Tomáš Oberhuber

Faculty of Nuclear Sciences and Physical Engineering
Czech Technical University in Prague

Aritmetický vektor

Definition 1

Aritmetický vektor $\vec{x}$ je uspořádaná *n*-tice čísel $x_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \ldots, n$. Píšeme

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n.$$

Aritmetický vektor

Definition 2

Definujeme **sčítání vektorů** po složkách tj.

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

a **násobení vektoru číslem** po složkách tj.

$$\lambda \vec{x} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

Aritmetický vektor

Definition 3

Definujeme **skalární součin dvou vektorů**

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$$

Axiomy skalárního součinu

Pro takto definovaný skalární součin platí následující:

- $(\vec{x}, \vec{x}) \geq 0$ a $(\vec{x}, \vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$
- $(\vec{x}, \vec{y}) = \overline{(\vec{y}, \vec{x})}$
- $(\vec{x} + \vec{y}, \vec{z}) = (\vec{x}, \vec{z}) + (\vec{y}, \vec{z})$
- $(\lambda \vec{x}, \vec{y}) = \lambda (\vec{x}, \vec{y})$,

kde $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{C}^n$ a $\lambda \in \mathbb{C}$. Jde o čtyři axiomy, který definují obecně skalární součin.

Schwarzova nerovnost

Pro vektory $\vec{x}$ a $\vec{y}$ platí tzv. **Schwarzova nerovnost**

$$\left|(\vec{x},\vec{y})\right|^2 \leq (\vec{x},\vec{x}) \cdot (\vec{y},\vec{y}) \,.$$

Matice

Definition 4

Matice s rozměry $n \times m$ (tj. n řádků a m sloupců) je dána čísly $a_{ij} \in \mathbb{C}^{n,m}$, $i \in \hat{n}, j \in \hat{m}$. Matici lze také chápat jako posloupnost m vektorů z nichž každý má n řádků (složek). Píšeme

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n,m}$$

Matice

Definition 5

Definujeme **sčítání matic** po složkách, tj. pro $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n,m}$ je

$$\mathbb{A} + \mathbb{B} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1m} + b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \dots & a_{nm} + b_{nm} \end{pmatrix},$$

dále definujeme **násobení matice číslem**, tj. pro $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,m}, \lambda \in \mathbb{C}$ je

$$\lambda \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \dots & \lambda a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Matice

Definition 6

Definujeme **násobení matice a vektoru**, tj. pro $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,m}$ a $\vec{x} \in \mathbb{C}^m$ je

$$\mathbb{A}\vec{x} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m a_{1i}x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^m a_{ni}x_i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

a **násobení dvou matic**, tj. pro $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,k}, \mathbb{B} \in \mathbb{C}^{k,m}$ je

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^k a_{1k}b_{k1} & \dots & \sum_{i=1}^k a_{1k}b_{km} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^k a_{nk}b_{k1} & \dots & \sum_{i=1}^k a_{nk}b_{km} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n,m}$$

Matice

Při násobení matic platí asociace, tj.

$$(\mathbb{A}\mathbb{B})\,\mathbb{C} = \mathbb{A}\,(\mathbb{B}\mathbb{C})\,,$$

ale obecně neplatí komutativní zákon, tj.

$$\mathbb{A}\mathbb{B} \neq \mathbb{B}\mathbb{A}.$$

Determinant matice

Definition 7

Pro čtvercové matice řádu n tj. $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ definujeme

$$\det \mathbb{A} = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign} \pi \, a_{\pi(1)1} \cdots a_{\pi(n)n},$$

kde S_n je množina všech permutací na $\hat{n}$ a $\operatorname{sign}\pi = (-1)^{\#TRANSPOZIC\pi}$.

Definition 8

Buď $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,m}$. **Determinant řádu q vybraný z matice $\mathbb{A}$** je determinant libovolné čtvercové matice řádu q získané z matice $\mathbb{A}$ odstraněním libovolných $n-q$ řádků a $m-q$ sloupců.

Transponovaná a komplexně sdružená matice

Definition 9

Transponovaná matice k matici $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,m}$ je matice $\mathbb{A}^T$ pro níž platí

$$\left(\mathbb{A}^T\right)_{ij} = a_{ji},$$

pro $i \in \hat{n}$ a $i \in \hat{m}$.

Definition 10

Komplexně sdružená matice k matici $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,m}$ je matice $\overline{\mathbb{A}}$ pro níž platí

$$\left(\overline{\mathbb{A}}\right)_{ij} = \overline{a}_{ij},$$

pro $i \in \hat{n}$ a $i \in \hat{m}$.

Čtvercové matice

Definition 11

Hermitovsky sdružená (konjugovaná) matice k matici $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,m}$ je matice $\mathbb{A}^*$ pro níž platí

$$\mathbb{A}^* = \overline{\mathbb{A}^T},$$

pro $i \in \hat{n}$ a $i \in \hat{m}$.

Hodnost matice

Definition 12

Hodnost (rank) matice $\mathbb{A}$ značíme $h(\mathbb{A})$ nebo $rank(\mathbb{A})$ a je to maximální počet nenulových determinantů různého řádu vybraných z matice $\mathbb{A}$.

Definition 13

Obraz (range) matice $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,m}$ je lineární prostor definovaný jako

$$range(\mathbb{A}) \equiv \left\{ \vec{y} \in \mathbb{C}^n \mid \vec{y} = \mathbb{A}\vec{x} \text{ pro } \vec{x} \in \mathbb{C}^m \right\}.$$

Jádro matice

Definition 14

Jádro (kernel) matice $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,m}$ je lineární prostor definovaný jako

$$ker\left(\mathbb{A}\right) \equiv \left\{\vec{x} \in \mathbb{C}^m \mid \mathbb{A}\vec{x} = \vec{0}\right\}$$

Platí následující vztahy:

- Pro $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n,m}$ je $rank\left(\mathbb{A}\right) = rank\left(\mathbb{A}^T\right)$.
- Pro $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,m}$ je $rank\left(\mathbb{A}\right) = rank\left(\mathbb{A}^*\right)$.
- Pro $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,m}$ je $rank\left(\mathbb{A}\right) + dim\left(ker\left(\mathbb{A}\right)\right) = n$.

Čtvercové matice

Definition 15

Čtvercová matice $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ je **regulární** právě když je její hodnost rovna n. Jinak je tato matice singulární.

Platí, že $\det \mathbb{A} \neq 0 \Leftrightarrow \mathbb{A}$ je regulární.

Čtvercové matice

Definition 16

Matice $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ je **silně regulární**, právě když platí

$$
\begin{aligned}
a_{11} &\neq 0, \\
\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} &\neq 0, \\
\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} &\neq 0, \\
&\vdots \\
\det \mathbb{A} &\neq 0.
\end{aligned}
$$

Čtvercové matice

Definition 17

Čtvercová matice $\mathbb{A}$ je **diagonální** právě když $a_{ij} = 0$ pro $i \neq j$ a $i, j \in \hat{n}$.

Definition 18

Jednotková matice $\mathbb{I}$ je diagonální matice taková, že $a_{ii} = 1$ pro $i \in \hat{n}$.

Pro regulární matici $\mathbb{A}$ existuje matice $\mathbb{A}^{-1}$ taková, že $\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{A} = \mathbb{I}$

Čtvercové matice

Platí následující vztahy:

- $(\mathbb{A}\mathbb{B})^T = \mathbb{B}^T \mathbb{A}^T$
- $\overline{\mathbb{A}\mathbb{B}} = \overline{\mathbb{A}}\ \overline{\mathbb{B}}$
- $(\mathbb{A}\mathbb{B})^* = \overline{(\mathbb{A}\mathbb{B})}^T = \overline{\mathbb{B}}^T \overline{\mathbb{A}}^T = \mathbb{B}^* \mathbb{A}^*$

Čtvercové matice

Definition 19

Pro čtvercové matice $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ definujeme:

- $\mathbb{A}$ je **normální** $\Leftrightarrow \mathbb{A}\mathbb{A}^* = \mathbb{A}^*\mathbb{A}$
- $\mathbb{A}$ je **samosdružená** $\Leftrightarrow \mathbb{A}^* = \mathbb{A}$
  - samosdružená matice $\mathbb{A}$ je **symetrická** $\Leftrightarrow \mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$
  - samosdružená matice $\mathbb{A}$ je **hermitovská** $\Leftrightarrow \mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$
- $\mathbb{A}$ je **izometrická** $\Leftrightarrow \mathbb{A}^* = \mathbb{A}^{-1}$
  - izometrická matice $\mathbb{A}$ je **ortogonální** $\Leftrightarrow \mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$
  - izometrická matice $\mathbb{A}$ je **unitární** $\Leftrightarrow \mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$.

Izometrické matice

- $\mathbb{I}$ je ortogonální i unitární
- je-li $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$, pak platí:
  - jsou-li matice $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ ortogonální $\Rightarrow$ $\mathbb{AB}$ je ortogonální
  - je-li $\mathbb{A}$ ortogonální $\Rightarrow \mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}^T$
  - je-li $\mathbb{A}$ ortogonální $\Rightarrow \det \mathbb{A} = \pm 1$
- je-li $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$, pak platí:
  - jsou-li matice $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ unitární $\Rightarrow$ $\mathbb{AB}$ je unitární
  - je-li $\mathbb{A}$ unitární $\Rightarrow \mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}^*$
  - je-li $\mathbb{A}$ unitární $\Rightarrow |\det \mathbb{A}| = 1$

Blokové matice

Definition 20

Bloková matice je taková, že její jednotlivé prvky tvoří opět matice. Přitom musí platit, že prvky blokové matice ve stejném sloupci mají stejný počet sloupců a prvky blokové matice ve stejném řádku mají stejný počet řádků.

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{cc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ \hline a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{11} & \mathbb{A}_{12} \\ \mathbb{A}_{21} & \mathbb{A}_{22} \end{pmatrix}$$

Blokové matice

Nechť $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} \mathbb{B}_{11} & \mathbb{B}_{12} \\ \mathbb{B}_{21} & \mathbb{B}_{22} \end{pmatrix}$.

- Pokud mají příslušné bloky matic $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ stejné rozměry, pak lze tyto matice sečíst po blocích, tj.

$$\mathbb{A} + \mathbb{B} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{11} + \mathbb{B}_{11} & \mathbb{A}_{12} + \mathbb{B}_{12} \\ \mathbb{A}_{21} + \mathbb{B}_{21} & \mathbb{A}_{22} + \mathbb{B}_{22} \end{pmatrix}.$$

- Je-li $\lambda \in \mathbb{R}$, pak

$$\lambda\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \lambda\mathbb{A}_{11} & \lambda\mathbb{A}_{12} \\ \lambda\mathbb{A}_{21} & \lambda\mathbb{A}_{22} \end{pmatrix}.$$

Blokové matice

- Chceme-li spočítat součin $\mathbb{C} = \mathbb{A}\mathbb{B}$, pak platí

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} \mathbb{C}_{11} & \mathbb{C}_{12} \\ \mathbb{C}_{21} & \mathbb{C}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{11} & \mathbb{A}_{12} \\ \mathbb{A}_{21} & \mathbb{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{B}_{11} & \mathbb{B}_{12} \\ \mathbb{B}_{21} & \mathbb{B}_{22} \end{pmatrix},$$

kde

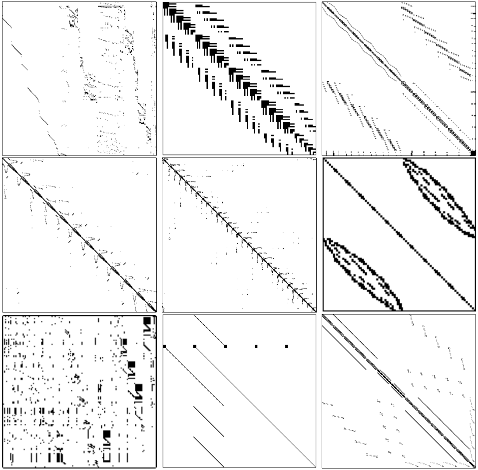
$$\begin{aligned} \mathbb{C}_{11} &= \mathbb{A}_{11}\mathbb{B}_{11} + \mathbb{A}_{12}\mathbb{B}_{21}, \\ \mathbb{C}_{12} &= \mathbb{A}_{11}\mathbb{B}_{12} + \mathbb{A}_{12}\mathbb{B}_{22}, \\ \mathbb{C}_{21} &= \mathbb{A}_{21}\mathbb{B}_{11} + \mathbb{A}_{22}\mathbb{B}_{21}, \\ \mathbb{C}_{22} &= \mathbb{A}_{21}\mathbb{B}_{12} + \mathbb{A}_{22}\mathbb{B}_{22}, \end{aligned}$$

a požadujeme, aby matice $\mathbb{A}_{11}$ měla stejný počet sloupců jako má matice $\mathbb{B}_{11}$ řádků. To samé požadujeme pro bloky $\mathbb{A}_{12}$ a $\mathbb{B}_{21}$ a podobně pro další bloky.

Řídké matice

Definition 21

Řídká matice je taková matice, která má většinu svých prvků nulových.



Zdroj: Matrix market

Řídké matice

Remark 22

U řídkých matic se snažíme ukládat do paměti jen nenulové prvky (CSR formát) a stejně tak provádět veškeré výpočty pouze s nenulovými prvky. Tím lze mnoho algoritmů v numerické matematice výrazně zefektivnit.

Trojúhelníkové matice

Definition 23

Čtvercová matice $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ je **dolní trojúhelníková**, právě když

$$a_{ij} = 0 \textit{ pro } i,j \in \hat{n} \textit{ a } j > i, \textit{ tj.}$$

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Čtvercová matice $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ je **horní trojúhelníková**, právě když

$$a_{ij} = 0 \textit{ pro } i,j \in \hat{n} \textit{ a } j < i, \textit{ tj.}$$

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Trojúhelníkové matice

Theorem 24

Součin dvou dolních (resp. horních) trojúhelníkových matic je dolní (resp. horní) trojúhelníková matice. Přitom na diagonále má výsledná matice součin odpovídajících diagonálních prvků původních matic.

Důkaz.

Lze ukázat přímo ze sum pro součin dvou matic. □

Trojúhelníkové matice

Theorem 25

Inverzní matice k horní (resp. dolní) trojúhelníkové matici je opět horní (resp. dolní) trojúhelníková matice a její diagonální prvky jsou převrácené hodnoty odpovídajících diagonálních prvků původní matice.

Důkaz.

Pomocí adjungované matice. $\square$

Rozklad matice na dolní a horní trojúhelníkovou

Theorem 26

Každou silně regulární (tedy čtvercovou) matici $\mathbb{A}$ lze jedinečným způsobem vyjádřit ve tvaru součinu

$$\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{R},$$

kde

- $\mathbb{L}$ *je dolní (levá) trojúhelníková matice s jedničkami na diagonále*
- $\mathbb{R}$ *je horní (pravá) trojúhelníková matice s jedničkami na diagonále*
- $\mathbb{D}$ *je diagonální matice*

Podobnostní transformace

Definition 27

Matice $\mathbb{A}$ se nazývá **podobná** matici $\mathbb{B}$, pokud existuje regulární matice $\mathbb{T}$ taková, že $\mathbb{A} = \mathbb{T}^{-1}\mathbb{B}\mathbb{T}$. Mluvíme pak o **podobnostní transformaci maticí** $\mathbb{T}$.

Remark 28

Tato vlastnost je symetrická. Tj. je-li $\mathbb{A}$ podobná $\mathbb{B}$, pak je $\mathbb{B}$ podobná $\mathbb{A}$

$$\mathbb{A} = \mathbb{T}^{-1}\mathbb{B}\mathbb{T} \Rightarrow \mathbb{T}\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{T} \Rightarrow \mathbb{T}\mathbb{A}\mathbb{T}^{-1} = \mathbb{B}.$$

Matice podobnostní transformace je $\mathbb{T}^{-1}$.

Podobnostní transformace

Remark 29

V rozkladu matice na dolní a horní trojúhelníkovou matici $\mathbb{A} = \mathbb{LDR}$ *nejde o žádnou podobnostní transformaci. To je její nevýhoda.*

Remark 30

Podobné matice vlastně vyjadřují stejný lineární operátor v různých bázích. Podobnostní matice $\mathbb{T}$ *je vlastně maticí přechodu* ${}_{\mathcal{X}}\mathbb{P}_{\mathcal{Y}}$. *Budou nás zajímat rozklady matic založené na podobnostní transformaci. Jejich výhodou je, že dokáží odhalit spektrum matice.*

Vlastní čísla matice

Definition 31

Vlastním číslem matice $\mathbb{A}$ (eigenvalue) nazýváme takové číslo λ, pro které existuje nenulový vektor $\vec{x}$ takový, že $\mathbb{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$. Vektor $\vec{x}$ se nazývá **vlastním vektorem matice** $\mathbb{A}$ (eigenvector) k číslu λ. Množina všech vlastních čísel matice $\mathbb{A}$ se nazývá **spektrum matice** $\mathbb{A}$ a značíme je $\sigma(\mathbb{A})$. Číslo

$$\rho(\mathbb{A}) = \max_{\lambda \in \sigma(\mathbb{A})} |\lambda|,$$

nazýváme **spektrálním poloměrem matice** $\mathbb{A}$.

Vlastní čísla matice

Remark 32

$$\mathbb{A}\vec{x} = \lambda\vec{x} \Leftrightarrow \mathbb{A}\vec{x} - \lambda\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow (\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}) = 0 \Leftrightarrow \det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}) = 0.$$

Definition 33

Rovnici $\det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}) = 0$ nazýváme **charakteristickou rovnicí** matice $\mathbb{A}$ a polynom $\det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})$ **charakteristickým polynomem** matice $\mathbb{A}$.

Definition 34

Násobnost vlastního čísla λ jakožto kořene charakteristického polynomu se nazývá **algebraická násobnost** a značí se $\nu_a(\lambda)$. Počet lineárně nezávislých vlastních vektorů k vlastnímu číslu λ je jeho **geometrická násobnost** a značí se $\nu_g(\lambda)$.

Householderovy transformace

Definition 35

Householderovou reflekční maticí (elementární unitární maticí) nazveme každou matici $\mathbb{H}_{\vec{w}}$ tvaru

$$\mathbb{H}_{\vec{w}} = \mathbb{I} - 2\vec{w}\vec{w}^*,$$

kde $\vec{w}$ je **Householderův vektor**, pro který platí $\|\vec{w}\|_2 = \sqrt{(\vec{w}, \vec{w})} = 1.$

Theorem 36

Householderova reflekční matice je hermitovská a unitární.

Householderovy transformace

Theorem 37

Nechť $\mathbb{U}$ je unitární matice. Pak platí

$$\left\|\mathbb{U}\vec{x}\right\|_2 = \left\|\vec{x}\right\|_2 ,$$

pro libovolný vektor $\vec{x}$.

Householderovy transformace

Theorem 38

Nechť $\mathbb{H}_{\vec{w}}$ je Householderova reflekční matice a $\vec{v} \in \mathbb{C}^n$ je libovolný vektor. Pak vektor $\mathbb{H}_{\vec{w}}\vec{v}$ je zrcadlový obraz vektoru $\vec{v}$ podle nadroviny

$$L \equiv \left\{ \vec{x} \in \mathbb{C}^n \mid \vec{w}^* \vec{x} = \left(\vec{x}, \vec{w} \right) = 0 \right\}$$

v tom smyslu, že splňuje následující podmínky:

- $\left\| \mathbb{H}_{\vec{w}} \vec{v} \right\|_2 = \left\| \vec{v} \right\|_2$
- $\mathbb{H}_{\vec{w}} \vec{v} + \vec{v} \in L$
- $\left(\mathbb{H}_{\vec{w}} \vec{v} - \vec{v} \right) \perp L$.

Householderovy transformace

Theorem 39

Je-li λ vlastní číslo matice $\mathbb{A}$, pak existuje $\mathbb{H}_{\vec{w}}$, že

$$\mathbb{H}_{\vec{w}} \mathbb{A} \mathbb{H}_{\vec{w}} \vec{e}^{(1)} = \lambda \vec{e}^{(1)}.$$

Schurova věta

Schurova věta

Theorem 40

Pro libovolnou matici $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ existuje unitární matice $\mathbb{U}$ taková, že

$$\mathbb{A} = \mathbb{U}^* \mathbb{R} \mathbb{U},$$

kde $\mathbb{R}$ je horní trojúhelníková matice.

Remark 41

Jelikož podobné matice mají stejná vlastní čísla (viz. věta dříve), vlastní čísla matice $\mathbb{A}$ jsou na diagonále matice $\mathbb{R}$.

Schurova věta

Theorem 42

Normální trojúhelníková matice je diagonální.

Theorem 43

Pro libovolnou normální matici $\mathbb{A}$ existuje unitární matice $\mathbb{U}$ taková, že

$$\mathbb{A} = \mathbb{U}^* \mathbb{R} \mathbb{U},$$

kde $\mathbb{R}$ je diagonální matice. Je-li $\mathbb{A}$ hermitovská, pak $\mathbb{R}$ má na diagonále reálná čísla.

Jordanova věta

Theorem 44

Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ a $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ jsou všechna její navzájem různá vlastní čísla. Pak existuje regulární matice $\mathbb{T}$ taková, že

$$\mathbb{A} = \mathbb{T}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbb{J}_1^1 & & & & & & & & & & \\ & \mathbb{J}_2^1 & & & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & & & \\ & & & \mathbb{J}_{s_1}^1 & & & & & & & \\ & & & & \mathbb{J}_1^2 & & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & \mathbb{J}_{s_2}^2 & & & & \\ & & & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & & \mathbb{J}_1^p & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & \mathbb{J}_{s_p}^p \end{pmatrix} \mathbb{T},$$

kde diagonální bloky jsou tvaru

$$\mathbb{J}_i^k = \begin{pmatrix} \lambda_k & & & \\ 1 & \lambda_k & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_k \end{pmatrix},$$

pro $k \in \hat{p}$, $i \in \hat{s}_k$. Přitom až na pořadí diagonálních bloků je tato matice dána jednoznačně.

Jordanova věta

Remark 45

Z lineární algebry víme, že matice $\mathbb{A}$ *je diagonalizovatelná, právě když kořeny charakteristického polynomu leží v daném tělese (*$\mathbb{R}$ *nebo* $\mathbb{C}$*) a* $\nu_g(\lambda) = \nu_a(\lambda)$ *pro každé* $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$*. Obecně je ale* $\nu_g(\lambda) \leq \nu_a(\lambda)$*. Pokud platí, že* $\nu_g(\lambda) < \nu_a(\lambda)$ *pro nějaké* $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$*, pak matici nelze diagonalizovat, ale lze ji převést na Jordanův tvar s jedničkami pod diagonálou.*

Vlastní čísla matice

Theorem 46

Podobné matice $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ mají stejná vlastní čísla a k pevně zvolenému vlastnímu číslu λ přísluší stejný počet lineárně nezávislých vektorů jak u matice $\mathbb{A}$ tak u matice $\mathbb{B}$.

Důkaz.

Z Jordanovy věty. $\square$

Pozitivně definitní matice

Definition 47

Čtvercová matice $\mathbb{A}$ je **pozitivně definitní**, právě když pro každý vektor $\vec{x} \neq \vec{0}$ platí, že

$$\vec{x}^* \mathbb{A} \vec{x}$$

je kladné (> 0) reálné číslo. Značíme také $\mathbb{A} > 0$. Je-li pro čtvercovou matici $\mathbb{B}$ matice $\mathbb{A} - \mathbb{B} > 0$, pak píšeme $\mathbb{A} > \mathbb{B}$.

Theorem 48

Všechna vlastní čísla pozitivně definitní matice $\mathbb{A}$ jsou kladná. Je-li $\mathbb{A}$ hermitovská matice s kladnými vlastními čísly, pak je pozitivně definitní.

Pojem limity a konvergence v lineární algebře

Definition 49

Nechť je dána posloupnost vektorů $\vec{x}^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}\right)^T$ pro $k = 1, 2, 3 \ldots$. Říkáme, že posloupnost vektorů $\left\{\vec{x}^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje k vektoru $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$, právě když pro každé $i \in \hat{n}$

$$\lim_{k \to \infty} x_i^{(k)} = x_i.$$

Používáme značení

$$\vec{x}^{(k)} \to \vec{x},$$

nebo

$$\lim_{k \to \infty} \vec{x}^{(k)} = \vec{x}.$$

Pojem limity a konvergence v lineární algebře

Definition 50

Analogicky předchozí definici říkáme, že posloupnost matic

$$\mathbb{A}^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(k)} & \dots & a_{1m}^{(k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^{(k)} & \dots & a_{nm}^{(k)} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n,m},$$

pro $k = 1, 2, 3, \dots$ konverguje k matici $\mathbb{A}$, právě když pro každý prvek a_{ij} pro $i \in \hat{n}$ a $j \in \hat{m}$ platí

$$lim_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)} = a_{ij}.$$

Normy

Remark 51

Dokazovat konvergenci po prvcích by bylo velmi nešikovné. K vyšetřování konvergence použijeme normu.

Definition 52

Norma na množině vektorů z $\mathbb{C}^n$ je taková funkce, která každému vektoru $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ přiřazuje reálné číslo $\|\vec{x}\|$, a která splňuje následující podmínky:

- $\|\vec{x}\| \geq 0$ a $\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$,
- $\|\lambda\vec{x}\| = |\lambda| \, \|\vec{x}\|$ pro všechna $\lambda \in \mathbb{C}$ a všechna $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$,
- $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ pro všechna $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n$.

Normy

Remark 53

Snadno vidíme, že platí $\|\vec{x} - \vec{y}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} - \vec{y} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{y}$*. Tato vlastnost normy se často používá k důkazu, že dva vektory se rovnají.*

Normy

Příklady norem:

- **maximová norma** - $\|\vec{x}\|_\infty = \max_{i \in \hat{n}} |x_i|$
- **součtová norma** - $\|\vec{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$
- **euklidovská norma** - $\|\vec{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

Remark 54

Lze ukázat, že platí

$$\lim_{p\to\infty} \|\vec{x}\|_p = \lim_{p\to\infty} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|\vec{x}\|_\infty .$$

Dokažte, že uvedené normy splňují definici.

Normy

Theorem 55

Pro libovolné dvě normy $\|\cdot\|_\alpha$ a $\|\cdot\|_\beta$ na množině vektorů z $\mathbb{C}^n$ existují kladné konstanty γ_1 a γ_2 splňující

$$\gamma_1 \left\|\vec{x}\right\|_\alpha \leq \left\|\vec{x}\right\|_\beta \leq \gamma_2 \left\|\vec{x}\right\|_\alpha ,$$

pro libovolný vektor $\vec{x}$.

Bez důkazu.

Normy

Theorem 56

Nechť $\left\{\vec{x}^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ *je posloupnost vektorů. Potom*

$$\vec{x}^{(k)} \to \vec{x} \Leftrightarrow \left\|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}\right\| \to 0,$$

v libovolné normě $\|\cdot\|$.

Důkaz.

Pokud $\vec{x}^{(k)} \to \vec{x}$, pak $\left\|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}\right\|_\infty \to 0$ a existuje $\gamma > 0$ tak, že $\left\|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}\right\| \leq \gamma \left\|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}\right\|_\infty$ pro libovolnou normu $\|\cdot\|$.
Opačný směr se dokáže podobně. □

Normy

Definition 57

Norma na množině čtvercových matic řádu n je funkce, která každé matici $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ přiřazuje reálné číslo $\|\mathbb{A}\|$ splňující:

- $\|\mathbb{A}\| \geq 0$ a $\|\mathbb{A}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbb{A} = \theta$,
- $\|\lambda\mathbb{A}\| = |\lambda| \, \|\mathbb{A}\|$,
- $\|\mathbb{A} + \mathbb{B}\| \leq \|\mathbb{A}\| + \|\mathbb{B}\|$,
- $\|\mathbb{A}\mathbb{B}\| \leq \|\mathbb{A}\| \, \|\mathbb{B}\|$,

pro všechna $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n,n}$ a $\lambda \in \mathbb{C}$.

Normy

Remark 58

Na maticovou normu se lze dívat jako na vektorovou normu aplikovanou na vektory, které mají n^2 složek. Tato norma navíc splňuje čtvrtý bod definice. Proto i tato norma splňuje větu o konvergenci vektorů v normě. Tudíž i konvergenci matic lze vyšetřovat pomocí norem.

Normy

Příkladem maticové normy je Schurova norma:

$$\|\mathbb{A}\|_S = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2}.$$

Dokažte, že tato norma splňuje všechny čtyři body definice.

Normy

Definition 59

Maticová norma se nazývá **souhlasnou** s danou vektorovou normou, platí-li pro libovolnou matici $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ a libovolný vektor $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$

$$\left\|\mathbb{A}\vec{x}\right\| \leq \|\mathbb{A}\| \left\|\vec{x}\right\| .$$

Remark 60

Schurova maticová norma je souhlasná s euklidovskou normou.

Důkaz.

Dokažte. $\square$

Normy

Definition 61

Maticová norma **indukovaná vektorovou normou** je norma daná vztahem

$$\left\|\mathbb{A}\right\| = \max_{\left\|\vec{x}\right\|=1} \left\|\mathbb{A}\vec{x}\right\|,$$

pro $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$.

- dokažte, že takto definovaná maticová norma splňuje definici normy
- maximum existuje vždy, neboť jde o supremum spojité funkce na kompaktní množině
- ne pro každou maticovou normu existuje vektorová norma, která ji indukuje

Normy

Theorem 62

Při značení

- $\|\mathbb{A}\|_\infty = \max_{\|\vec{x}\|_\infty = 1} \left\|\mathbb{A}\vec{x}\right\|_\infty$,
- $\|\mathbb{A}\|_1 = \max_{\|\vec{x}\|_1 = 1} \left\|\mathbb{A}\vec{x}\right\|_1$,
- $\|\mathbb{A}\|_2 = \max_{\|\vec{x}\|_2 = 1} \left\|\mathbb{A}\vec{x}\right\|_2$,

pro každou matici $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ platí následující vztahy:

- $\|\mathbb{A}\|_\infty = \max_{i \in \hat{n}} \sum_{j=1}^{n} \left|a_{ij}\right|$,
- $\|\mathbb{A}\|_1 = \max_{j \in \hat{n}} \sum_{i=1}^{n} \left|a_{ij}\right|$,
- $\|\mathbb{A}\|_2 = \sqrt{\rho\left(\mathbb{A}^*\mathbb{A}\right)}$.

Normy

Definition 63

Buď $\mathbb{A}$ hermitovská a PD. Podle Schurovy věty je

$$\mathbb{A} = \mathbb{U}^* \mathbb{D} \mathbb{U},$$

kde $\mathbb{D}$ je diagonální matice s kladnými prvky. Pro libovolné $p \in \mathbb{R}$ definujeme

$$\mathbb{A}^p = \mathbb{U}^* \mathbb{D}^p \mathbb{U}.$$

Normy

Definition 64

Buď $\mathbb{A}$ hermitovská pozitivně definitní matice. Pak *energetickou* vektorovou a maticovou normu definujeme jako

$$\left\|\vec{x}\right\|_A := \left\|\mathbb{A}^{\frac{1}{2}}\vec{x}\right\|_2 ,$$

$$\left\|\mathbb{B}\right\|_A := \left\|\mathbb{A}^{\frac{1}{2}}\mathbb{B}\mathbb{A}^{-\frac{1}{2}}\right\|_2 .$$

Konvergence geometrické posloupnosti matic

Theorem 65

Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Potom platí

$$\mathbb{A}^k \to \theta \Leftrightarrow \rho(\mathbb{A}) < 1.$$

Theorem 66

Postačující podmínka pro to, aby $\mathbb{A}^k \to \theta$ pro $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ je, že existuje maticová norma taková, že $\|\mathbb{A}\| < 1$.

Theorem 67

Absolutní hodnota libovolného vlastního čísla $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$ je nejvýše rovna libovolné normě dané matice $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$.

Konvergence geometrické posloupnosti matic

Theorem 68

Nutnou a postačující podmínkou pro to, aby řada

$$\mathbb{I} + \mathbb{A} + \mathbb{A}^2 + \ldots,$$

konvergovala je, $\mathbb{A}^k \to \theta$. *Součtem této řady je pak matice*

$$(\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1}.$$

Konvergence geometrické posloupnosti matic

Theorem 69

Je-li $\|\mathbb{A}\| < 1$ *pro* $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$*, pak*

$$\left\|(\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1} - \left(\mathbb{I} + \mathbb{A} + \mathbb{A}^2 + \cdots + \mathbb{A}^k\right)\right\| \leq \frac{\|\mathbb{A}\|^{k+1}}{1 - \|\mathbb{A}\|}.$$

Otázky

- silně regulární matice
- rozklad matice $\mathbb{A} = \mathbb{LDR}$
- **Householderova transformace**
- **Schurova věta**
- **Jordanova věta**
- generované maticové normy
- **konvergence geometrické posloupnosti matic**