Tomáš Oberhuber

Faculty of Nuclear Sciences and Physical Engineering
Czech Technical University in Prague

Video na Youtube

Trojúhelníkové matice

Definition 1

Čtvercová matice $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ je **dolní trojúhelníková**, právě když

$$a_{ij} = 0 \text{ pro } i, j \in \hat{n} \text{ a } j > i, \text{ tj.}$$

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Čtvercová matice $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ je **horní trojúhelníková**, právě když

$$a_{ij} = 0 \text{ pro } i, j \in \hat{n} \text{ a } j < i, \text{ tj.}$$

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Trojúhelníkové matice

Theorem 2

Součin dvou dolních (resp. horních) trojúhelníkových matic je dolní (resp. horní) trojúhelníková matice. Přitom na diagonále má výsledná matice součin odpovídajících diagonálních prvků původních matic.

Důkaz.

Lze ukázat přímo ze sum pro součin dvou matic.
Video na Youtube □

Trojúhelníkové matice

Theorem 3

Inverzní matice k horní (resp. dolní) trojúhelníkové matici je opět horní (resp. dolní) trojúhelníková matice a její diagonální prvky jsou převrácené hodnoty odpovídajících diagonálních prvků původní matice.

Důkaz.

Pomocí adjungované matice.
Video na Youtube □

Rozklad matice na dolní a horní trojúhelníkovou

Theorem 4

Každou silně regulární (tedy čtvercovou) matici $\mathbb{A}$ lze jedinečným způsobem vyjádřit ve tvaru součinu

$$\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{R},$$

kde

- $\mathbb{L}$ *je dolní (levá) trojúhelníková matice s jedničkami na diagonále*
- $\mathbb{R}$ *je horní (pravá) trojúhelníková matice s jedničkami na diagonále*
- $\mathbb{D}$ *je diagonální matice*

Důkaz.

Video na Youtube

Podobnostní transformace

Definition 5

Matice $\mathbb{A}$ se nazývá **podobná** matici $\mathbb{B}$, pokud existuje regulární matice $\mathbb{T}$ taková, že $\mathbb{A} = \mathbb{T}^{-1}\mathbb{B}\mathbb{T}$. Mluvíme pak o **podobnostní transformaci maticí** $\mathbb{T}$.

Remark 6

Tato vlastnost je symetrická. Tj. je-li $\mathbb{A}$ podobná $\mathbb{B}$, pak je $\mathbb{B}$ podobná $\mathbb{A}$

$$\mathbb{A} = \mathbb{T}^{-1}\mathbb{B}\mathbb{T} \Rightarrow \mathbb{T}\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{T} \Rightarrow \mathbb{T}\mathbb{A}\mathbb{T}^{-1} = \mathbb{B}.$$

Matice podobnostní transformace je $\mathbb{T}^{-1}$.

Podobnostní transformace

Remark 7

V rozkladu matice na dolní a horní trojúhelníkovou matici $\mathbb{A} = \mathbb{LDR}$ *nejde o žádnou podobnostní transformaci. To je její nevýhoda.*

Remark 8

Podobné matice vlastně vyjadřují stejný lineární operátor v různých bázích. Podobnostní matice $\mathbb{T}$ *je vlastně maticí přechodu* ${}_{\mathcal{X}}\mathbb{P}_{\mathcal{Y}}$*. Budou nás zajímat rozklady matic založené na podobnostní transformaci. Jejich výhodou je, že dokáží odhalit spektrum matice.*

Vlastní čísla matice

Definition 9

Vlastním číslem matice $\mathbb{A}$ (eigenvalue) nazýváme takové číslo λ, pro které existuje nenulový vektor $\vec{x}$ takový, že $\mathbb{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$. Vektor $\vec{x}$ se nazývá **vlastním vektorem matice** $\mathbb{A}$ (eigenvector) k číslu λ. Množina všech vlastních čísel matice $\mathbb{A}$ se nazývá **spektrum matice** $\mathbb{A}$ a značíme je $\sigma(\mathbb{A})$. Číslo

$$\rho(\mathbb{A}) = \max_{\lambda \in \sigma(\mathbb{A})} |\lambda|,$$

nazýváme **spektrálním poloměrem matice** $\mathbb{A}$.

Vlastní čísla matice

Remark 10

$$\mathbb{A}\vec{x} = \lambda\vec{x} \Leftrightarrow \mathbb{A}\vec{x} - \lambda\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow (\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}) = 0 \Leftrightarrow \det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}) = 0.$$

Definition 11

Rovnici $\det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}) = 0$ nazýváme **charakteristickou rovnicí** matice $\mathbb{A}$ a polynom $\det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})$ **charakteristickým polynomem** matice $\mathbb{A}$.

Definition 12

Násobnost vlastního čísla λ jakožto kořene charakteristického polynomu se nazývá **algebraická násobnost** a značí se $\nu_a(\lambda)$. Počet lineárně nezávislých vlastních vektorů k vlastnímu číslu λ je jeho **geometrická násobnost** a značí se $\nu_g(\lambda)$.

Householderovy transformace

Definition 13

Householderovou reflekční maticí (elementární unitární maticí) nazveme každou matici $\mathbb{H}_{\vec{w}}$ tvaru

$$\mathbb{H}_{\vec{w}} = \mathbb{I} - 2\vec{w}\vec{w}^*,$$

kde $\vec{w}$ je **Householderův vektor**, pro který platí $\left\|\vec{w}\right\|_2 = \sqrt{(\vec{w}, \vec{w})} = 1.$

Theorem 14

Householderova reflekční matice je hermitovská a unitární.

Důkaz.

Video na Youtube

□

Householderovy transformace

Theorem 15

Nechť $\mathbb{U}$ je unitární matice. Pak platí

$$\left\|\mathbb{U}\vec{x}\right\|_2 = \left\|\vec{x}\right\|_2 ,$$

pro libovolný vektor $\vec{x}$.

Důkaz.

Video na Youtube

$\square$

Householderovy transformace

Theorem 16

Nechť $\mathbb{H}_{\vec{w}}$ je Householderova reflekční matice a $\vec{v} \in \mathbb{C}^n$ je libovolný vektor. Pak vektor $\mathbb{H}_{\vec{w}}\vec{v}$ je zrcadlový obraz vektoru $\vec{v}$ podle nadroviny

$$L \equiv \left\{\vec{x} \in \mathbb{C}^n \mid \vec{w}^*\vec{x} = \left(\vec{x}, \vec{w}\right) = 0\right\}$$

v tom smyslu, že splňuje následující podmínky:

- $\left\|\mathbb{H}_{\vec{w}}\vec{v}\right\|_2 = \left\|\vec{v}\right\|_2$
- $\mathbb{H}_{\vec{w}}\vec{v} + \vec{v} \in L$
- $\left(\mathbb{H}_{\vec{w}}\vec{v} - \vec{v}\right) \perp L.$

Důkaz.

Video na Youtube □

Householderovy transformace

Theorem 17

Je-li λ vlastní číslo matice $\mathbb{A}$, pak existuje $\mathbb{H}_{\vec{w}}$, že

$$\mathbb{H}_{\vec{w}} \mathbb{A} \mathbb{H}_{\vec{w}} \vec{e}^{(1)} = \lambda \vec{e}^{(1)}.$$

Důkaz.

Video na Youtube

$\square$

Schurova věta

Schurova věta

Theorem 18

Pro libovolnou matici $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ existuje unitární matice $\mathbb{U}$ taková, že

$$\mathbb{A} = \mathbb{U}^* \mathbb{R} \mathbb{U},$$

kde $\mathbb{R}$ je horní trojúhelníková matice.

Důkaz.

Video na Youtube $\square$

Remark 19

Jelikož podobné matice mají stejná vlastní čísla (viz. věta dříve), vlastní čísla matice $\mathbb{A}$ jsou na diagonále matice $\mathbb{R}$.

Schurova věta

Theorem 20

Normální trojúhelníková matice je diagonální.

Důkaz.

Video na Youtube □

Theorem 21

Pro libovolnou normální matici $\mathbb{A}$ existuje unitární matice $\mathbb{U}$ taková, že

$$\mathbb{A} = \mathbb{U}^*\mathbb{R}\mathbb{U},$$

kde $\mathbb{R}$ je diagonální matice. Je-li $\mathbb{A}$ hermitovská, pak $\mathbb{R}$ má na diagonále reálná čísla.

Důkaz.

Video na Youtube □

Jordanova věta

Theorem 22

Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ a $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ jsou všechna její navzájem různá vlastní čísla. Pak existuje regulární matice $\mathbb{T}$ taková, že

$$\mathbb{A} = \mathbb{T}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbb{J}_1^1 & & & & & & & & & & \\ & \mathbb{J}_2^1 & & & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & & & \\ & & & \mathbb{J}_{s_1}^1 & & & & & & & \\ & & & & \mathbb{J}_1^2 & & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & \mathbb{J}_{s_2}^2 & & & & \\ & & & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & & \mathbb{J}_1^p & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & \mathbb{J}_{s_p}^p \end{pmatrix} \mathbb{T},$$

kde diagonální bloky jsou tvaru

$$\mathbb{J}_i^k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & & \\ & \lambda_k & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_k \end{pmatrix},$$

pro $k \in \hat{p}$, $i \in \hat{s}_k$. Přitom až na pořadí diagonálních bloků je tato matice dána jednoznačně.

Důkaz.

Video na Youtube

□

Jordanova věta

Remark 23

Z lineární algebry víme, že matice $\mathbb{A}$ je diagonalizovatelná, právě když kořeny charakteristického polynomu leží v daném tělese ($\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$) a $\nu_g(\lambda) = \nu_a(\lambda)$ pro každé $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$. Obecně je ale $\nu_g(\lambda) \leq \nu_a(\lambda)$. Pokud platí, že $\nu_g(\lambda) < \nu_a(\lambda)$ pro nějaké $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$, pak matici nelze diagonalizovat, ale lze ji převést na Jordanův tvar s jedničkami pod diagonálou.

Vlastní čísla matice

Theorem 24

Podobné matice $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ mají stejná vlastní čísla a k pevně zvolenému vlastnímu číslu λ přísluší stejný počet lineárně nezávislých vlastních vektorů jak u matice $\mathbb{A}$ tak u matice $\mathbb{B}$.

Důkaz.

Z Jordanovy věty. $\square$

Otázky

- silně regulární matice
- rozklad matice $\mathbb{A} = \mathbb{LDR}$
- **Householderova transformace**
- **Schurova věta**
- **Jordanova věta**