\vec{r}}' \vec{V} \dot{\vec{r}}' - V^2 \dot{r}'^2) \right] \left( 1 + \frac{\vec{V} \dot{\vec{r}}'}{c^2} \right)^{-2} \end{aligned}$$

což lze též zapsat jako

$$\dot{r}^2 = \frac{(\dot{\vec{r}}' + \vec{V})^2 - \frac{1}{c^2} (\dot{\vec{r}}' \times \vec{V})^2}{\left( 1 + \frac{\vec{V} \dot{\vec{r}}'}{c^2} \right)^2}$$

**7.5 Relativní rychlost dvou částic je definována jako rychlost jedné z nich v soustavě, v níž je druhá v klidu. Určete kvadrát  $v_{\text{rel}}^2$ , jestliže v některé inerciální soustavě částice mají rychlost  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ .**

do výsledku předchozího příkladu dosadíme za  $\dot{\vec{r}} = \vec{v}_{\text{rel}}, \dot{\vec{r}}' = \vec{v}_1, \vec{V} = -\vec{v}_2$  a dostaneme tak

$$\vec{v}_{\text{rel}}^2 = \frac{(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 - \frac{1}{c^2} (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)^2}{\left( 1 - \frac{\vec{v}_1 \vec{v}_2}{c^2} \right)^2}$$

**7.6 Rapidita  $\mu$  je definována pomocí vztahu  $\text{tgh} \mu = \frac{v}{c}$ . Ukažte, že  $\cosh \mu = \gamma, \sinh \mu = \beta \gamma$ . Ze vzorce př. 7.5 pro relativní rychlost odvoďte "kosinovou větu" pro relativní rapiditu.**

vztah

$$\text{tgh} \mu = \frac{V}{c} = \beta = \frac{\sinh \mu}{\cosh \mu}$$

umocníme na druhou



$$\beta^2 = \operatorname{tgh}^2 \mu = \frac{\sinh^2 \mu}{\cosh^2 \mu} = 1 - \frac{1}{\cosh^2 \mu}$$

a tedy

$$\cosh \mu = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma$$

obdobně

$$\sinh \mu = \cosh \mu \operatorname{tgh} \mu = \gamma \beta$$

vzorec z příkladu 7.5

$$\vec{v}_{\text{rel}}^2 = \left[ (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 + \frac{1}{c^2} (\vec{v}_1 \vec{v}_2 \vec{v}_1 \vec{v}_2 - \vec{v}_1^2 \vec{v}_2^2) \right] \left( 1 - \frac{\vec{v}_1 \vec{v}_2}{c^2} \right)^{-2}$$

nejprve vhodně upravíme na tvar  $\left( 1 - \frac{\vec{v}_{\text{rel}}^2}{c^2} \right) = \left( 1 - \frac{v_1^2}{c^2} \right) \left( 1 - \frac{v_2^2}{c^2} \right) \left( 1 - \frac{\vec{v}_1 \vec{v}_2}{c^2} \right)^{-1}$

$$1 - \frac{\vec{v}_{\text{rel}}^2}{c^2} = \frac{1 - 2 \frac{\vec{v}_1 \vec{v}_2}{c^2} + \frac{\vec{v}_1 \vec{v}_2 \vec{v}_1 \vec{v}_2}{c^4} - \frac{(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2}{c^2} - \frac{\vec{v}_1 \vec{v}_2 \vec{v}_1 \vec{v}_2 - \vec{v}_1^2 \vec{v}_2^2}{c^4}}{\left( 1 - \frac{\vec{v}_1 \vec{v}_2}{c^2} \right)^2}$$

$$1 - \frac{\vec{v}_{\text{rel}}^2}{c^2} = \frac{1 - 2 \frac{\vec{v}_1 \vec{v}_2}{c^2} - \frac{\vec{v}_1^2 - 2 \vec{v}_1 \vec{v}_2 + \vec{v}_2^2}{c^2} - \frac{\vec{v}_1^2 \vec{v}_2^2}{c^4}}{\left( 1 - \frac{\vec{v}_1 \vec{v}_2}{c^2} \right)^2}$$

$$1 - \frac{\vec{v}_{\text{rel}}^2}{c^2} = \frac{1 - \frac{\vec{v}_1^2 + \vec{v}_2^2}{c^2} - \frac{\vec{v}_1^2 \vec{v}_2^2}{c^4}}{\left( 1 - \frac{\vec{v}_1 \vec{v}_2}{c^2} \right)^2} = \frac{\left( 1 - \frac{\vec{v}_1^2}{c^2} \right) \left( 1 - \frac{\vec{v}_2^2}{c^2} \right)}{\left( 1 - \frac{\vec{v}_1 \vec{v}_2}{c^2} \right)^2}$$

pužijeme zavedené substituce

$$1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2} = 1 - \operatorname{tgh}^2 \mu = \frac{\cosh^2 \mu - \sinh^2 \mu}{\cosh^2 \mu} = \frac{1}{\cosh^2 \mu}$$

dostaneme

$$\frac{1}{\cosh^2 \mu_{\text{rel}}} = \frac{1}{\cosh^2 \mu_1 \cosh^2 \mu_2 \left( 1 - \frac{\vec{v}_1 \vec{v}_2}{c^2} \right)^2}$$

a jelikož výraz

$$\left( 1 - \frac{\vec{v}_1 \vec{v}_2}{c^2} \right)^2 = \left( 1 - \frac{\vec{v}_1 \vec{v}_2}{c^2} \frac{v_1 v_2}{v_1 v_2} \right)^2 = (1 - \operatorname{tgh} \mu_1 \operatorname{tgh} \mu_2 \cos \chi)^2$$

kde  $\chi$  značí úhel svírající vektory rychlostí  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  - tj.  $\cos \chi = \frac{\vec{v}_1 \vec{v}_2}{v_1 v_2}$

dostaneme po převrácení nakonec

$$\cosh \mu_{\text{rel}} = \cosh \mu_1 \cosh \mu_2 - \sinh \mu_1 \sinh \mu_2 \cos \chi$$

**7.10 Světelný rok je vzdálenost, kterou světlo urazí za jeden rok. Vyjádřete zrychlení volného pádu  $g$  v jednotkách světelný rok / rok<sup>2</sup>. Čemu se rovná rychlost světla v těchto jednotkách ? (1 rok =  $3.15 \cdot 10^7$  s)**

převédeme si sekundy a metry do nových jednotek

$$1 \text{ s} = \frac{1}{3,15 \cdot 10^7} \text{ rok}$$

$$1 \text{ m} = \frac{1}{c \cdot 3,15 \cdot 10^7} \text{ sv.rok}$$

potom již snadně převédeme

$$g = 9,81 \text{ m/s}^2 = \frac{9,81 \cdot 3,15 \cdot 10^7}{3 \cdot 10^8} \text{ sv.rok/rok}^2 = 1,03 \text{ sv.rok/rok}^2$$

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} = \frac{3 \cdot 10^8 \cdot 3,15 \cdot 10^7}{3 \cdot 10^8 \cdot 3,15 \cdot 10^7} \text{ sv.rok/rok} = 1 \text{ sv.rok/rok}$$

**7.11 Kosmická loď se pohybuje s takovým zrychlením, že její posádka cítí konstantní sílu rovnou zemské tíži. Z hlediska pozorovatele na Zemi, odkud loď odstartovala, tento její pohyb trvá 5 let. Jak daleko loď za tuto dobu uletí a jaké rychlosti dosáhne ?**

vyjdeme ze vztahu pro sílu

$$F = \frac{m_0 c^2}{b} = m_0 g$$

odkud

$$b = \frac{c^2}{g} = 9,17 \cdot 10^{15} \text{ m} = 0,97 \text{ sv.rok}$$

rychlost bude

$$v = \frac{c^2 t}{\sqrt{b^2 + c^2 t^2}} = \{t = 5 \text{ let}\} = 0,98 \text{ sv.rok / rok} = 0,98 c$$

uletěná vzdálenost

$$x = \left( \sqrt{b^2 + c^2 t^2} - b \right) = \{t = 5 \text{ let}\} = 4,15 \text{ sv.rok}$$

**7.15 Fizeauův pokus (1859). Fizeau měřil pomocí interferometru rychlost světla  $v$  v kapalinách tekoucích po i proti směru šíření světla (rychlostí  $\pm V$ ) a zjistil závislost  $v = \frac{c}{n} \pm V \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right)$ , kde  $n$  je index lomu kapaliny. Odvoďte tento empirický vztah pomocí zákona skládání rychlostí.**

do výsledku příkladu 7.4 dosadíme za  $\dot{r}' = \frac{c}{n}$  a vzhledem k tomu, že jsme v tomto příkladě v

konečném výsledku zanedbali všechny členy binomického rozvoje vyššího řádu než  $\frac{V}{c}$ ,

okamžitě dostáváme výsledek

$$v = \frac{c}{n} \pm V \mp \frac{V}{c^2} \frac{c^2}{n^2} = \frac{c}{n} \pm V \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right)$$

**7.17 Rychlost  $\vec{v}$  (v soustavě  $S$ ) leží v rovině  $xy$  a svírá s osou  $x$  úhel  $\theta$ ; podobně je definován úhel  $\theta'$  pro rychlost  $\vec{v}'$  v soustavě  $S'$ . Odvoďte vztah mezi  $\theta$  a  $\theta'$  při speciální Lorentzově transformaci  $S \rightarrow S'$  (viz skripta 7.1.3).**

opět použijeme výsledku příkladu 7.4 kde dosadíme za

$$\dot{\vec{r}}'^T = (v' \cos \theta', v' \sin \theta', 0)$$

$$\vec{V}^T = (V, 0, 0)$$

a dostaneme tak

$$v_x = \frac{v' \cos \theta' \sqrt{1-\beta^2} + (1-\sqrt{1-\beta^2}) \frac{Vv'}{V^2} \cos \theta' V + V}{1 + \frac{Vv'}{c^2} \cos \theta'} = \frac{v' \cos \theta' + V}{1 + \frac{Vv'}{c^2} \cos \theta'}$$

$$v_y = \frac{v' \sin \theta' \sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{Vv'}{c^2} \cos \theta'}$$

$$v_z = 0$$

zajímá nás ovšem velikost úhlu  $\theta$

$$\boxed{\operatorname{tg} \theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{v' \sin \theta' \sqrt{1-\beta^2}}{v' \cos \theta' + V}}$$

**7.18 Odvoďte transformační vztahy pro úhly  $\theta$ ,  $\theta'$  za podmínek př. 7.17, jestliže  $v = v' = c$ . Vypočtěte  $\Delta\theta = \theta' - \theta$  při  $V \ll c$ .**

dosadíme tyto hodnoty do předchozího výrazu

$$\boxed{\operatorname{tg} \theta = \frac{c \sin \theta' \sqrt{1-\beta^2}}{c \cos \theta' + V} = \frac{\sin \theta' \sqrt{1-\beta^2}}{\cos \theta' + \beta}}$$

v dalším budeme potřebovat mít vyjádřeno

$$\cos \theta = \frac{\cos \theta' + \beta}{1 + \beta \cos \theta'}$$

$$\sin \theta = \frac{\sin \theta' \sqrt{1-\beta^2}}{1 + \beta \cos \theta'}$$

abychom přibližně vyjádřili  $\Delta\theta$ , budeme za tímto účelem zkoumat

$$\sin \Delta\theta = \sin(\theta' - \theta) = \sin \theta' \cos \theta - \sin \theta \cos \theta'$$

a dosadíme za  $\sin \theta$  a  $\cos \theta$  předešlých vzorců

$$\sin \Delta\theta = \sin \theta' \frac{\cos \theta' + \beta}{1 + \beta \cos \theta'} - \frac{\sin \theta' \sqrt{1-\beta^2}}{1 + \beta \cos \theta'} \cos \theta'$$

$$\sin \Delta\theta = \frac{\beta \sin \theta'}{1 + \beta \cos \theta'} + \frac{\sin \theta' \cos \theta' (1 - \sqrt{1-\beta^2})}{1 + \beta \cos \theta'}$$

při aproximaci  $\beta \ll 1$  zanedbáme pravý člen a jmenovatel prvního zlomku nahradíme jedničkou

$$\sin \Delta\theta \approx \beta \sin \theta'$$

pro malá  $\Delta\theta$  proto můžeme aproximovat  $\sin \Delta\theta \approx \Delta\theta$  a psát, že

$$\Delta\theta \doteq \frac{V}{c} \sin \theta'$$

**7.24 Vypočtete rychlosti částic v těchto případech:**

a) elektrony ve výbojce  $E = 300 \text{ eV}$

b) elektrony v synchrotronu  $E = 300 \text{ MeV}$

c) protony v synchrocyclotronu  $E = 680 \text{ MeV}$

d) protony v synchrofázotronu  $E = 10 \text{ GeV}$

( $m_e c^2 = 0,511 \text{ MeV}$ ,  $m_p c^2 = 938,2 \text{ MeV}$ )

ve všech případech platí vztah

$$E + m_0 c^2 = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

vyjádříme si rychlost

$$v = \sqrt{1 - \left( \frac{m_0 c^2}{E + m_0 c^2} \right)^2} c$$

budeme postupně dosazovat

a)  $E = 300 \text{ eV}$

$$v = \sqrt{1 - \left( \frac{m_e c^2}{E + m_e c^2} \right)^2} c = 0,0342511 c$$

b)  $E = 300 \text{ MeV}$

$$v = \sqrt{1 - \left( \frac{m_e c^2}{E + m_e c^2} \right)^2} c = 0,9999986 c$$

c)  $E = 680 \text{ MeV}$

$$v = \sqrt{1 - \left( \frac{m_p c^2}{E + m_p c^2} \right)^2} c = 0,8147731 c$$

d)  $E = 10 \text{ GeV}$

$$v = \sqrt{1 - \left( \frac{m_p c^2}{E + m_p c^2} \right)^2} c = 0,9963147 c$$

**7.26 V kosmickém záření se vyskytují protony s energií řádu  $10^{10} \text{ GeV}$ . Necht' dráha tohoto protonu protíná naši Galaxii podél průměru  $10^{10}$  světelných let. Srovnejte čas potřebný k průletu v systému spojeném se Zemí a v klidové soustavě protonu.**

rychlost protonu o takovéto řádové energii je

$$v = \sqrt{1 - \left( \frac{0,9382 \text{ GeV}}{10^{10} \text{ GeV}} \right)^2} c \doteq c$$

a tedy doba průletu pozorovaná v soustavě spjaté se Zemí bude

$$t = 10^5 \text{ let}$$

a v klidové soustavě protonu bude tento čas přibližně ( $m_0 c^2 \approx 1 \text{ GeV}$ )

$$\tau = \frac{m_0 c^2}{E} t = \frac{1}{10^{10}} \cdot 10^5 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s} \doteq 315 \text{ s}$$

**7.27 Mezon  $\pi^0$  s klidovou hmotností  $m_0$  pohybující se rychlostí  $v$  se rozpadá na dvě stejná kvanta záření gama (fotony). Určete úhel  $\varphi$ , který budou svírat směry pohybu fotonů.**

použijeme zákon zachování energie - hybnosti

po rozpadu musí platit, že

$$E = E_1 + E_2$$

a zároveň

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

kde se budeme zřejmě zajímat pouze o složky  $p_1 \cos \frac{\varphi}{2} = p_2 \cos \frac{\varphi}{2}$  a pomocí těchto tří vztahů sestavíme rovnice

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 2m_1 c^2 = 2E_1 = 2E_2$$

$$p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = p_1 \cos \frac{\varphi}{2} + p_2 \cos \frac{\varphi}{2} = 2m_1 c \cos \frac{\varphi}{2}$$

odkud dosazením za  $2m_1$  z rovnosti energií

$$\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} c \cos \frac{\varphi}{2}$$

dostáváme

$$\varphi = 2 \arccos \frac{v}{c}$$

**7.28 Dokažte, že v nepřítomnosti vnějšího pole se foton nemůže změnit v pár elektron-pozitron.**

uvažujme, co by se stalo, kdyby se foton o hybnosti ( $p^\mu$ ) změnil v pár elektron [o hybnosti ( $p_-^\mu$ )] pozitron [o hybnosti ( $p_+^\mu$ )]

zákon zachování hybnosti-energie zní

$$p^\mu = p_-^\mu + p_+^\mu$$

protože má foton nulovou klidovou hmotnost, platí

$$p_\mu p^\mu = p_{-\mu} p_-^\mu + 2p_{-\mu} p_+^\mu + p_{+\mu} p_+^\mu = 0$$

v těžišťové soustavě platí (hmotnost elektronu je táž jako pozitronu)

$$(p_-^\mu) = \left( \frac{E}{c}, \vec{p}_- \right)$$

$$(p_+^\mu) = \left( \frac{E}{c}, \vec{p}_+ \right) = \left( \frac{E}{c}, -\vec{p}_- \right)$$

proto zřejmě

$$p_{-\mu} p_+^\mu = g_{\mu\nu} p_-^\nu p_+^\mu = \underbrace{\frac{E^2}{c^2}}_{>0} + \underbrace{\vec{p}_-^2}_{>0}$$

$$p_{-\mu} p_-^\mu = p_{+\mu} p_+^\mu = \underbrace{m_\pm^2 c^2}_{>0}$$

celkem tedy

$$p_\mu p^\mu = p_{-\mu} p_-^\mu + 2p_{-\mu} p_+^\mu + p_{+\mu} p_+^\mu > 0$$

což je spor s předpokladem nulové klidové hmotnosti fotonu