Tomáš Oberhuber

Faculty of Nuclear Sciences and Physical Engineering
Czech Technical University in Prague

Video na Youtube

Aritmetický vektor

Definition 1

Aritmetický vektor $\vec{x}$ je uspořádaná n-tice čísel $x_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \ldots, n$. Píšeme

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n.$$

Aritmetický vektor

Definition 2

Definujeme **sčítání vektorů** po složkách tj.

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

a **násobení vektoru číslem** po složkách tj.

$$\lambda \vec{x} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

Aritmetický vektor

Definition 3

Definujeme **standardní skalární součin dvou vektorů**

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$$

Axiomy skalárního součinu

Pro takto definovaný skalární součin platí následující:

- $(\vec{x}, \vec{x}) \geq 0$ a $(\vec{x}, \vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$
- $(\vec{x}, \vec{y}) = \overline{(\vec{y}, \vec{x})}$
- $(\vec{x} + \vec{y}, \vec{z}) = (\vec{x}, \vec{z}) + (\vec{y}, \vec{z})$
- $(\lambda \vec{x}, \vec{y}) = \lambda (\vec{x}, \vec{y})$,

kde $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{C}^n$ a $\lambda \in \mathbb{C}$. Jde o čtyři axiomy, který definují obecně skalární součin.

Schwarzova nerovnost

Pro vektory $\vec{x}$ a $\vec{y}$ platí tzv. **Schwarzova nerovnost**

$$\left|(\vec{x},\vec{y})\right|^2 \leq (\vec{x},\vec{x}) \cdot (\vec{y},\vec{y})\,.$$

Rovnost nastává, právě když vektory $\vec{x}$ a $\vec{y}$ jsou lineárně nezávislé.

Matice

Definition 4

Matice s rozměry $n \times m$ (tj. n řádků a m sloupců) je dána čísly $a_{ij} \in \mathbb{C}, i \in \hat{n}, j \in \hat{m}$. Matici lze také chápat jako posloupnost m vektorů z nichž každý má n řádků (složek). Píšeme

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n,m}$$

Matice

Definition 5

Definujeme **sčítání matic** po prvcích, tj. pro $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n,m}$ je

$$\mathbb{A} + \mathbb{B} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1m} + b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \dots & a_{nm} + b_{nm} \end{pmatrix},$$

dále definujeme **násobení matice číslem**, tj. pro $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,m}, \lambda \in \mathbb{C}$ je

$$\lambda \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \dots & \lambda a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Matice

Definition 6

Definujeme **násobení matice a vektoru**, tj. pro $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,m}$ a $\vec{x} \in \mathbb{C}^m$ je

$$\mathbb{A}\vec{x} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m a_{1i}x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^m a_{ni}x_i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

a **násobení dvou matic**, tj. pro $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,k}, \mathbb{B} \in \mathbb{C}^{k,m}$ je

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^k a_{1k}b_{k1} & \dots & \sum_{i=1}^k a_{1k}b_{km} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^k a_{nk}b_{k1} & \dots & \sum_{i=1}^k a_{nk}b_{km} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n,m}$$

Matice

Při násobení matic platí asociativita, tj.

$$(\mathbb{A}\mathbb{B})\,\mathbb{C} = \mathbb{A}\,(\mathbb{B}\mathbb{C})\,,$$

ale obecně neplatí komutativní zákon, tj.

$$\mathbb{A}\mathbb{B} \neq \mathbb{B}\mathbb{A}.$$

Determinant matice

Definition 7

Pro čtvercové matice řádu n, tj. $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$, definujeme

$$\det \mathbb{A} = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}\pi\, a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)},$$

kde S_n je množina všech permutací na $\hat{n}$ a $\operatorname{sgn}\pi = (-1)^{\# TRANSPOZIC \pi}$.

Definition 8

Buď $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,m}$. **Subdeterminant řádu q vybraný z matice** $\mathbb{A}$ je determinant libovolné čtvercové matice řádu q získané z matice $\mathbb{A}$ odstraněním libovolných $n-q$ řádků a $m-q$ sloupců.

Transponovaná a komplexně sdružená matice

Definition 9

Transponovaná matice k matici $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,m}$ je matice $\mathbb{A}^T$, pro niž platí

$$\left(\mathbb{A}^T\right)_{ij} = a_{ji},$$

pro $i \in \hat{m}$ a $j \in \hat{n}$.

Definition 10

Komplexně sdružená matice k matici $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,m}$ je matice $\overline{\mathbb{A}}$, pro niž platí

$$\left(\overline{\mathbb{A}}\right)_{ij} = \overline{a}_{ij},$$

pro $i \in \hat{n}$ a $i \in \hat{m}$.

Transponovaná a komplexně sdružená matice

Platí následující vztahy:

- $(\mathbb{A}\mathbb{B})^T = \mathbb{B}^T \mathbb{A}^T$
- $\overline{\mathbb{A}\mathbb{B}} = \overline{\mathbb{A}}\ \overline{\mathbb{B}}$

Čtvercové matice

Definition 11

Hermitovsky sdružená (konjugovaná) matice k matici $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,m}$ je matice $\mathbb{A}^*$ pro niž platí

$$\mathbb{A}^* = \overline{\mathbb{A}^T}.$$

Platí:

- $(\mathbb{A}\mathbb{B})^* = \overline{(\mathbb{A}\mathbb{B})}^T = \overline{\mathbb{B}}^T \overline{\mathbb{A}}^T = \mathbb{B}^* \mathbb{A}^*$

Čtvercové matice

Pro všechna $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n$ platí:

$$(\mathbb{A}\vec{x}, \vec{y}) = \left(\mathbb{A}\vec{x}\right)^T \overline{\vec{y}} = \vec{x}^T \mathbb{A}^T \overline{\vec{y}} = \vec{x}^T \overline{\overline{\mathbb{A}^T} \vec{y}} = \vec{x}^T \overline{\mathbb{A}^* \vec{y}} = (\vec{x}, \mathbb{A}^* \vec{y}).$$

Hodnost matice

Definition 12

Hodnost (rank) matice $\mathbb{A}$ značíme $h(\mathbb{A})$ nebo $rank(\mathbb{A})$ a je to maximální počet nenulových subdeterminantů různého řádu vybraných z matice $\mathbb{A}$.

Definition 13

Obraz (range) matice $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,m}$ je vektorový prostor definovaný jako

$$range(\mathbb{A}) \equiv \left\{ \mathbb{A}\vec{x} \in \mathbb{C}^n \mid \vec{x} \in \mathbb{C}^m \right\}.$$

Jádro matice

Definition 14

Jádro (kernel) matice $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,m}$ je vektorový prostor definovaný jako

$$ker\left(\mathbb{A}\right) \equiv \left\{\vec{x} \in \mathbb{C}^m \mid \mathbb{A}\vec{x} = \vec{0}\right\}$$

Platí následující vztahy:

- Pro $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,m}$ je $rank\left(\mathbb{A}\right) = rank\left(\mathbb{A}^T\right)$.
- Pro $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,m}$ je $rank\left(\mathbb{A}\right) = rank\left(\mathbb{A}^*\right)$.
- Pro $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,m}$ je $rank\left(\mathbb{A}\right) + dim\left(ker\left(\mathbb{A}\right)\right) = m$.

Čtvercové matice

Definition 15

Čtvercová matice $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ je **regulární**, právě když je její hodnost rovna n. Jinak je tato matice singulární.

Platí, že $\det \mathbb{A} \neq 0 \Leftrightarrow \mathbb{A}$ je regulární.

Čtvercové matice

Definition 16

Matice $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ je **silně regulární**, právě když platí

$$
\begin{aligned}
a_{11} &\neq 0, \\
\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} &\neq 0, \\
\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} &\neq 0, \\
&\vdots \\
\det \mathbb{A} &\neq 0.
\end{aligned}
$$

Čtvercové matice

Definition 17

Čtvercová matice $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ je **diagonální**, právě když $a_{ij} = 0$ pro $i \neq j$ a $i, j \in \hat{n}$.

Definition 18

Jednotková matice $\mathbb{I}$ je diagonální matice taková, že $a_{ii} = 1$ pro $i \in \hat{n}$.

Pro regulární matici $\mathbb{A}$ existuje matice $\mathbb{A}^{-1}$ taková, že $\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{A} = \mathbb{I}$.

Čtvercové matice

Definition 19

Pro čtvercové matice $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ definujeme:

- $\mathbb{A}$ je **normální** $\Leftrightarrow \mathbb{A}\mathbb{A}^* = \mathbb{A}^*\mathbb{A}$
- $\mathbb{A}$ je **samosdružená** $\Leftrightarrow \mathbb{A}^* = \mathbb{A}$
  - samosdružená matice $\mathbb{A}$ je **symetrická** $\Leftrightarrow \mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$
  - samosdružená matice $\mathbb{A}$ je **hermitovská** $\Leftrightarrow \mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$
- $\mathbb{A}$ je **izometrická** $\Leftrightarrow \mathbb{A}^* = \mathbb{A}^{-1}$
  - izometrická matice $\mathbb{A}$ je **ortogonální** $\Leftrightarrow \mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$
  - izometrická matice $\mathbb{A}$ je **unitární** $\Leftrightarrow \mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$.

Izometrické matice

- $\mathbb{I}$ je ortogonální i unitární
- je-li $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$, pak platí:
  - jsou-li matice $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ ortogonální $\Rightarrow$ $\mathbb{AB}$ je ortogonální
  - je-li $\mathbb{A}$ ortogonální $\Rightarrow \mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}^T$
  - je-li $\mathbb{A}$ ortogonální $\Rightarrow \det \mathbb{A} = \pm 1$
- je-li $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$, pak platí:
  - jsou-li matice $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ unitární $\Rightarrow$ $\mathbb{AB}$ je unitární
  - je-li $\mathbb{A}$ unitární $\Rightarrow \mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}^*$
  - je-li $\mathbb{A}$ unitární $\Rightarrow |\det \mathbb{A}| = 1$

Unitární matice

Theorem 20

Pro unitární (resp. ortogonální) matici $\mathbb{U}$ platí, že její sloupce jsou ortonormální.

Proof.

$$\delta_{ij} = (\mathbb{I})_{ij} = (\mathbb{U}\mathbb{U}^*)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} u_{ik}\overline{u_{kj}} = (\mathbb{U}_{i\cdot}, \mathbb{U}_{j\cdot})$$

$$\delta_{ij} = (\mathbb{I})_{ij} = (\mathbb{U}^*\mathbb{U})_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \overline{u_{ki}}u_{jk} = (\mathbb{U}_{\cdot i}, \mathbb{U}_{\cdot j})$$

$\square$

Blokové matice

Definition 21

Bloková matice je taková, že její jednotlivé prvky tvoří opět matice. Přitom musí platit, že prvky blokové matice ve stejném sloupci mají stejný počet sloupců a prvky blokové matice ve stejném řádku mají stejný počet řádků.

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{cc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ \hline a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{11} & \mathbb{A}_{12} \\ \mathbb{A}_{21} & \mathbb{A}_{22} \end{pmatrix}$$

Blokové matice

Nechť $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} \mathbb{B}_{11} & \mathbb{B}_{12} \\ \mathbb{B}_{21} & \mathbb{B}_{22} \end{pmatrix}$.

- Pokud mají příslušné bloky matic $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ stejné rozměry, pak lze tyto matice sečíst po blocích, tj.

$$\mathbb{A} + \mathbb{B} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{11} + \mathbb{B}_{11} & \mathbb{A}_{12} + \mathbb{B}_{12} \\ \mathbb{A}_{21} + \mathbb{B}_{21} & \mathbb{A}_{22} + \mathbb{B}_{22} \end{pmatrix}.$$

- Je-li $\lambda \in \mathbb{R}$, pak

$$\lambda\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \lambda\mathbb{A}_{11} & \lambda\mathbb{A}_{12} \\ \lambda\mathbb{A}_{21} & \lambda\mathbb{A}_{22} \end{pmatrix}.$$

Blokové matice

- Chceme-li spočítat součin $\mathbb{C} = \mathbb{A}\mathbb{B}$, pak platí

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} \mathbb{C}_{11} & \mathbb{C}_{12} \\ \mathbb{C}_{21} & \mathbb{C}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{11} & \mathbb{A}_{12} \\ \mathbb{A}_{21} & \mathbb{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{B}_{11} & \mathbb{B}_{12} \\ \mathbb{B}_{21} & \mathbb{B}_{22} \end{pmatrix},$$

kde

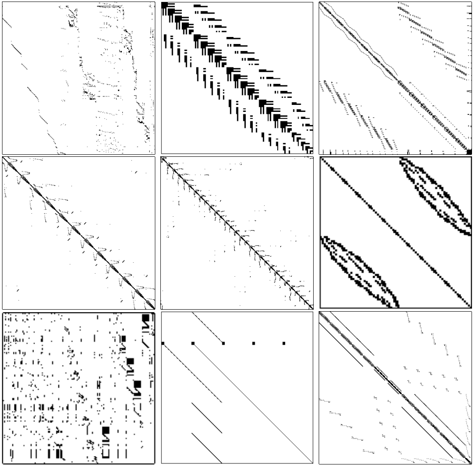
$$\begin{aligned} \mathbb{C}_{11} &= \mathbb{A}_{11}\mathbb{B}_{11} + \mathbb{A}_{12}\mathbb{B}_{21}, \\ \mathbb{C}_{12} &= \mathbb{A}_{11}\mathbb{B}_{12} + \mathbb{A}_{12}\mathbb{B}_{22}, \\ \mathbb{C}_{21} &= \mathbb{A}_{21}\mathbb{B}_{11} + \mathbb{A}_{22}\mathbb{B}_{21}, \\ \mathbb{C}_{22} &= \mathbb{A}_{21}\mathbb{B}_{12} + \mathbb{A}_{22}\mathbb{B}_{22}, \end{aligned}$$

a požadujeme, aby matice $\mathbb{A}_{11}$ měla stejný počet sloupců jako má matice $\mathbb{B}_{11}$ řádků. To samé požadujeme pro bloky $\mathbb{A}_{12}$ a $\mathbb{B}_{21}$ a podobně pro další bloky.

Řídké matice

Definition 22

Řídká matice je taková matice, která má většinu svých prvků nulových.



Zdroj: Matrix market

Řídké matice

Remark 23

U řídkých matic se snažíme ukládat do paměti jen nenulové prvky (CSR formát) a stejně tak provádět veškeré výpočty pouze s nenulovými prvky. Tím lze mnoho algoritmů v numerické matematice výrazně zefektivnit.