Tomáš Oberhuber

Faculty of Nuclear Sciences and Physical Engineering
Czech Technical University in Prague

Video na Youtube

Pojem limity a konvergence v lineární algebře

Definition 1

Nechť je dána posloupnost vektorů $\vec{x}^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}\right)^T$ pro $k = 1, 2, 3 \ldots$. Říkáme, že posloupnost vektorů $\left\{\vec{x}^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje k vektoru $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$, právě když pro každé $i \in \hat{n}$

$$\lim_{k \to \infty} x_i^{(k)} = x_i.$$

Používáme značení

$$\vec{x}^{(k)} \to \vec{x},$$

nebo

$$\lim_{k \to \infty} \vec{x}^{(k)} = \vec{x}.$$

Pojem limity a konvergence v lineární algebře

Definition 2

Analogicky předchozí definici říkáme, že posloupnost matic

$$\mathbb{A}^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(k)} & \dots & a_{1m}^{(k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^{(k)} & \dots & a_{nm}^{(k)} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n,m},$$

pro $k = 1, 2, 3, \dots$ konverguje k matici $\mathbb{A}$, právě když pro každý prvek a_{ij} pro $i \in \hat{n}$ a $j \in \hat{m}$ platí

$$lim_{k \to \infty} a_{ij}^{(k)} = a_{ij}.$$

Normy

Remark 3

Dokazovat konvergenci po prvcích by bylo velmi nešikovné. K vyšetřování konvergence použijeme normu.

Definition 4

Norma na množině vektorů z $\mathbb{C}^n$ je taková funkce, která každému vektoru $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ přiřazuje reálné číslo $\|\vec{x}\|$, a která splňuje následující podmínky:

- $\|\vec{x}\| \geq 0$ a $\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$,
- $\|\lambda\vec{x}\| = |\lambda| \, \|\vec{x}\|$ pro všechna $\lambda \in \mathbb{C}$ a všechna $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$,
- $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ pro všechna $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n$.

Normy

Remark 5

Snadno vidíme, že platí $\left\|\vec{x}-\vec{y}\right\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x}-\vec{y} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{y}$*. Tato vlastnost normy se často používá k důkazu, že dva vektory se rovnají.*

Normy

Příklady norem:

- **maximová norma** - $\left\|\vec{x}\right\|_\infty = \max_{i\in\hat{n}} |x_i|$
- **součtová norma** - $\left\|\vec{x}\right\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$
- **euklidovská norma** - $\left\|\vec{x}\right\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

Remark 6

Lze ukázat, že platí

$$\lim_{p\to\infty} \left\|\vec{x}\right\|_p = \lim_{p\to\infty} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left\|\vec{x}\right\|_\infty .$$

Dokažte, že uvedené normy splňují definici.

Normy

Theorem 7

Pro libovolné dvě normy $\|\cdot\|_\alpha$ a $\|\cdot\|_\beta$ na množině vektorů z $\mathbb{C}^n$ existují kladné konstanty γ_1 a γ_2 splňující

$$\gamma_1 \left\|\vec{x}\right\|_\alpha \leq \left\|\vec{x}\right\|_\beta \leq \gamma_2 \left\|\vec{x}\right\|_\alpha,$$

pro libovolný vektor $\vec{x}$.

Bez důkazu.

Normy

Theorem 8
Nechť $\left\{\vec{x}^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ *je posloupnost vektorů. Potom*

$$\vec{x}^{(k)} \rightarrow \vec{x} \Leftrightarrow \left\|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}\right\| \rightarrow 0,$$

v libovolné normě $\|\cdot\|$.

Důkaz.
Video na Youtube

$\square$

Normy

Definition 9

Norma na množině čtvercových matic řádu n je funkce, která každé matici $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ přiřazuje reálné číslo $\|\mathbb{A}\|$ splňující:

- $\|\mathbb{A}\| \geq 0$ a $\|\mathbb{A}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbb{A} = \theta$,
- $\|\lambda\mathbb{A}\| = |\lambda| \, \|\mathbb{A}\|$,
- $\|\mathbb{A} + \mathbb{B}\| \leq \|\mathbb{A}\| + \|\mathbb{B}\|$,
- $\|\mathbb{A}\mathbb{B}\| \leq \|\mathbb{A}\| \, \|\mathbb{B}\|$,

pro všechna $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n,n}$ a $\lambda \in \mathbb{C}$.

Normy

Remark 10

Na maticovou normu se lze dívat jako na vektorovou normu aplikovanou na vektory, které mají n^2 *složek. Tato norma navíc splňuje čtvrtý bod definice. Proto i tato norma splňuje větu o konvergenci vektorů v normě. Tudíž i konvergenci matic lze vyšetřovat pomocí norem.*

Normy

Příkladem maticové normy je Schurova norma:

$$\|\mathbb{A}\|_S = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2}.$$

Dokažte, že tato norma splňuje všechny čtyři body definice.

Normy

Definition 11

Maticová norma se nazývá **souhlasnou** s danou vektorovou normou, platí-li pro libovolnou matici $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ a libovolný vektor $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$

$$\left\|\mathbb{A}\vec{x}\right\| \leq \|\mathbb{A}\| \left\|\vec{x}\right\|.$$

Remark 12

Schurova maticová norma je souhlasná s euklidovskou normou.

Důkaz.

Dokažte. $\square$

Normy

Definition 13

Maticová norma **indukovaná vektorovou normou** je norma daná vztahem

$$\|\mathbb{A}\| = \max_{\|\vec{x}\|=1} \|\mathbb{A}\vec{x}\|,$$

pro $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$.

- dokažte, že takto definovaná maticová norma splňuje definici normy
- maximum existuje vždy, neboť jde o supremum spojité funkce na kompaktní množině
- ne pro každou maticovou normu existuje vektorová norma, která ji indukuje

Normy

Theorem 14

Při značení

- $\|\mathbb{A}\|_\infty = \max_{\|\vec{x}\|_\infty = 1} \|\mathbb{A}\vec{x}\|_\infty$,
- $\|\mathbb{A}\|_1 = \max_{\|\vec{x}\|_1 = 1} \|\mathbb{A}\vec{x}\|_1$,
- $\|\mathbb{A}\|_2 = \max_{\|\vec{x}\|_2 = 1} \|\mathbb{A}\vec{x}\|_2$,

pro každou matici $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ platí následující vztahy:

- $\|\mathbb{A}\|_\infty = \max_{i \in \hat{n}} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$,
- $\|\mathbb{A}\|_1 = \max_{j \in \hat{n}} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$,
- $\|\mathbb{A}\|_2 = \sqrt{\rho\left(\mathbb{A}^*\mathbb{A}\right)}$.

Důkaz.

Video na Youtube

□

Pozitivně definitní matice

Definition 15

Čtvercová matice $\mathbb{A}$ je **pozitivně definitní**, právě když pro každý vektor $\vec{x} \neq \vec{0}$ platí, že

$$\vec{x}^* \mathbb{A} \vec{x}$$

je kladné (> 0) reálné číslo. Značíme také $\mathbb{A} > 0$. Je-li pro čtvercovou matici $\mathbb{B}$ matice $\mathbb{A} - \mathbb{B} > 0$, pak píšeme $\mathbb{A} > \mathbb{B}$.

Theorem 16

Všechna vlastní čísla pozitivně definitní matice $\mathbb{A}$ jsou kladná. Je-li $\mathbb{A}$ hermitovská matice s kladnými vlastními čísly, pak je pozitivně definitní.

Důkaz.

Video na Youtube

□

Normy

Definition 17

Buď $\mathbb{A}$ hermitovská a PD. Podle Schurovy věty je

$$\mathbb{A} = \mathbb{U}^* \mathbb{D} \mathbb{U},$$

kde $\mathbb{D}$ je diagonální matice s kladnými prvky. Pro libovolné $p \in \mathbb{R}$ definujeme

$$\mathbb{A}^p = \mathbb{U}^* \mathbb{D}^p \mathbb{U}.$$

Normy

Definition 18

Buď $\mathbb{A}$ hermitovská pozitivně definitní matice. Pak *energetickou* vektorovou a maticovou normu definujeme jako

$$\left\|\vec{x}\right\|_A := \left\|\mathbb{A}^{\frac{1}{2}}\vec{x}\right\|_2,$$

$$\left\|\mathbb{B}\right\|_A := \left\|\mathbb{A}^{\frac{1}{2}}\mathbb{B}\mathbb{A}^{-\frac{1}{2}}\right\|_2.$$

Konvergence geometrické posloupnosti matic

Theorem 19

Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. *Potom platí*

$$\mathbb{A}^k \to \theta \Leftrightarrow \rho\left(\mathbb{A}\right) < 1.$$

Důkaz.

Video na Youtube □

Konvergence geometrické posloupnosti matic

Theorem 20

Postačující podmínka pro to, aby $\mathbb{A}^k \rightarrow \theta$ pro $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ je, že existuje maticová norma taková, že $\|\mathbb{A}\| < 1$.

Důkaz.

Video na Youtube □

Konvergence geometrické posloupnosti matic

Theorem 21

Absolutní hodnota libovolného vlastního čísla $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$ je nejvýše rovna libovolné normě dané matice $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$.

Důkaz.

Video na Youtube $\square$

Konvergence geometrické maticové řady

Theorem 22

Nutnou a postačující podmínkou pro to, aby řada

$$\mathbb{I} + \mathbb{A} + \mathbb{A}^2 + \ldots,$$

konvergovala je, $\mathbb{A}^k \rightarrow \theta$. *Součtem této řady je pak matice*

$$(\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1}.$$

Důkaz.

Video na Youtube □

Konvergence geometrické maticové řady

Theorem 23

Je-li $\|\mathbb{A}\| < 1$ *pro* $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$*, pak*

$$\left\| (\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1} - \left(\mathbb{I} + \mathbb{A} + \mathbb{A}^2 + \cdots + \mathbb{A}^k \right) \right\| \leq \frac{\|\mathbb{A}\|^{k+1}}{1 - \|\mathbb{A}\|}.$$

Důkaz.

Video na Youtube

$\square$

Otázky

- **pozitivně definitní matice**
- **konvergence geometrické posloupnosti matic**
- generované maticové normy