

Vlastní čísla
matic

Částečný
problém
vlastních čísel

Mocninná metoda
Redukční metoda

Výpočet
kompletního
spektra matice

Trojúhelníková
metoda

LR algoritmus

QR algoritmus

Gramův-Schmidtův
ortonormalizační
proces

Householderovy
transformace

Givensovy rotace

QR iterace

Hessenbergovy QR
iterace

Shrnutí a
otázky

Tomáš Oberhuber

Faculty of Nuclear Sciences and Physical Engineering
Czech Technical University in Prague

1 Vlastní čísla matic

2 Částečný problém vlastních čísel

Mocninná metoda

Redukční metoda

3 Výpočet kompletního spektra matice

Trojúhelníková metoda

LR algoritmus

QR algoritmus

Gramův-Schmidtův ortonormalizační proces

Householderovy transformace

Givensovy rotace

QR iterace

Hessenbergovy QR iterace

4 Shrnutí a otázky

Vlastní čísla matic - aplikace

Vlastní čísla matic

Částečný problém vlastních čísel

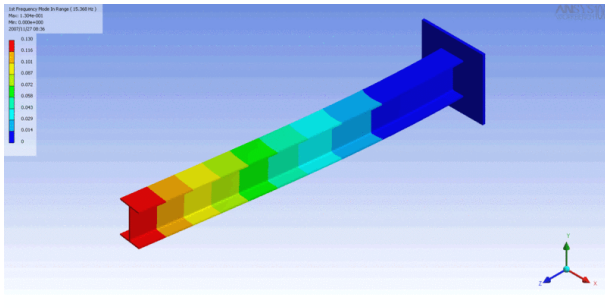
Mocninná metoda
Redukční metoda

Výpočet kompletního spektra matice

Trojúhelníková
metoda
LR algoritmus
QR algoritmus
Gramův-Schmidtův
ortonormalizační
proces
Householderovy
transformace
Givensovy rotace
QR iterace
Hessenbergovy QR
iterace

Shrnutí a otázky

Vlastní čísla matic (*eigenvalues and eigenvectors*) Modelování a analýza vibrací



Vlastní čísla matic

Částečný problém vlastních čísel

Mocninná metoda
Redukční metoda

Výpočet kompletního spektra matice

Trojúhelníková
metoda
LR algoritmus
QR algoritmus
Gramův-Schmidtův
ortonormalizační
proces
Householderovy
transformace
Givensovy rotace
QR iterace
Hessenbergovy QR
iterace

Shrnutí a otázky

Modelování a analýza vibrací – Tacoma bridge



Vlastní čísla matic - aeroelasticita

Aeroelastic Phenomena and Related Research - Part 2 –
<https://www.youtube.com/watch?v=jW8l2hX4GSs>

Vlastní čísla matic - eigenfaces

Zpracování obrazu – rozpoznání obličejů

Vlastní čísla matic

Částečný problém vlastních čísel

Mocninná metoda
Redukční metoda

Výpočet kompletního spektra matice

Trojúhelníková metoda
LR algoritmus
QR algoritmus
Gramův-Schmidtův ortonormalizační proces
Householderovy transformace
Givensovy rotace
QR iterace
Hessenbergovy QR iterace

Shrnutí a otázky



Vlastní čísla matic - spektra atomů

Vlastní čísla matic

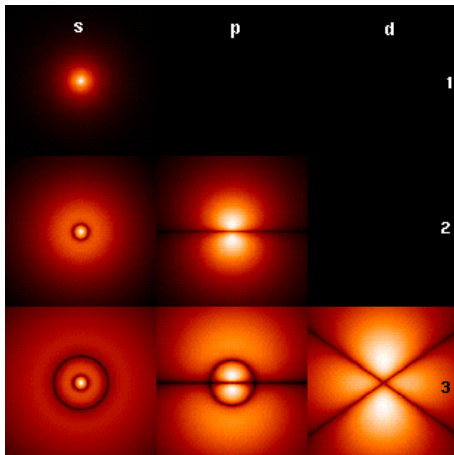
Částečný problém vlastních čísel

Mocninná metoda
Redukční metoda

Výpočet kompletního spektra matice

Trojúhelníková
metoda
LR algoritmus
QR algoritmus
Gramův-Schmidtův
ortonormalizační
proces
Householderovy
transformace
Givensovy rotace
QR iterace
Hessenbergovy QR
iterace

Shrnutí a otázky



Vlastní čísla matic

Částečný problém vlastních čísel

Mocninná metoda
Redukční metoda

Výpočet kompletního spektra matice

Trojúhelníková
metoda
LR algoritmus
QR algoritmus
Gramův-Schmidtův
ortonormalizační
proces
Householderovy
transformace
Givensovy rotace
QR iterace
Hessenbergovy QR
iterace

Shrnutí a otázky

Theorem 1

Bud' $p_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ polynom stupně n . Potom nalezení jeho kořenů je ekvivalentní výpočtu spektra Frobeniovy matice $\mathbb{C} \in \mathbb{R}^{n,n}$ svázané s polynomem $p_n(x)$ a definované jako

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} -(a_{n-1}/a_n) & -(a_{n-2}/a_n) & \dots & -(a_1/a_n) & -(a_0/a_n) \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Remark 2

Z Abelovy věty pak plyne, že nelze sestavit přímou metodu pro výpočet kompletního spektra matice pro $n \geq 5$.

Vlastní čísla matic

Částečný problém vlastních čísel

Mocninná metoda
Redukční metoda

Výpočet kompletního spektra matice

Trojúhelníková
metoda
LR algoritmus
QR algoritmus
Gramův-Schmidtův
ortonormalizační
proces
Householderovy
transformace
Givensovy rotace
QR iterace
Hessenbergovy QR
iterace

Shrnutí a otázky

Remark 3

- *Všechny metody pro výpočet spekter matic jsou proto iterativní.*
- *Je tedy nutné znát nějaký aposteriorní odhad chyby, abychom dokázali stanovit vhodné zastavující kritérium při napočítávání iterací.*
- *Apriorní odhady chyb aproximace vlastních čísel v tomto kurzu vynecháme.*

Theorem 4

Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ je hermitovská matice a necht' $\hat{\lambda}$ a $\hat{\mathbf{x}} \neq 0$ jsou napočítané aproximace vlastního čísla λ a vlastního vektoru $\vec{x}$. Pro residuum

$$\vec{r} = \mathbb{A}\hat{\mathbf{x}} - \hat{\lambda}\hat{\mathbf{x}},$$

pak platí

$$\min_{\lambda_i \in \sigma(\mathbb{A})} |\hat{\lambda} - \lambda_i| \leq \frac{\|\vec{r}\|_2}{\|\hat{\mathbf{x}}\|_2}.$$

Částečný problém vlastních čísel

Vlastní čísla
matic

Částečný
problém
vlastních čísel

Mocninná metoda

Redukční metoda

Výpočet
kompletního
spektra matice

Trojúhelníková
metoda

LR algoritmus

QR algoritmus

Gramův-Schmidtův
ortonormalizační
proces

Householderovy
transformace

Givensovy rotace

QR iterace

Hessenbergovy QR
iterace

Shrnutí a
otázky

- výpočet kompletního spektra je velmi náročná úloha
- často nám stačí nalézt třeba jen jedno, v absolutní hodnotě největší vlastní číslo
- mluvíme pak o částečném problému vlastních čísel
- pro tento účel se používá hlavně **mocninná metoda**

Vlastní čísla
matic

Částečný
problém
vlastních čísel

Mocninná metoda
Redukční metoda

Výpočet
kompletního
spektra matice

Trojúhelníková
metoda

LR algoritmus

QR algoritmus

Gramův-Schmidtův
ortonormalizační
proces

Householderovy
transformace

Givensovy rotace

QR iterace

Hessenbergovy QR
iterace

Shrnutí a
otázky

- tato metoda konstruuje posloupnost vektorů $\{\vec{x}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ a číselnou posloupnost $\{\rho_k\}_{k=1}^{\infty}$
- postupujeme podle následujícího předpisu ($\vec{x}_0$ lze volit libovolně kromě nulového vektoru)

$$\begin{aligned}\vec{y}^{(k+1)} &= A\vec{x}^{(k)}, \\ \rho_{k+1} &= \vec{e}_1^T \vec{y}^{(k+1)}, \\ \vec{x}^{(k+1)} &= \frac{1}{\rho_{k+1}} \vec{y}^{(k+1)}.\end{aligned}$$

Vlastní čísla
matic

Částečný
problém
vlastních čísel

Mocninná metoda

Redukční metoda

Výpočet
kompletního
spektra matice

Trojúhelníková
metoda

LR algoritmus

QR algoritmus

Gramův-Schmidtův
ortonormalizační
proces

Householderovy
transformace

Givensovy rotace

QR iterace

Hessenbergovy QR
iterace

Shrnutí a
otázky

Example 5

Pomocí mocninné metody nalezněte největší vlastní číslo matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}.$$

Vlastní čísla
matic

Částečný
problém
vlastních čísel

Mocninná metoda
Redukční metoda

Výpočet
kompletního
spektra matice

Trojúhelníková
metoda

LR algoritmus

QR algoritmus

Gramův-Schmidtův
ortonormalizační
proces

Householderovy
transformace

Givensovy rotace

QR iterace

Hessenbergovy QR
iterace

Shrnutí a
otázky

- mocninná metoda je implementována v programu `power-method`
 - `--input-file` – vstupní soubor s maticí
 - `--eigenvalue largest/smallest` – jaké vlastní číslo hledáme
 - `--initial-value v` – nastavení vektoru $\vec{x}^{(0)}$
 - `--max-iterations n` – maximální možný počet provedených iterací
 - `--convergence-residue r` – hodnota kritéria pro zastavení výpočtu
 - `--verbose n`
 - nastavuje úroveň vypisovaných informací v průběhu výpočtu

Vlastní čísla
matic

Částečný
problém
vlastních čísel

Mocninná metoda
Redukční metoda

Výpočet
kompletního
spektra matice

Trojúhelníková
metoda

LR algoritmus

QR algoritmus

Gramův-Schmidtův
ortonormalizační
proces

Householderovy
transformace

Givensovy rotace

QR iterace

Hessenbergovy QR
iterace

Shrnutí a
otázky

Remark 6

Metoda vlastně funguje tak, že opakovaným násobením maticí $\mathbb{A}$ se zesiluje "průmět" vektorů $\vec{x}^{(k)}$ do směru vlastního vektoru příslušejícího v absolutní hodnotě největšímu vlastnímu číslu. Pokud by ale tento "průmět" byl od začátku nulový, metoda se "nemá od čeho odrazit". Zajistit předpoklady věty není jednoduché. Naštěstí nás zachrání zaokrouhlovací chyby, které způsobí, že časem vždy vznikne nenulový "průmět" do vhodného vlastního vektoru a metoda ho následně začne zesilovat. V praxi je tak nejlepší volit za $\vec{x}^{(0)}$ vektor ze samých jedniček.

Vlastní čísla
matic

Částečný
problém
vlastních čísel

Mocninná metoda
Redukční metoda

Výpočet
kompletního
spektra matice

Trojúhelníková
metoda

LR algoritmus

QR algoritmus

Gramův-Schmidtův
ortonormalizační
proces

Householderovy
transformace

Givensovy rotace

QR iterace

Hessenbergovy QR
iterace

Shrnutí a
otázky

Theorem 7

Vektor $\vec{x}^{(k)}$ z mocninné metody lze vyjádřit takto

$$\vec{x}^{(k)} = \frac{1}{\rho_1 \rho_2 \cdots \rho_k} \mathbb{A}^k \vec{x}^{(0)}.$$

Theorem 8

Až na "normování" jde tedy o aplikaci matice $\mathbb{A}^k$ na počáteční vektor $\vec{x}^{(0)}$.

Theorem 9

Nechť matice $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ má jedno v absolutní hodnotě největší vlastní číslo λ jednonásobné nebo vícenásobné se stejnou algebraickou i geometrickou násobností a $\vec{y}^{(1)}, \dots, \vec{y}^{(r)}$ jsou příslušné vlastní vektory. Nechť matice X převádí A do Jordanova tvaru, tj.

$$A = X^{-1} J_A X$$

tak, že λ se vyskytuje na prvních r řádcích J_A . Pak pro libovolné $\vec{x}^{(0)}$ takové, že alespoň jedna z prvních r složek vektoru $X\vec{x}^{(0)}$ je nenulová, platí, že v mocninné metodě konverguje posloupnost ρ_k k vlastnímu číslu λ a posloupnost $\vec{x}^{(k)}$ k příslušnému vlastnímu vektoru.

Vlastní čísla
maticČástečný
problém
vlastních číselMocninná metoda
Redukční metodaVýpočet
kompletního
spektra maticeTrojúhelníková
metoda

LR algoritmus

QR algoritmus

Gramův-Schmidtův
ortonormalizační
procesHouseholderovy
transformace

Givensovy rotace

QR iterace

Hessenbergovy QR
iteraceShrnutí a
otázky

Theorem 10

Nechť matice $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ má dvě v absolutní hodnotě největší vlastní čísla $\lambda_1, -\lambda_1$ s opačným znaménkem. Nechť $\vec{y}^{(1)}, \vec{y}^{(2)}$ jsou příslušné vlastní vektory. Nechť matice X převádí A do Jordanova tvaru, tj.

$$A = X^{-1} J_A X$$

tak, že $\pm\lambda$ se vyskytuje na prvních dvou řádcích J_A . Pak pro libovolné $\vec{x}^{(0)}$ takové, že alespoň jedna z prvních dvou složek vektoru $X\vec{x}^{(0)}$ je nenulová, platí, že v mocninné metodě konverguje posloupnost $\sqrt{\rho_{2k}\rho_{2k+1}}$ k absolutní hodnotě největších vlastních čísel a posloupnost $A\vec{x}^{(2k)} + \lambda_1\vec{x}^{(2k)}$ k vlastnímu vektoru příslušejícímu k vlastnímu číslu λ_1 a posloupnost $A\vec{x}^{(2k)} - \lambda_1\vec{x}^{(2k)}$ k vlastnímu vektoru příslušejícímu k vlastnímu číslu $-\lambda_1$.

Vlastní čísla
matic

Částečný
problém
vlastních čísel

Mocninná metoda
Redukční metoda

Výpočet
kompletního
spektra matice

Trojúhelníková
metoda

LR algoritmus

QR algoritmus

Gramův-Schmidtův
ortonormalizační
proces

Householderovy
transformace

Givensovy rotace

QR iterace

Hessenbergovy QR
iterace

Shrnutí a
otázky

Remark 11

K napočítání samotného vlastního vektoru stačí konstruovat tzv. Krylovovu posloupnost $\vec{x}^{(0)}, \mathbb{A}\vec{x}^{(0)}, \mathbb{A}^2\vec{x}^{(0)}, \dots$ a dělení číslem ρ_k není nutné, je dobré jen pro lepší numerickou stabilitu.

Remark 12

Rychlost konvergence závisí na poměru $\frac{\lambda_i}{\lambda_1}$. Konvergenci můžeme urychlit vhodným posunem spektra o číslo λ^ úpravou původní matice na matici $\mathbb{A} - \lambda^*\mathbb{I}$. Tím můžeme zmenšit podíl $\frac{\lambda_i - \lambda^*}{\lambda_1 - \lambda^*}$. K ρ pak musíme přičíst λ^* .*

Vlastní čísla
matic

Částečný
problém
vlastních čísel

Mocninná metoda
Redukční metoda

Výpočet
kompletního
spektra matice

Trojúhelníková
metoda

LR algoritmus

QR algoritmus

Gramův-Schmidtův
ortonormalizační
proces

Householderovy
transformace

Givensovy rotace

QR iterace

Hessenbergovy QR
iterace

Shrnutí a
otázky

Remark 13

Pokud chceme najít v absolutní hodnotě nejmenší vlastní číslo matice $\mathbb{A}$, můžeme použít mocninnou metodu na matici $\mathbb{A}^{-1}$. Nejmenší vlastní číslo pak bude $\frac{1}{\rho}$. Pokud chceme najít vlastní číslo matice $\mathbb{A}$, které je nejbližší zvolenému číslu λ' budeme hledat největší vlastní číslo matice

$$(\mathbb{A} - \lambda' \mathbb{I})^{-1}.$$

Hledané číslo pak získáme jako $\frac{1}{\rho} + \lambda'$.

Vlastní čísla
matic

Částečný
problém
vlastních čísel

Mocninná metoda
Redukční metoda

Výpočet
kompletního
spektra matice

Trojúhelníková
metoda

LR algoritmus

QR algoritmus

Gramův-Schmidtův
ortonormalizační
proces

Householderovy
transformace

Givensovy rotace

QR iterace

Hessenbergovy QR
iterace

Shrnutí a
otázky

Remark 14

V případě z předchozí poznámky napočítáváme

$$\vec{y}^{(k+1)} = \mathbb{A}^{-1} \vec{x}^{(k)}.$$

Abychom se vyhnuli výpočtu inverze matice $\mathbb{A}$, převedeme vztah na

$$\mathbb{A} \vec{y}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)},$$

a řešíme soustavu lineárních rovnic. S výhodou lze využít iterativní metody neboť:

- pro k malé je zbytečné řešit lineární soustavu s vysokou přesností a stačí proto počítat menší počet iterací*
- pro k velké se po sobě jdoucí vektory $\vec{y}^{(k)}$ a $\vec{y}^{(k+1)}$ příliš neliší a $\vec{y}^{(k)}$ je dobrým odhadem řešení pro soustavu s neznámým vektorem $\vec{y}^{(k+1)}$*

Tento trik, jak se zbavit výpočtu inverze matice, jež pouze aplikujeme na jeden nebo několik vektorů, se v numerice používá velmi často.

Vlastní čísla
matic

Částečný
problém
vlastních čísel

Mocninná metoda
Redukční metoda

Výpočet
kompletního
spektra matice

Trojúhelníková
metoda

LR algoritmus

QR algoritmus

Gramův-Schmidtův
ortonormalizační
proces

Householderovy
transformace

Givensovy rotace

QR iterace

Hessenbergovy QR
iterace

Shrnutí a
otázky

- tato metoda slouží k odseparování již nalezených vlastních čísel, pokud chceme např. napočítat více než jedno v absolutní hodnotě největší vlastní číslo
- nehodí se ale pro výpočet kompletního spektra, kvůli rychlé ztrátě přesnosti

Remark 15

Bud' tedy $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ a $\lambda_1 \in \sigma(A)$ a $\vec{x}$ k němu příslušný vlastní vektor. Odvodíme metodu pro výpočet matice $B \in \mathbb{C}^{n-1,n-1}$, která má všechna vlastní čísla stejná jako A až na λ_1 , u kterého se sníží násobnost.

Vlastní čísla
matic

Částečný
problém
vlastních čísel

Mocninná metoda
Redukční metoda

Výpočet
kompletního
spektra matice

Trojúhelníková
metoda

LR algoritmus

QR algoritmus

Gramův-Schmidtův
ortonormalizační
proces

Householderovy
transformace

Givensovy rotace

QR iterace

Hessenbergovy QR
iterace

Shrnutí a
otázky

- matici $\mathbb{A}$ převedeme do báze, tvořené vektory $\vec{x}, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$
- v této bázi bude matice vypadat takto

$$\mathbb{P}^{-1} \mathbb{A} \mathbb{P} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \vec{q}^t \\ \vec{\theta} & \mathbb{B} \end{pmatrix},$$

kde $\mathbb{P}$ je matice přechodu mezi bázemi.

Tvar matice $\mathbb{P}$ je zřejmý, její sloupce tvoří bazické vektory

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} x_1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Inverzní matici k matici $\mathbb{P}$ je taková, která první řádek podělí x_1 a vynuluje všechny prvky pod diagonálou v prvním sloupci. Takovou matici ale snadno najdeme, známe ji z GEM.

$$\mathbb{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1} & & & \\ -\frac{x_2}{x_1} & 1 & & \\ & & \ddots & \\ -\frac{x_n}{x_1} & & & 1 \end{pmatrix}$$

Roznásobením snadno získáme tvar matice $\mathbb{B}$

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} a_{22} - \frac{x_2}{x_1} a_{12} & a_{23} - \frac{x_2}{x_1} a_{13} & \dots & a_{2n} - \frac{x_2}{x_1} a_{1n} \\ a_{32} - \frac{x_3}{x_1} a_{12} & a_{33} - \frac{x_3}{x_1} a_{13} & \dots & a_{3n} - \frac{x_3}{x_1} a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} - \frac{x_n}{x_1} a_{12} & a_{n3} - \frac{x_n}{x_1} a_{13} & \dots & a_{nn} - \frac{x_n}{x_1} a_{1n} \end{pmatrix}.$$

Její tvar lze také snadno odvodit, pokud si uvědomíme, že pravý dolní čtverec matice $\mathbb{A}\mathbb{P}$ o rozměrech $(n-1) \times (n-1)$ odpovídá přesně prvkům matice $\mathbb{A}$. Při násobení maticí $\mathbb{P}^{-1}$ zleva pak v tomto čtverci od každého řádku i odečítáme $\frac{x_i}{x_1}$ násobek prvního řádku matice $\mathbb{A}$. To je právě význam matice $\mathbb{P}^{-1}$.

Vlastní čísla
matic

Částečný
problém
vlastních čísel

Mocninná metoda
Redukční metoda

Výpočet
kompletního
spektra matice

Trojúhelníková
metoda

LR algoritmus

QR algoritmus

Gramův-Schmidtův
ortonormalizační
proces

Householderovy
transformace

Givensovy rotace

QR iterace

Hessenbergovy QR
iterace

Shrnutí a
otázky

Podobně lze odvodit, že

$$\vec{q}^T = \frac{1}{x_1} (a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n})$$

Nyní známe matici $\mathbb{B}$ a můžeme najít některé její vlastní číslo λ_2 . Buď $\vec{z} = (z_2, \dots, z_n)^T$ k němu příslušný vlastní vektor. Jak najít odpovídající vlastní vektor matice $\mathbb{A}$?

Logicky jako lineární kombinaci bazických vektorů daných sloupci matice $\mathbb{P}$. K tomu ale musíme dopočítat složku z_1 .
Musí platit

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \vec{q}^T \\ \vec{\theta} & \mathbb{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ \vec{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 z_1 + \vec{q}^T \vec{z} \\ \mathbb{B} \vec{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 z_1 + \vec{q}^T \vec{z} \\ \lambda_2 \vec{z} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \lambda_2 z_1 \\ \lambda_2 \vec{z} \end{pmatrix}$$

a tedy

$$\lambda_1 z_1 + \vec{q}^T \vec{z} = \lambda_2 z_1 \Rightarrow z_1 = \frac{\vec{q}^T \vec{z}}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Redukční metoda

Pokud by bylo $\lambda_1 = \lambda_2$, pak musí být $\vec{q}^T \vec{z} = 0$ a z_1 lze volit libovolně.

Vlastní vektor matice $\mathbb{A}$ je pak dán jako

$$\vec{y} = \mathbb{P} \begin{pmatrix} z_1, \\ \vec{z} \end{pmatrix} = z_1 \vec{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{z} \end{pmatrix}.$$

Trojúhelníková metoda

Bud' $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, řešíme úlohu nalezení všech vlastních čísel a vlastních vektorů této matice.

Trojúhelníková metoda

- konstruujeme dvě posloupnosti
 - $\{\mathbb{L}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{n,n}$ dolní trojúhelníkové s jedničkami na diagonále
 - $\{\mathbb{R}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{n,n}$ horní trojúhelníkové
- $\mathbb{L}^{(0)}$ volíme libovolně (např. $\mathbb{I}$)
- $\mathbb{L}^{(1)}$ a $\mathbb{R}^{(1)}$ získáme rozkladem matice $A\mathbb{L}^{(0)}$ tj. platí

$$\mathbb{L}^{(1)}\mathbb{R}^{(1)} = A\mathbb{L}^{(0)}$$

- $\mathbb{L}^{(1)}$ je dolní trojúhelníková s jedničkami na diagonále
 - $\mathbb{R}^{(1)}$ je horní trojúhelníková
- obecně počítáme iterace tvaru

$$\mathbb{L}^{(k+1)}\mathbb{R}^{(k+1)} = A\mathbb{L}^{(k)}$$

- $\mathbb{L}^{(k+1)}$ je dolní trojúhelníková s jedničkami na diagonále
 - $\mathbb{R}^{(k+1)}$ je horní trojúhelníková

Vlastní čísla
matic

Částečný
problém
vlastních čísel

Mocninná metoda
Redukční metoda

Výpočet
kompletního
spektra matice

Trojúhelníková
metoda

LR algoritmus

QR algoritmus

Gramův-Schmidtův
ortonormalizační
proces

Householderovy
transformace

Givensovy rotace

QR iterace

Hessenbergovy QR
iterace

Shrnutí a
otázky

Remark 16

Pokud ukážeme, že $\mathbb{L}^{(k)} \rightarrow \mathbb{L}$ a $\mathbb{R}^{(k)} \rightarrow \mathbb{R}$, pak platí

$$\mathbb{A}\mathbb{L} = \mathbb{L}\mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{R}\mathbb{L}^{-1}$$

a jde tedy o podobnostní transformaci a vlastní čísla matice $\mathbb{A}$ najdeme na diagonále matice $\mathbb{R}$.

Remark 17

Jak vypočítat vlastní vektory? Řešíme nejprve rovnici

$$(\mathbb{R} - \lambda \mathbb{I}) \vec{y}^i = 0.$$

Z tvaru matice $\mathbb{R} - \lambda \mathbb{I}$ (dolní trojúhelníková s 0 na diagonále na i -tém řádku) snadno vidíme, že

$$\vec{y}_j^i = \begin{cases} 0 & j < i \\ 1 & j = i \\ \frac{-1}{r_{jj}-\lambda} \sum_{k=i}^{j-1} y_k^i r_{jk} & j > i \end{cases}$$

neboť pro $j > i$ musí platit

$$\sum_{k=i}^{j-1} y_k^i r_{jk} + y_j^i (r_{jj} - \lambda) = 0.$$

Jelikož matice $\mathbb{R}$ je matice $\mathbb{A}$ vyjádřená v bázi dané sloupci matice $\mathbb{L}$, platí, že vlastní vektory matice $\mathbb{A}$ jsou

$$\vec{x}^i = \mathbb{L} \vec{y}^i.$$

Vlastní čísla
matic

Částečný
problém
vlastních čísel

Mocnná metoda
Redukční metoda

Výpočet
kompletního
spektra matice

Trojúhelníková
metoda

LR algoritmus

QR algoritmus

Gramův-Schmidtův
ortonormalizační
proces

Householderovy
transformace

Givensovy rotace

QR iterace

Hessenbergovy QR
iterace

Shrnutí a
otázky

Vlastní čísla
matic

Částečný
problém
vlastních čísel

Mocninná metoda
Redukční metoda

Výpočet
kompletního
spektra matice

Trojúhelníková
metoda

LR algoritmus

QR algoritmus

Gramův-Schmidtův
ortonormalizační
proces

Householderovy
transformace

Givensovy rotace

QR iterace

Hessenbergovy QR
iterace

Shrnutí a
otázky

- $\mathbb{L}^{(0)}$ lze volit libovolně, nemusí být ani dolní trojúhelníková
 - díky tomu má metoda samoopravující schopnost
 - pokud bychom někdy napočítali $\mathbb{L}^{(k)}$ špatně, lze ho brát jako nové $\mathbb{L}^{(0)}$

Remark 18

Obě metody jsou postaveny na počítání LU rozkladu. Ten ale existuje jen pro silně regulární matice. V první iteraci musíme předpokládat, že toto je splněno. Připomeňme si navíc vzorce pro výpočet LU rozkladu:

$$l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} \text{ pro } j \leq i$$

$$u_{ij} = (a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}) / l_{ii} \text{ pro } i < j$$

Z nich vidíme, že prvky matic $\mathbb{L}$ a $\mathbb{U}$ závisí spojitě na prvcích matice $\mathbb{A}$. Pokud tedy matici $\mathbb{A}$ změníme jen málo, bude LU rozklad opět existovat.

Existence LU rozkladu

Theorem 19

Necht' matice A je silně regulární tj. existuje její LU rozklad. Bud' matice E taková, že $\|E\|$ je dostatečně malé. Pak existuje i LU rozklad matice $A + E$.

Theorem 20

Necht' $A = L + E$, kde $\|E\|$ je malé. Potom existuje rozklad $A = LR$, kde L je dolní trojúhelníková s jedničkami na diagonále a R je horní trojúhelníková. Platí-li, že pokud $\|E\| \rightarrow 0$, pak $L \rightarrow I$ a $R \rightarrow I$.

Konvergence trojúhelníkové metody

Vlastní čísla
matic

Částečný
problém
vlastních čísel

Mocnná metoda
Redukční metoda

Výpočet
kompletního
spektra matice

Trojúhelníková
metoda

LR algoritmus

QR algoritmus

Gramův-Schmidtův
ortonormalizační
proces

Householderovy
transformace

Givensovy rotace

QR iterace

Hessenbergovy QR
iterace

Shrnutí a
otázky

Theorem 21

Pokud existuje trojúhelníkový rozklad matice
 $\mathbb{A}^k \mathbb{L}^{(0)} = \mathcal{L}^{(k)} \mathcal{R}^{(k)}$, *pak platí*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{(k)} &= \mathbb{L}^{(k)}, \\ \mathcal{R}^{(k)} &= \mathbb{R}^{(k)} \mathbb{R}^{(k-1)} \dots \mathbb{R}^{(1)}.\end{aligned}$$

Remark 22

*V důkazu konvergence budeme zkoumat matici $\mathbb{A}^k \mathbb{L}^{(0)}$.
Odvodíme, kdy existuje její LU rozklad $\mathbb{A}^k \mathbb{L}^{(0)} = \mathcal{L}^{(k)} \mathcal{R}^{(k)}$.
Jelikož platí, že $\mathbb{L}^{(k)} = \mathcal{L}^{(k)}$, dokážeme-li, že $\mathcal{L}^{(k)} \rightarrow \mathbb{L}$,
bude platit i $\mathbb{L}^{(k)} \rightarrow \mathbb{L}$. Pak již lze i dokázat, že $\mathcal{R}^{(k)} \rightarrow \mathbb{R}$,
čímž máme vyšetřenou konvergenci trojúhelníkové metody.*

Konvergence trojúhelníkové metody

Vlastní čísla
matic

Částečný
problém
vlastních čísel

Mocninná metoda
Redukční metoda

Výpočet
kompletního
spektra matice

Trojúhelníková
metoda

LR algoritmus

QR algoritmus

Gramův-Schmidtův
ortonormalizační
proces

Householderovy
transformace

Givensovy rotace

QR iterace

Hessenbergovy QR
iterace

Shrnutí a
otázky

Theorem 23

Nechť matice $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ je regulární a má všechna vlastní čísla jednonásobná a různá v absolutní hodnotě tj. existuje regulární matice X , že $A = XD^{-1}X^{-1}$, kde

$D = \text{diag} \{ \lambda_1, \dots, \lambda_n \}$ pro $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|$. Dále předpokládejme, že pro dostatečně velké k existují LU rozklady matic $A L^{(k)}$ a necht' dále existují LU rozklady matic X a $X^{-1} L^{(0)}$. Pak posloupnosti matic $L^{(k)}$ a $R^{(k)}$ z trojúhelníkové metody konvergují a na diagonále matice R je spektrum matice A seřazené sestupně podle velikosti v absolutní hodnotě.

Remark 24

Pro konvergenci za jiných podmínek lze nahlédnout do skript.

LR algoritmus

- konstruuje tři posloupnosti
 - $\{A^{(k)}\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{n,n}$
 - $\{\hat{L}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{n,n}$ dolní trojúhelníkové s jedničkami na diagonále
 - $\{\hat{R}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{n,n}$ horní trojúhelníkové
- na počátku volíme

$$\begin{aligned}A^{(1)} &= A, \\ \hat{L}^{(1)}\hat{R}^{(1)} &= A^{(1)}, \\ A^{(2)} &= \hat{R}^{(1)}\hat{L}^{(1)}\end{aligned}$$

- obecně mají jednotlivé iterace tvar

$$\begin{aligned}\hat{L}^{(k)}\hat{R}^{(k)} &= A^{(k)}, \\ A^{(k+1)} &= \hat{R}^{(k)}\hat{L}^{(k)}.\end{aligned}$$

Vlastní čísla
matic

Částečný
problém
vlastních čísel

Mocninná metoda
Redukční metoda

Výpočet
kompletního
spektra matice

Trojúhelníková
metoda

LR algoritmus

QR algoritmus

Gramův-Schmidtův
ortonormalizační
proces

Householderovy
transformace

Givensovy rotace

QR iterace

Hessenbergovy QR
iterace

Shrnutí a
otázky

Vlastní čísla
matic

Částečný
problém
vlastních čísel

Mocninná metoda
Redukční metoda

Výpočet
kompletního
spektra matice

Trojúhelníková
metoda

LR algoritmus
QR algoritmus

Gramův-Schmidtův
ortonormalizační
proces

Householderovy
transformace

Givensovy rotace

QR iterace

Hessenbergovy QR
iterace

Shrnutí a
otázky

Remark 25

Z úvahy

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^{(k+1)} &= \hat{\mathbb{R}}^{(k)} \hat{\mathbb{L}}^{(k)} \\ &= \left(\left(\hat{\mathbb{L}}^{(k)} \right)^{-1} \hat{\mathbb{L}}^{(k)} \right) \hat{\mathbb{R}}^{(k)} \hat{\mathbb{L}}^{(k)} \\ &= \left(\hat{\mathbb{L}}^{(k)} \right)^{-1} \mathbb{A}^{(k)} \hat{\mathbb{L}}^{(k)}. \end{aligned}$$

plyne, že pokud posloupnost $\{\mathbb{A}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje k horní trojúhelníkové matici, budou na její diagonále vlastní čísla matice $\mathbb{A}$.

Vlastní čísla
matic

Částečný
problém
vlastních čísel

Mocninná metoda
Redukční metoda

Výpočet
kompletního
spektra matice

Trojúhelníková
metoda

LR algoritmus

QR algoritmus

Gramův-Schmidtův
ortonormalizační
proces

Householderovy
transformace

Givensovy rotace

QR iterace

Hessenbergovy QR
iterace

Shrnutí a
otázky

- má menší nároky na paměť než trojúhelníková metoda
 - trojúhelníková metoda potřebuje pracovní pole pro napočítání LU rozkladu, pro výsledek součinu $\mathbb{A}\mathbb{L}^{(k)}$ a pro matici $\mathbb{A}$
 - LR algoritmus potřebuje pracovní pole pro LU rozklad a napočítání součinu $\hat{\mathbb{R}}^{(k)}\hat{\mathbb{L}}^{(k)}$
 - LR algoritmus nemá tak dobrou samoopravující schopnost, takže vlivem numerických chyb můžeme získat špatné spektrum
 - nepamatuje si matici $\mathbb{A}$
 - nekonzverguje pro libovolnou počáteční matici, tou je zde matice $\mathbb{A}$ na rozdíl od trojúhelníkové metody, kde ji byla libovolná matice $\mathbb{L}^{(0)}$

Vlastní čísla
matic

Částečný
problém
vlastních čísel

Mocninná metoda
Redukční metoda

Výpočet
kompletního
spektra matice

Trojúhelníková
metoda

LR algoritmus

QR algoritmus

Gramův-Schmidtův
ortonormalizační
proces

Householderovy
transformace

Givensovy rotace

QR iterace

Hessenbergovy QR
iterace

Shrnutí a
otázky

Theorem 26

Existuje-li trojúhelníkový rozklad matice $\mathbb{A}^k = \mathcal{L}^{(k)}\mathcal{R}^{(k)}$, pak platí

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{(k)} &= \hat{\mathbb{L}}^{(1)}\hat{\mathbb{L}}^{(2)}\dots\hat{\mathbb{L}}^{(k)} \\ \mathcal{R}^{(k)} &= \hat{\mathbb{R}}^{(k)}\hat{\mathbb{R}}^{(k-1)}\dots\hat{\mathbb{R}}^{(1)}.\end{aligned}$$

Konvergence LR algoritmu

Vlastní čísla
matic

Částečný
problém
vlastních čísel

Mocnná metoda
Redukční metoda

Výpočet
kompletního
spektra matice

Trojúhelníková
metoda

LR algoritmus
QR algoritmus

Gramův-Schmidtův
ortonormalizační
proces

Householderovy
transformace

Givensovy rotace

QR iterace

Hessenbergovy QR
iterace

Shrnutí a
otázky

Remark 27

Pokud v trojúhelníkové metodě volíme $\mathbb{L}^{(0)} = \mathbb{I}$, pak je $\mathbb{A}^k \mathbb{L}^{(0)} = \mathbb{A}^k$ a musí platit

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{(k)} = \mathbb{L}^{(k)} &= \hat{\mathbb{L}}^{(1)} \hat{\mathbb{L}}^{(2)} \dots \hat{\mathbb{L}}^{(k)}, \\ \mathcal{R}^{(k)} = \mathbb{R}^{(k)} \mathbb{R}^{(k-1)} \dots \mathbb{R}^{(1)} &= \hat{\mathbb{R}}^{(k)} \hat{\mathbb{R}}^{(k-1)} \dots \hat{\mathbb{R}}^{(1)},\end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned}\mathbb{L}^{(k)} &= \hat{\mathbb{L}}^{(1)} \hat{\mathbb{L}}^{(2)} \dots \hat{\mathbb{L}}^{(k)}, \\ \mathbb{R}^{(k)} &= \hat{\mathbb{R}}^{(k)}.\end{aligned}$$

Remark 28

Z konvergence trojúhelníkové metody $\mathbb{L}^{(k)} \rightarrow \mathbb{L}$ a $\mathbb{R}^{(k)} \rightarrow \mathbb{R}$, plyne

$$\mathbb{A}^{(k)} = \hat{\mathbb{L}}^{(k)} \hat{\mathbb{R}}^{(k)} = \left(\mathbb{L}^{(k-1)} \right)^{-1} \mathbb{L}^{(k)} \mathbb{R}^{(k)} \rightarrow \mathbb{L}^{-1} \mathbb{L} \mathbb{R} = \mathbb{R},$$

tj. matice $\mathbb{A}^{(k)}$ z LR algoritmu skutečně konverguje k horní trojúhelníkové matici. Na diagonále má vlastní čísla matice $\mathbb{A}$ seřazené sestupně podle velikosti v absolutní hodnotě (to už jsme ukázali).

Konvergence LR algoritmu

Vlastní čísla
matic

Částečný
problém
vlastních čísel

Mocninná metoda
Redukční metoda

Výpočet
kompletního
spektra matice

Trojúhelníková
metoda

LR algoritmus

QR algoritmus

Gramův-Schmidtův
ortonormalizační
proces

Householderovy
transformace

Givensovy rotace

QR iterace

Hessenbergovy QR
iterace

Shrnutí a
otázky

Nyní již můžeme vše shrnout ve formě následující věty:

Theorem 29

Nechť matice $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ je regulární a diagonalizovatelná a předpokládejme, že trojúhelníková metoda konverguje s volbou $L^{(0)} = I$. Pak LR algoritmus konverguje také, a platí, že posloupnost $A^{(k)}$ konverguje k horní trojúhelníkové matici s hlavními čísly matice A na diagonále seřazenými sestupně podle velikosti v absolutní hodnotě.

Vlastní čísla
matic

Částečný
problém
vlastních čísel

Mocninná metoda
Redukční metoda

Výpočet
kompletního
spektra matice

Trojúhelníková
metoda

LR algoritmus

QR algoritmus

Gramův-Schmidtův
ortonormalizační
proces

Householderovy
transformace

Givensovy rotace

QR iterace

Hessenbergovy QR
iterace

Shrnutí a
otázky

Remark 30

Velkou nevýhodou LR algoritmu je jeho špatná numerická stabilita zejména při aplikování na velké matice. Proto byl v roce 1961 J.G.F. Francisem navržený QR algoritmus.

Funguje stejně jako LR algoritmus, ale místo LU rozklad napočítává QR rozklad, tj. rozklad na unitární a horní trojúhelníkovou matici.

Omezíme se nyní pouze na reálné matice.

QR algoritmus

Theorem 31

Bud' $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ regulární matice. Pak existuje rozklad $A = QR$, kde matice Q je unitární a R je horní trojúhelníková. Pokud budeme předpokládat, že diagonální prvky matice R jsou kladné, pak je tento rozklad jednoznačný.

Vlastní čísla
matic

Částečný
problém
vlastních čísel

Mocninná metoda
Redukční metoda

Výpočet
kompletního
spektra matice

Trojúhelníková
metoda

LR algoritmus

QR algoritmus

Gramův-Schmidtův
ortonormalizační
proces

Householderovy
transformace

Givensovy rotace

QR iterace

Hessenbergovy QR
iterace

Shrnutí a
otázky

Existují tři způsoby, jak napočítat QR rozklad:

- Gramův-Schmidtův ortonormalizační proces
- Householderovy transformace
- Givensovy rotace

Gramův-Schmidtův ortonormalizační proces

- jde o algoritmus, který převede lineárně nezávislé vektory $\vec{x}^{(1)}, \dots, \vec{x}^{(n)}$ na množinu vektorů $\vec{q}^{(1)}, \dots, \vec{q}^{(n)}$, které jsou vzájemně ortonormální a tvoří bázi stejného prostoru jako původní vektory

Gramův-Schmidtův ortonormalizační proces

```
1: procedure GRAMMSCHMIDTKLASICKÝ( $\vec{x}^{(1)}, \dots, \vec{x}^{(n)}$ )
2:    $\vec{r}^{(1)} := \vec{r}^{(2)} := \dots := \vec{r}^{(n)} := \vec{0}$ 
3:    $r_1^{(1)} := \|\vec{x}^{(1)}\|_2$ 
4:    $\vec{q}^{(1)} := \frac{1}{r_1^{(1)}} \vec{x}^{(1)}$ 
5:   for  $k = 2, \dots, n$  do
6:      $\tilde{\vec{q}}^{(k)} := \vec{x}^{(k)}$ 
7:     for  $i = 1, \dots, k - 1$  do
8:        $r_i^{(k)} := (\vec{q}^{(i)}, \vec{x}^{(k)})$ 
9:        $\tilde{\vec{q}}^{(k)} := \tilde{\vec{q}}^{(k)} - r_i^{(k)} \vec{q}^{(i)}$ 
10:    end for
11:     $r_k^{(k)} := \|\tilde{\vec{q}}^{(k)}\|_2$ 
12:     $\vec{q}^{(k)} := \frac{1}{r_k^{(k)}} \tilde{\vec{q}}^{(k)}$ 
13:  end for
14:  return  $[\vec{q}^{(1)}, \dots, \vec{q}^{(n)}], [\vec{r}^{(1)}, \dots, \vec{r}^{(n)}]$ 
15: end procedure
```

Vlastní čísla
matic

Částečný
problém
vlastních čísel

Mocninná metoda
Redukční metoda

Výpočet
kompletního
spektra matice

Trojúhelníková
metoda

LR algoritmus

QR algoritmus

Gramův-Schmidtův
ortonormalizační
proces

Householderovy
transformace

Givensovy rotace

QR iterace

Hessenbergovy QR
iterace

Shrnutí a
otázky

Gramův-Schmidtův ortonormalizační proces

- pro lepší numerickou stabilitu se používá modifikovaný G.-S. ort. proces

1: **procedure**

GRAMMSCHMIDTMODIFIKOVANÝ($\vec{x}^{(1)}, \dots, \vec{x}^{(n)}$)

```
2:    $\vec{r}^{(1)} := \vec{r}^{(2)} := \dots := \vec{r}^{(n)} := \vec{0}$ 
3:    $r_1^{(1)} := \|\vec{x}^{(1)}\|_2$ 
4:    $\tilde{q}^{(1)} := \frac{1}{r_1^{(1)}} \vec{x}^{(1)}$ 
5:   for  $k = 2, \dots, n$  do
6:      $\tilde{q}^{(k)} := \vec{x}^{(k)}$ 
7:     for  $i = 1, \dots, k - 1$  do
8:        $r_i^{(k)} := \left( \tilde{q}^{(i)}, \tilde{q}^{(k)} \right)$ 
9:        $\tilde{q}^{(k)} := \tilde{q}^{(k)} - r_i^{(k)} \tilde{q}^{(i)}$ 
10:    end for
11:     $r_k^{(k)} := \|\tilde{q}^{(k)}\|_2$ 
12:     $\vec{q}^{(k)} := \frac{1}{r_k^{(k)}} \tilde{q}^{(k)}$ 
13:  end for
14:  return  $[\vec{q}^{(1)}, \dots, \vec{q}^{(n)}], [\vec{r}^{(1)}, \dots, \vec{r}^{(n)}]$ 
15: end procedure
```

Gramův-Schmidtův ortonormalizační proces

- for cykly v proměnných k a j tvoří řádově n^2 iterací, do nich vnořené řádky 8 a 9 mají složitost $O(n)$, celkem je tedy složitost $O(n^3)$

Gramův-Schmidtův ortonormalizační proces

Theorem 32

Bud' $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ regulární matice. Položme v Gramově-Schmidtově ortonormalizačním procesu vektory $\vec{x}^{(1)}, \dots, \vec{x}^{(n)}$ rovny jednotlivým sloupcům matice A , tj. $\vec{x}^{(1)} = a_{.1}, \dots, \vec{x}^{(n)} = a_{.n}$. Pak lze psát

$$(a_{.1}, \dots, a_{.n}) = (\vec{q}^{(1)}, \dots, \vec{q}^{(n)}) \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & r_{nn} \end{pmatrix},$$

tj. $A = QR$, kde Q je unitární a R je horní trojúhelníková matice (s kladnými prvky na diagonále).

Vlastní čísla
matic

Částečný
problém
vlastních čísel

Mocninná metoda
Redukční metoda

Výpočet
kompletního
spektra matice

Trojúhelníková
metoda

LR algoritmus

QR algoritmus

Gramův-Schmidtův
ortonormalizační
proces

Householderovy
transformace

Givensovy rotace

QR iterace

Hessenbergovy QR
iterace

Shrnutí a
otázky

Připomeneme si:

Definition 33

Householderovou reflektční maticí (elementární unitární maticí) nazveme každou matici $\mathbb{H}_{\vec{w}}$ tvaru

$$\mathbb{H}_{\vec{w}} = \mathbb{I} - 2\vec{w}\vec{w}^*,$$

kde $\vec{w}$ je **Householderův vektor**, pro který platí

$$\|\vec{w}\|_2 = \sqrt{(\vec{w}, \vec{w})} = 1.$$

Theorem 34

Nechť $\mathbb{H}_{\vec{w}}$ je Householderova reflektivní matice a $\vec{v} \in \mathbb{C}^n$ je libovolný vektor. Pak vektor $\mathbb{H}_{\vec{w}}\vec{v}$ je zrcadlový obraz vektoru $\vec{v}$ podle nadroviny

$$L \equiv \left\{ \vec{x} \in \mathbb{C}^n \mid \vec{w}^H \vec{x} = (\vec{w}, \vec{x}) = 0 \right\}$$

v tom smyslu, že splňuje následující podmínky:

- $\|\mathbb{H}_{\vec{w}}\vec{v}\| = \|\vec{v}\|$
- $\mathbb{H}_{\vec{w}}\vec{v} + \vec{v} \in L$
- $(\mathbb{H}_{\vec{w}}\vec{v} - \vec{v}) \perp L$.

Vlastní čísla
matic

Částečný
problém
vlastních čísel

Mocninná metoda
Redukční metoda

Výpočet
kompletního
spektra matice

Trojúhelníková
metoda

LR algoritmus

QR algoritmus

Gramův-Schmidtův
ortonormalizační
proces

Householderovy
transformace

Givensovy rotace

QR iterace

Hessenbergovy QR
iterace

Shrnutí a
otázky

Remark 35

Chceme-li pomocí Householderovy transformace transformovat vektor $\vec{x}$ na vektor $\vec{y}$, kde $\|\vec{x}\|_2 = \|\vec{y}\|_2$, pak volíme

$$\vec{w} = \frac{\vec{x} - \vec{y}}{\|\vec{x} - \vec{y}\|_2}$$

Pokud zvolíme $\vec{y} = \pm \|\vec{x}\|_2 \vec{e}^{(1)}$, pak získáme unitární transformaci, která nuluje všechny složky vektoru $\vec{x}$ kromě první.

Householderovy transformace

Vlastní čísla
matic

Částečný
problém
vlastních čísel

Mocninná metoda
Redukční metoda

Výpočet
kompletního
spektra matice

Trojúhelníková
metoda

LR algoritmus
QR algoritmus

Gramův-Schmidtův
ortonormalizační
proces

Householderovy
transformace

Givensovy rotace

QR iterace

Hessenbergovy QR
iterace

Shrnutí a
otázky

Remark 36

Pokud by byla první složka vektoru $\vec{x}$ silně převládající tj.

$$|x_1| \approx \|\vec{x}\|_2,$$

pak bychom při špatné volbě znaménka vektoru $\vec{y}$ mohli dostat $\vec{x} - \vec{y}$ velmi malé a dělit téměř nulou. Proto volíme

$$\vec{y} = -\text{sign}x_1 \|\vec{x}\|_2 \vec{e}^{(1)}$$

tj.

$$\vec{w} = \frac{\vec{x} + \text{sign}x_1 \|\vec{x}\|_2 \vec{e}_1}{\|\vec{x} + \text{sign}x_1 \|\vec{x}\|_2 \vec{e}_1\|_2}.$$

Householderovy transformace

- obecně, pokud pro $k \geq 1$ chceme zachovat prvních $k - 1$ složek vektoru $\vec{x}$ a nulovat složky $k + 1, \dots, n$, použijeme matici

$$\mathbb{Q}^{(k)} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}^{(k)} & \theta \\ \theta & \tilde{\mathbb{Q}}^{(k)} \end{pmatrix},$$

kde $\tilde{\mathbb{Q}}^{(k)} \in \mathbb{R}^{n-k+1, n-k+1}$, $\mathbb{I}^{(k)} \in \mathbb{R}^{k-1, k-1}$ a

$$\tilde{\mathbb{Q}}^{(k)} = \mathbb{I} - 2\vec{w}^{(k)} \left(\vec{w}^{(k)} \right)^T,$$

$$\vec{w}^{(k)} = \frac{\vec{x}^{(k)} + \text{sign}x_1^{(k)} \|\vec{x}^{(k)}\|_2 \vec{e}^{(k)}}{\left\| \vec{x}^{(k)} + \text{sign}x_1^{(k)} \|\vec{x}^{(k)}\|_2 \vec{e}^{(k)} \right\|_2},$$

kde $\vec{x}^{(k)} \in \mathbb{R}^{n-k+1}$ je vektor tvořený posledními $n - k + 1$ složkami vektoru $\vec{x}$ a vektor $\vec{e}^{(k)}$ je první vektor standardní báze prostoru $\mathbb{R}^{n-k+1, n-k+1}$.

Vlastní čísla
matic

Částečný
problém
vlastních čísel

Mocninná metoda
Redukční metoda

Výpočet
kompletního
spektra matice

Trojúhelníková
metoda

LR algoritmus

QR algoritmus

Gramův-Schmidtův
ortonormalizační
proces

Householderovy
transformace

Givensovy rotace

QR iterace

Hessenbergovy QR
iterace

Shrnutí a
otázky

Householderovy transformace

Vlastní čísla
matic

Částečný
problém
vlastních čísel

Mocninná metoda
Redukční metoda

Výpočet
kompletního
spektra matice

Trojúhelníková
metoda

LR algoritmus

QR algoritmus

Gramův-Schmidtův
ortonormalizační
proces

**Householderovy
transformace**

Givensovy rotace

QR iterace

Hessenbergovy QR
iterace

Shrnutí a
otázky

- pro vektor $\vec{y} = \mathbb{Q}^{(k)} \vec{x}$ pak platí,

$$y_j = \begin{cases} x_j & \text{pro } j = 1, \dots, k-1 \\ \text{sign} x_1^{(k)} \|\vec{x}^{(k)}\|_2 & \text{pro } j = k \\ 0 & \text{pro } j = k+1, \dots, n \end{cases}$$

- vhodnou aplikací Householderových transformací na sloupce matice $\mathbb{A}$ tak lze eliminovat nenulové prvky pod diagonálou
- jelikož se vše děje pomocí unitárních transformací, získáme unitární převod na matici v horním trojúhelníkovém tvaru, tj. QR rozklad
- konkrétně si to ukážeme na následujícím příkladu

Householderovy transformace - příklad

Mějme matici $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Výpočet QR rozkladu probíhá takto:

- volíme $\vec{x}^{(1)} := A$, tj. první sloupec matice A
- dále volíme

$$\vec{w}^{(1)} := \frac{\vec{x}^{(1)} + \text{sign}x_1^{(1)} \|\vec{x}^{(1)}\|_2 \vec{e}^{(1)}}{\left\| \vec{x}^{(1)} + \text{sign}x_1^{(1)} \|\vec{x}^{(1)}\|_2 \vec{e}^{(1)} \right\|_2},$$

kde $\vec{e}^{(1)}$ je první bazický vektor standardní báze prostoru $\mathbb{R}^n$

- napočítáme

$$\overline{Q}^{(1)} := I - 2\vec{w}^{(1)} \left(\vec{w}^{(1)} \right)^T$$

Vlastní čísla
matic

Částečný
problém
vlastních čísel

Mocninná metoda
Redukční metoda

Výpočet
kompletního
spektra matice

Trojúhelníková
metoda

LR algoritmus

QR algoritmus

Gramův-Schmidtův
ortonormalizační
proces

Householderovy
transformace

Givensovy rotace

QR iterace

Hessenbergovy QR
iterace

Shrnutí a
otázky

Householderovy transformace - příklad

- potom je

$$\overline{Q}^{(1)} A = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \dots & a_{3n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{pmatrix},$$

kde $r_{11} = \|\vec{x}^{(1)}\|_2$ (provádíme unitární transformaci, která zachovává velikost původního vektoru).

- nyní označme

$$A^{(1)} := \begin{pmatrix} a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \dots & a_{3n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{pmatrix}$$

Householderovy transformace - příklad

- je tedy

$$\overline{\mathbb{Q}}^{(1)} \mathbb{A} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1n} \\ 0 & & & & \\ \vdots & & \mathbb{A}^{(1)} & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}$$

- podobným způsobem upravíme nyní $\mathbb{A}^{(1)}$
 - postup je trochu podobný jako u Gaussovy eliminace
- volíme

$$x^{(2)} := \mathbb{A}_{\cdot 1}^{(1)},$$

tj. první sloupec matice $\mathbb{A}^{(1)}$ a je $x^{(2)} \in \mathbb{R}^{n-1}$

Householderovy transformace - příklad

- dále volíme

$$\vec{w}^{(2)} := \frac{\vec{x}^{(2)} + \text{sign}x_1^{(2)} \|\vec{x}^{(2)}\|_2 \vec{e}^{(2)}}{\left\| \vec{x}^{(2)} + \text{sign}x_1^{(2)} \|\vec{x}^{(2)}\|_2 \vec{e}^{(2)} \right\|_2},$$

kde $\vec{e}^{(2)}$ je první bazický vektor standardní báze prostoru $\mathbb{R}^{n-1}$

- napočítáme

$$\tilde{Q}^{(2)} := \mathbb{I} - 2\vec{w}^{(2)} \left(\vec{w}^{(2)} \right)^T,$$

tj. $\tilde{Q}^{(2)} \in \mathbb{R}^{n-1, n-1}$

Vlastní čísla
matic

Částečný
problém
vlastních čísel

Mocninná metoda
Redukční metoda

Výpočet
kompletního
spektra matice

Trojúhelníková
metoda

LR algoritmus

QR algoritmus

Gramův-Schmidtův
ortonormalizační
proces

Householderovy
transformace

Givensovy rotace

QR iterace

Hessenbergovy QR
iterace

Shrnutí a
otázky

Householderovy transformace - příklad

- potom je

$$\tilde{Q}^{(2)} A^{(1)} = \begin{pmatrix} r_{22} & r_{23} & r_{24} & \dots & r_{2n} \\ 0 & a_{33}^{(2)} & a_{34}^{(2)} & \dots & a_{3n}^{(2)} \\ 0 & a_{43}^{(2)} & a_{44}^{(2)} & \dots & a_{4n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n3}^{(2)} & a_{n4}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix},$$

kde $r_{22} = \|\vec{x}^{(2)}\|_2$.

- nyní označme

$$A^{(2)} := \begin{pmatrix} a_{33}^{(2)} & a_{34}^{(2)} & \dots & a_{3n}^{(2)} \\ a_{43}^{(2)} & a_{44}^{(2)} & \dots & a_{4n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n3}^{(2)} & a_{n4}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix}$$

Householderovy transformace - příklad

- potom lze psát

$$\tilde{Q}^{(2)} A^{(1)} = \begin{pmatrix} r_{22} & r_{23} & r_{24} & \dots & r_{2n} \\ 0 & & & & \\ \vdots & & A^{(2)} & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}$$

- definujeme-li

$$\overline{Q}^{(2)} := \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & \tilde{Q}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & \tilde{Q}^{(2)} \end{pmatrix},$$

pak tato transformace při násobení zleva zachovává první řádek a je stále unitární.

Vlastní čísla
matic

Částečný
problém
vlastních čísel

Mocninná metoda
Redukční metoda

Výpočet
kompletního
spektra matice

Trojúhelníková
metoda

LR algoritmus

QR algoritmus

Gramův-Schmidtův
ortonormalizační
proces

Householderovy
transformace

Givensovy rotace

QR iterace

Hessenbergovy QR
iterace

Shrnutí a
otázky

Householderovy transformace - příklad

- potom je tedy vidět, že platí

$$\begin{aligned} \overline{Q}^{(2)} \overline{Q}^{(1)} A &= \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} & \dots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & r_{23} & r_{24} & \dots & r_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & a_{34}^{(2)} & \dots & a_{3n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{43}^{(2)} & a_{44}^{(2)} & \dots & a_{4n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & a_{n4}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} & \dots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & r_{23} & r_{24} & \dots & r_{2n} \\ 0 & 0 & & & & \\ \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & & & & \end{pmatrix} A^{(2)} \end{aligned}$$

Householderovy transformace - příklad

V dalším kroku definujeme:

- $x^{(3)} := A_{\cdot 1}^{(2)}$, tj. $x^{(3)} \in \mathbb{R}^{n-2}$
-

$$\vec{w}^{(3)} := \frac{\vec{x}^{(3)} + \text{sign}x_1^{(3)} \|\vec{x}^{(3)}\|_2 \vec{e}^{(3)}}{\left\| \vec{x}^{(3)} + \text{sign}x_1^{(3)} \|\vec{x}^{(3)}\|_2 \vec{e}^{(3)} \right\|_2},$$

kde $\vec{e}^{(3)}$ je první bazický vektor standardní báze prostoru $\mathbb{R}^{n-2}$

- $\tilde{Q}^{(3)} := I - 2\vec{w}^{(3)} (\vec{w}^{(3)})^T \in \mathbb{R}^{n-2, n-2}$
-

$$\overline{Q}^{(3)} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \vec{0}^T \\ 0 & 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & \vec{0} & \tilde{Q}^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \tilde{Q}^{(3)} \end{pmatrix}$$

Vlastní čísla
matic

Částečný
problém
vlastních čísel

Mocninná metoda
Redukční metoda

Výpočet
kompletního
spektra matice

Trojúhelníková
metoda

LR algoritmus

QR algoritmus

Gramův-Schmidtův
ortonormalizační
proces

Householderovy
transformace

Givensovy rotace

QR iterace

Hessenbergovy QR
iterace

Shrnutí a
otázky

Householderovy transformace - příklad

A dostáváme tak:

$$\overline{\mathbb{Q}}^{(3)} \overline{\mathbb{Q}}^{(2)} \overline{\mathbb{Q}}^{(1)} A =$$

$$\overline{\mathbb{Q}}^{(3)} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} & \dots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & r_{23} & r_{24} & \dots & r_{2n} \\ 0 & 0 & & & & \\ \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & & & & \end{pmatrix} \overline{\mathbb{A}}^{(2)} =$$

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} & \dots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & r_{23} & r_{24} & \dots & r_{2n} \\ 0 & 0 & r_{33} & r_{34} & \dots & r_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}^{(3)} & \dots & a_{4n}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{n4}^{(3)} & \dots & a_{nn}^{(3)} \end{pmatrix}$$

a opět platí, že $r_{33} = \|\vec{x}^{(3)}\|_2$.

Householderovy transformace

- postup shrneme v následujícím algoritmu
- matice, které vznikají úpravou původní matice A a obsahují prvky označované jako r_{ij} a a_{ij}^k v algoritmu označujeme jako $\mathbb{R}^{(k)}$

Vlastní čísla
matic

Částečný
problém
vlastních čísel

Mocninná metoda
Redukční metoda

Výpočet
kompletního
spektra matice

Trojúhelníková
metoda

LR algoritmus

QR algoritmus

Gramův-Schmidtův
ortonormalizační
proces

**Householderovy
transformace**

Givensovy rotace

QR iterace

Hessenbergovy QR
iterace

Shrnutí a
otázky

Householderovy transformace

Vlastní čísla
matic

Částečný
problém
vlastních čísel

Mocninná metoda
Redukční metoda

Výpočet
kompletního
spektra matice

Trojúhelníková
metoda

LR algoritmus

QR algoritmus

Gramův-Schmidtův
ortonormalizační
proces

Householderovy
transformace

Givensovy rotace

QR iterace

Hessenbergovy QR
iterace

Shrnutí a
otázky

```

1: procedure HOUSEHOLDERQR( $\mathbb{A}$ )
2:    $\mathbb{R}^{(1)} = \mathbb{A}$ 
3:    $\mathbb{Q}^{(1)} = \mathbb{I}$ 
4:   for  $k = 1, \dots, n - 1$  do
5:      $\vec{x}^{(k)} := \mathbb{R}_{k \dots n, k}^{(k)}$  (= složky  $k \dots n$   $k$ -tého sloupce )
6:      $\vec{w}^{(k)} := \frac{\vec{x}^{(k)} + \text{sign} x_1^{(k)} \|\vec{x}^{(k)}\|_2 \vec{e}^{(k)}}{\|\vec{x}^{(k)} + \text{sign} x_1^{(k)} \|\vec{x}^{(k)}\|_2 \vec{e}^{(k)}\|_2} \in \mathbb{R}^{n-k+1}$ 
7:      $\tilde{\mathbb{Q}}^{(k)} := \mathbb{I} - 2\vec{w}^{(k)} (\vec{w}^{(k)})^T \in \mathbb{R}^{n-k+1, n-k+1}$ 
8:      $\overline{\mathbb{Q}}^{(k)} := \begin{pmatrix} \mathbb{I}^{(k)} & \\ & \tilde{\mathbb{Q}}^{(k)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n, n}$ 
9:      $\mathbb{Q}^{(k+1)} := \mathbb{Q}^{(k)} \overline{\mathbb{Q}}^{(k)}$ 
10:     $\mathbb{R}^{(k+1)} := \overline{\mathbb{Q}}^{(k)} \mathbb{R}^{(k)}$ 
11:   end for
12:   return  $\mathbb{Q}^{(n)}, \mathbb{R}^{(n)}$ 
13: end procedure

```

Householderovy transformace

- for cyklus v proměnné k vytváří řádově $O(n)$ iterací
- vnitřek tohoto cyklu obsahuje maticové násobení s Householderovými transformacemi
- ukážeme, že to lze provést se složitostí $O(n^2)$ a tedy je celková složitost $O(n^3)$

Vlastní čísla
matic

Částečný
problém
vlastních čísel

Mocninná metoda
Redukční metoda

Výpočet
kompletního
spektra matice

Trojúhelníková
metoda

LR algoritmus

QR algoritmus

Gramův-Schmidtův
ortonormalizační
proces

**Householderovy
transformace**

Givensovy rotace

QR iterace

Hessenbergovy QR
iterace

Shrnutí a
otázky

Householderovy transformace

Aplikaci Householderovy transformace $\mathbb{H}_{\vec{w}}$ na matici $\mathbb{A}$ lze provést takto

$$\begin{aligned}\mathbb{H}_{\vec{w}}\mathbb{A} &= (\mathbb{I} - 2\vec{w}\vec{w}^*)\mathbb{A} = \mathbb{A} - 2\vec{w}\vec{w}^*\mathbb{A} \\ &= \mathbb{A} - 2\vec{w}(\mathbb{A}^*\vec{w})^*\end{aligned}$$

Což lze algoritmicky zapsat jako:

- 1: **procedure** HOUSEHOLDERTRANSFORMATION($\mathbb{A}, \vec{w}$)
- 2: $\vec{v} := \mathbb{A}^*\vec{w}$
- 3: $\mathbb{B} := 2\vec{w}\vec{v}^*$
- 4: $\mathbb{H}_{\vec{w}} := \mathbb{A} - \mathbb{B}$
- 5: return $\mathbb{H}_{\vec{w}}$
- 6: **end procedure**

A zde má každý krok složitost $O(n^2)$. Složitost celého QR rozkladu je pak $O(n^3)$.

Vlastní čísla
matic

Částečný
problém
vlastních čísel

Mocninná metoda
Redukční metoda

Výpočet
kompletního
spektra matice

Trojúhelníková
metoda

LR algoritmus

QR algoritmus

Gramův-Schmidtův
ortonormalizační
proces

Householderovy
transformace

Givensovy rotace

QR iterace

Hessenbergovy QR
iterace

Shrnutí a
otázky

Givensovy rotace

- **Givensovy rotace** jsou ortogonální transformace, které umožňují eliminovat jednotlivé prvky vektoru $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$
- pro dvojici indexů i, j a úhel θ je Givensova rotace definována jako

$$\mathbb{G}(i, j, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & \cos \theta & & \sin \theta & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & -\sin \theta & & \cos \theta & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

- pro vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ odpovídá součin $\vec{y} = \mathbb{G}(i, j, \theta) \vec{x}$ rotaci složek (x_i, x_j) o úhel θ po směru hodinových ručiček

Vlastní čísla
matic

Částečný
problém
vlastních čísel

Mocninná metoda
Redukční metoda

Výpočet
kompletního
spektra matice

Trojúhelníková
metoda

LR algoritmus

QR algoritmus

Gramův-Schmidtův
ortonormalizační
proces

Householderovy
transformace

Givensovy rotace

QR iterace

Hessenbergovy QR
iterace

Shrnutí a
otázky

- platí tedy

$$y_k = \begin{cases} x_j & \text{pro } k \neq i, j \\ cx_i + sx_j & \text{pro } k = i \\ -sx_i + cx_j & \text{pro } k = j \end{cases}$$

kde jsme použili značení $s = \sin \theta$ a $c = \cos \theta$.

- volbou

$$c = \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}}, \quad s = \frac{x_j}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}},$$

pak bude $y_i = \sqrt{x_i^2 + x_j^2}$ a $y_j = 0$

- to odpovídá rotaci o úhel $\theta = \arctan -x_j/x_i$
- pomocí Givensových rotací lze postupně eliminovat všechny prvky pod diagonálou a opět tak získat QR rozklad

Givensovy rotace - příklad

Mějme matici $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, ukážeme výpočet jejího QR rozkladu pomocí Givensových rotací:

- v prním kroku budeme nulovat první prvek v druhém řádku (tj. a_{21}), pomocí prvního řádku
- volíme tedy (horní index se vztahuje k souřadnicím eliminovaného prvku matice)

$$c^{(21)} := \frac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}}, s^{(21)} := \frac{a_{21}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}}$$

- a definujeme příslušnou Givensovu rotaci

$$\mathbb{G}^{(21)} := \begin{pmatrix} c^{(21)} & s^{(21)} & & & \\ -s^{(21)} & c^{(21)} & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Givensovy rotace - příklad

- vynásobením matice $\mathbb{A}$ maticí $\mathbb{G}^{(21)}$ dostáváme

$$\mathbb{G}^{(21)} \mathbb{A} =$$

$$\begin{pmatrix} c^{(21)} & s^{(21)} & & & \\ -s^{(21)} & c^{(21)} & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}^{(21)} & a_{12}^{(21)} & a_{13}^{(21)} & \dots & a_{1n}^{(21)} \\ 0 & a_{22}^{(21)} & a_{23}^{(21)} & \dots & a_{2n}^{(21)} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- zde platí $a_{11}^{(21)} = \sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}$
- v této výsledné matici budeme chtít nulovat prvek a_{31} pomocí prvního řádku

Givensovy rotace - příklad

Vlastní čísla
matic

Částečný
problém
vlastních čísel

Mocninná metoda
Redukční metoda

Výpočet
kompletního
spektra matice

Trojúhelníková
metoda

LR algoritmus

QR algoritmus

Gramův-Schmidtův
ortonormalizační
proces

Householderovy
transformace

Givensovy rotace

QR iterace

Hessenbergovy QR
iterace

Shrnutí a
otázky

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(21)} & a_{12}^{(21)} & a_{13}^{(21)} & \dots & a_{1n}^{(21)} \\ 0 & a_{22}^{(21)} & a_{23}^{(21)} & \dots & a_{2n}^{(21)} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

- definujeme

$$c^{(31)} := \frac{a_{11}^{(21)}}{\sqrt{(a_{11}^{(21)})^2 + a_{31}^2}}, s^{(31)} := \frac{a_{31}}{\sqrt{(a_{11}^{(21)})^2 + a_{31}^2}}$$

- a dále definujeme příslušnou Givensovu rotaci

$$G^{(31)} := \begin{pmatrix} c^{(31)} & & s^{(31)} & & \\ & 1 & & & \\ -s^{(31)} & & c^{(31)} & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Givensovy rotace - příklad

- tuto transformaci nyní aplikujeme zleva na matici

$G^{(21)}A$ a dostaneme

$$G^{(31)}G^{(21)}A =$$

$$\begin{pmatrix} c^{(31)} & & s^{(31)} & & & \\ & 1 & & & & \\ -s^{(31)} & & c^{(31)} & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}^{(21)} & a_{12}^{(21)} & a_{13}^{(21)} & \dots & a_{1n}^{(21)} \\ 0 & a_{22}^{(21)} & a_{23}^{(21)} & \dots & a_{2n}^{(21)} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \dots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(31)} & a_{12}^{(31)} & a_{13}^{(31)} & \dots & a_{1n}^{(31)} \\ 0 & a_{22}^{(21)} & a_{23}^{(21)} & \dots & a_{2n}^{(21)} \\ 0 & a_{32}^{(31)} & a_{33}^{(31)} & \dots & a_{3n}^{(31)} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \dots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

- a platí $a_{11}^{(31)} = \sqrt{(a_{11}^{(21)})^2 + a_{31}^2}$

Givensovy rotace - příklad

- stejným způsobem pomocí Givensových rotací

$$\mathbb{G}^{(41)} := \mathbb{G}(a_{41}, a_{11}^{(31)}),$$

$$\mathbb{G}^{(51)} := \mathbb{G}(a_{51}, a_{11}^{(41)}),$$

$$\vdots$$

$$\mathbb{G}^{(n1)} := \mathbb{G}(a_{n,1}, a_{11}^{(n-1,1)})$$

eliminujeme prvky $a_{41}, a_{51}, \dots, a_{n1}$

- přitom každá transformace $\mathbb{G}^{(ij)}$ mění pouze i -tý a j -tý řádek matice

Vlastní čísla
matic

Částečný
problém
vlastních čísel

Mocninná metoda
Redukční metoda

Výpočet
kompletního
spektra matice

Trojúhelníková
metoda

LR algoritmus

QR algoritmus

Gramův-Schmidtův
ortonormalizační
proces

Householderovy
transformace

Givensovy rotace

QR iterace

Hessenbergovy QR
iterace

Shrnutí a
otázky

Givensovy rotace - příklad

- dostáváme tak vztah

$$G^{(n1)} G^{(n-1,1)} \dots G^{(21)} A =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(n,1)} & a_{12}^{(n,1)} & a_{13}^{(n,1)} & \dots & a_{1n}^{(n,1)} \\ 0 & a_{22}^{(21)} & a_{23}^{(21)} & \dots & a_{2n}^{(21)} \\ 0 & a_{32}^{(31)} & a_{33}^{(31)} & \dots & a_{3n}^{(31)} \\ 0 & a_{42}^{(41)} & a_{43}^{(41)} & \dots & a_{4n}^{(41)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2}^{(n-1,1)} & a_{n-1,3}^{(n-1,1)} & \dots & a_{n-1,n}^{(n-1,1)} \\ 0 & a_{n,2}^{(n,1)} & a_{n,3}^{(n,1)} & \dots & a_{n,n}^{(n,1)} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(21)} & a_{23}^{(21)} & \dots & a_{2n}^{(21)} \\ 0 & a_{32}^{(31)} & a_{33}^{(31)} & \dots & a_{3n}^{(31)} \\ 0 & a_{42}^{(41)} & a_{43}^{(41)} & \dots & a_{4n}^{(41)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2}^{(n-1,1)} & a_{n-1,3}^{(n-1,1)} & \dots & a_{n-1,n}^{(n-1,1)} \\ 0 & a_{n,2}^{(n,1)} & a_{n,3}^{(n,1)} & \dots & a_{n,n}^{(n,1)} \end{pmatrix}$$

- kde jsme označili $r_{1j} := a_{1j}^{(n1)}$

Vlastní čísla
matic

Částečný
problém
vlastních čísel

Mocninná metoda
Redukční metoda

Výpočet
kompletního
spektra matice

Trojúhelníková
metoda

LR algoritmus

QR algoritmus

Gramův-Schmidtův
ortonormalizační
proces

Householderovy
transformace

Givensovy rotace

QR iterace

Hessenbergovy QR
iterace

Shrnutí a
otázky

Givensovy rotace - příklad

Vlastní čísla
matic

Částečný
problém
vlastních čísel

Mocninná metoda
Redukční metoda

Výpočet
kompletního
spektra matice

Trojúhelníková
metoda

LR algoritmus

QR algoritmus

Gramův-Schmidtův
ortonormalizační
proces

Householderovy
transformace

Givensovy rotace

QR iterace

Hessenbergovy QR
iterace

Shrnutí a
otázky

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(21)} & a_{23}^{(21)} & \dots & a_{2n}^{(21)} \\ 0 & a_{32}^{(31)} & a_{33}^{(31)} & \dots & a_{3n}^{(31)} \\ 0 & a_{42}^{(41)} & a_{43}^{(41)} & \dots & a_{4n}^{(41)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2}^{(n-1,1)} & a_{n-1,3}^{(n-1,1)} & \dots & a_{n-1,n}^{(n-1,1)} \\ 0 & a_{n,2}^{(n,1)} & a_{n,3}^{(n,1)} & \dots & a_{n,n}^{(n,1)} \end{pmatrix}$$

- nyní pomocí Givensových rotací

$$G^{(32)} := G(a_{32}^{(31)}, a_{22}^{(21)}),$$

$$G^{(42)} := G(a_{42}^{(41)}, a_{22}^{(32)}),$$

$$G^{(52)} := G(a_{52}^{(51)}, a_{22}^{(42)}),$$

$$\vdots$$

$$G^{(n,2)} := G(a_{n2}^{(n,1)}, a_{22}^{(n-1,2)})$$

eliminujeme prvky $a_{32}^{(31)}, a_{42}^{(42)}, \dots, a_{n2}^{(n,1)}$

Givensovy rotace - příklad

- dostáváme tak, že

$$G^{(n,2)} G^{(n-1,2)} \dots G^{(3,2)} G^{(n,1)} \dots G^{(2,1)} A =$$

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(n,2)} & a_{23}^{(n,2)} & \dots & a_{2n}^{(n,2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3,2)} & \dots & a_{3n}^{(3,2)} \\ 0 & 0 & a_{43}^{(4,2)} & \dots & a_{4n}^{(4,2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n-1,3}^{(n-1,2)} & \dots & a_{n-1,n}^{(n-1,2)} \\ 0 & 0 & a_{n,3}^{(n,2)} & \dots & a_{n,n}^{(n,2)} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & r_{23} & \dots & r_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3,2)} & \dots & a_{3n}^{(3,2)} \\ 0 & 0 & a_{43}^{(4,2)} & \dots & a_{4n}^{(4,2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n-1,3}^{(n-1,2)} & \dots & a_{n-1,n}^{(n-1,2)} \\ 0 & 0 & a_{n,3}^{(n,2)} & \dots & a_{n,n}^{(n,2)} \end{pmatrix}$$

- kde jsme označili $r_{2j} := a_{2j}^{(n,2)}$
- podobně eliminujeme další prvky pod diagonálou

Vlastní čísla
matic

Částečný
problém
vlastních čísel

Mocninná metoda
Redukční metoda

Výpočet
kompletního
spektra matice

Trojúhelníková
metoda

LR algoritmus

QR algoritmus

Gramův-Schmidtův
ortonormalizační
proces

Householderovy
transformace

Givensovy rotace

QR iterace

Hessenbergovy QR
iterace

Shrnutí a
otázky

```

1: procedure GIVENSQR( $\mathbb{A}$ )
2:    $\mathbb{R}^{(11)} = \mathbb{A}$ 
3:    $\mathbb{Q}^{(11)} = \mathbb{I}$ 
4:   for  $k = 1, \dots, n - 1$  do
5:     for  $l = k + 1, \dots, n$  do
6:        $c^{(lk)} := r_{kk}^{(l-1,k)} / \sqrt{\left(r_{kk}^{(l-1,k)}\right)^2 + \left(r_{lk}^{(l-1,k)}\right)^2}$ 
7:        $s^{(lk)} := r_{lk}^{(l-1,k)} / \sqrt{\left(r_{kk}^{(l-1,k)}\right)^2 + \left(r_{lk}^{(l-1,k)}\right)^2}$ 
8:        $\mathbb{G}_{ij}^{(lk)} := \begin{cases} c^{(lk)} & \text{pro } i = j = l \vee i = j = k, \\ s^{(lk)} & \text{pro } i = k \wedge j = l, \\ -s^{(lk)} & \text{pro } i = l \wedge j = k, \\ 1 & \text{pro } i = j \wedge i \neq k \wedge i \neq l, \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$ 
9:        $\mathbb{R}^{(lk)} := \mathbb{G}^{(lk)} \mathbb{R}^{(l-1,k)}$ 
10:       $\mathbb{Q}^{(lk)} := \mathbb{Q}^{(l-1,k)} (\mathbb{G}^{(lk)})^T$ 
11:     end for
12:      $\mathbb{R}^{(k+1,k+1)} := \mathbb{R}^{(kn)}$ 
13:      $\mathbb{Q}^{(k+1,k+1)} := \mathbb{Q}^{(kn)}$ 
14:   end for
15:   return  $\mathbb{Q}^{(nn)}, \mathbb{R}^{(nn)}$ 
16: end procedure

```

Givensovy rotace

- celkově vytváříme řádově n^2 Givensových transformací
- ačkoliv je aplikace Givensovy transformace maticovým násobením, víme, že ale mění vždy jen dva řádky (sloupce) dané matice
- aplikace Givensovy rotace tak lze snadno implementovat se složitostí $O(n)$

Vlastní čísla
matic

Částečný
problém
vlastních čísel

Mocninná metoda
Redukční metoda

Výpočet
kompletního
spektra matice

Trojúhelníková
metoda

LR algoritmus

QR algoritmus

Gramův-Schmidtův
ortonormalizační
proces

Householderovy
transformace

Givensovy rotace

QR iterace

Hessenbergovy QR
iterace

Shrnutí a
otázky

Ukázali jsme si tři způsoby, jak získat QR rozklad

- Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces
 - je numericky nestabilní
 - používá se v modifikované podobě v některých metodách pro řešení soustav lineárních rovnic
- Householderovy a Givensovy transformace jsou numericky stabilnější
- ve všech případech je složitost n^3

Vlastní čísla
matic

Částečný
problém
vlastních čísel

Mocninná metoda
Redukční metoda

Výpočet
kompletního
spektra matice

Trojúhelníková
metoda

LR algoritmus

QR algoritmus

Gramův-Schmidtův
ortonormalizační
proces

Householderovy
transformace

Givensovy rotace

QR iterace

Hessenbergovy QR
iterace

Shrnutí a
otázky

- ztrátu ortogonality lze poměřovat pomocí hodnoty

$$\|\mathbb{I} - \mathbb{Q}\mathbb{Q}^*\|$$

- lze ukázat, že platí (ϵ označuje strojovou přesnost aritmetiky)

Algoritmus	$\ \mathbb{I} - \mathbb{Q}\mathbb{Q}^*\ $
Householderův QR rozklad	ϵ
Givensův QR rozklad	ϵ
Klasický GS	$\kappa(\mathbb{A})^2 \epsilon$
Modifikovaný GS	$\kappa(\mathbb{A}) \epsilon$
Iterační GS	ϵ

QR algoritmus

- pro zadanou matici $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ konstruuje tři posloupnosti
 - $\{T^{(k)}\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{n,n}$
 - $\{Q^{(k)}\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{n,n}$ ortogonální matice
 - $\{R^{(k)}\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{n,n}$ horní trojúhelníkové
- na počátku volíme

$$\begin{aligned}T^{(1)} &= A, \\Q^{(1)}R^{(1)} &= T^{(1)}, \\T^{(2)} &= R^{(1)}Q^{(1)}\end{aligned}$$

- obecně mají jednotlivé iterace tvar

$$\begin{aligned}Q^{(k)}R^{(k)} &= T^{(k)}, \\T^{(k+1)} &= R^{(k)}Q^{(k)}.\end{aligned}$$

Vlastní čísla
matic

Částečný
problém
vlastních čísel

Mocninná metoda
Redukční metoda

Výpočet
kompletního
spektra matice

Trojúhelníková
metoda

LR algoritmus

QR algoritmus

Gramův-Schmidtův
ortonormalizační
proces

Householderovy
transformace

Givensovy rotace

QR iterace

Hessenbergovy QR
iterace

Shrnutí a
otázky

- platí tedy

$$\mathbb{R}^{(k)} = \left(\mathbb{Q}^{(k)} \right)^{-1} \mathbb{T}^{(k)}$$

a

$$\mathbb{T}^{(k+1)} = \mathbb{R}^{(k)} \mathbb{Q}^{(k)} = \left(\mathbb{Q}^{(k)} \right)^{-1} \mathbb{T}^{(k)} \mathbb{Q}^{(k)},$$

resp.

$$\mathbb{T}^{(k)} = \left(\mathbb{Q}^{(0)} \mathbb{Q}^{(1)} \dots \mathbb{Q}^{(k)} \right)^T \mathbb{A} \left(\mathbb{Q}^{(0)} \mathbb{Q}^{(1)} \dots \mathbb{Q}^{(k)} \right)$$

pro $k > 0$ a tedy matice $\mathbb{T}^{(k)}$ je ortogonálně podobná matici $\mathbb{A}$.

Konvergence QR algoritmu

Vlastní čísla
matic

Částečný
problém
vlastních čísel

Mocninná metoda
Redukční metoda

Výpočet
kompletního
spektra matice

Trojúhelníková
metoda

LR algoritmus

QR algoritmus

Gramův-Schmidtův
ortonormalizační
proces

Householderovy
transformace

Givensovy rotace

QR iterace

Hessenbergovy QR
iterace

Shrnutí a
otázky

Remark 37

QR rozklad je opět spojitou funkcí prvků matice $\mathbb{A}$, jak lze vidět např. z Grammova-Schmidtova algoritmu.

Lemma 38

Existuje-li QR rozklad matice $\mathbb{A}^k = \mathcal{Q}^{(k)}\mathcal{R}^{(k)}$, pak platí

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}^{(k)} &= \mathcal{Q}^{(1)}\mathcal{Q}^{(2)} \dots \mathcal{Q}^{(k)}, \\ \mathcal{R}^{(k)} &= \mathbb{R}^{(k)}\mathbb{R}^{(k-1)} \dots \mathbb{R}^{(1)}.\end{aligned}$$

Důkaz.

Stejný jako u LR algoritmu.



Vlastní čísla
matic

Částečný
problém
vlastních čísel

Mocninná metoda
Redukční metoda

Výpočet
kompletního
spektra matice

Trojúhelníková
metoda

LR algoritmus

QR algoritmus

Gramův-Schmidtův
ortonormalizační
proces

Householderovy
transformace

Givensovy rotace

QR iterace

Hessenbergovy QR
iterace

Shrnutí a
otázky

Theorem 39

Je-li matice $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ taková, že její vlastní čísla λ_i splňují

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|,$$

pak posloupnost $\mathbb{T}^{(k)}$ konverguje k horní trojúhelníkové matici s vlastními čísly λ_i na diagonále seřazené podle velikosti. Je-li $\mathbb{A}$ symetrická, pak $\mathbb{T}^{(k)}$ konverguje k diagonální matici.

Vlastní čísla
matic

Částečný
problém
vlastních čísel

Mocninná metoda
Redukční metoda

Výpočet
kompletního
spektra matice

Trojúhelníková
metoda

LR algoritmus

QR algoritmus

Gramův-Schmidtův
ortonormalizační
proces

Householderovy
transformace

Givensovy rotace

QR iterace

Hessenbergovy QR
iterace

Shrnutí a
otázky

- klasický přístup ke QR rozkladu vyžaduje v každém kroku n^3 operací
- ukážeme si tzv. **Hessenbergovy QR iterace** se složitostí n^2

Hessenbergův tvar matice

Definition 40

Matice v **Hessenbergově tvaru** je horní trojúhelníková matice, která má navíc nenulové prvky bezprostředně pod diagonálou.

Remark 41

*Hessenbergův tvar je zřejmě **nejjednodušší tvar**, na který dokážeme libovolnou regulární matici převést **podobnostní transformací**, kterou lze získat **přímým algoritmem**.*

Hessenbergovy QR iterace

Vlastní čísla
matic

Částečný
problém
vlastních čísel

Mocninná metoda
Redukční metoda

Výpočet
kompletního
spektra matice

Trojúhelníková
metoda

LR algoritmus

QR algoritmus

Gramův-Schmidtův
ortonormalizační
proces

Householderovy
transformace

Givensovy rotace

QR iterace

Hessenbergovy QR
iterace

Shrnutí a
otázky

Hessenbergovy QR iterace

- metoda využívá **Hessenbergův tvar matice**
- na začátku metody převedeme matici A podobnostní transformací do Hessenbergova tvaru se složitostí $O(n^3)$
- ukážeme, že následující iterace lze provádět se složitostí $O(n^2)$

Hessenbergův tvar

- buď $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, odvodíme podobnostní transformaci na Hessenbergův tvar
- v prvním kroku nulujeme prvky v prvním sloupci na řádcích 3 až n
- definujeme $\vec{x}^{(1)} := (a_{21}, \dots, a_{n1})^T \in \mathbb{R}^{n-1}$

$$\vec{w}^{(1)} := \frac{\vec{x}^{(1)} + \text{sign} x_1^{(1)} \|\vec{x}^{(1)}\|_2 \vec{e}^{(1)}}{\left\| \vec{x}^{(1)} + \text{sign} x_1^{(1)} \|\vec{x}^{(1)}\|_2 \vec{e}^{(1)} \right\|_2} \in \mathbb{R}^{n-1},$$

kde $\vec{e}^{(1)}$ je první bazický vektor standardní báze prostoru $\mathbb{R}^{n-1}$

- $\tilde{Q}^{(1)} := I - 2\vec{w}^{(1)} (\vec{w}^{(1)})^T \in \mathbb{R}^{n-1,n-1}$

$$\overline{Q}^{(1)} := \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & \tilde{Q}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & \tilde{Q}^{(1)} \end{pmatrix}$$

Vlastní čísla
matic

Částečný
problém
vlastních čísel

Mocninná metoda
Redukční metoda

Výpočet
kompletního
spektra matice

Trojúhelníková
metoda

LR algoritmus

QR algoritmus

Gramův-Schmidtův
ortonormalizační
proces

Householderovy
transformace

Givensovy rotace

QR iterace

Hessenbergovy QR
iterace

Shrnutí a
otázky

- transformaci aplikujeme na matici $\mathbb{A}$ zleva

$$\overline{\mathbb{A}}^{(1)} := \overline{\mathbb{Q}}^{(1)} \mathbb{A} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \bar{a}_{21}^{(1)} & \bar{a}_{22}^{(1)} & \bar{a}_{23}^{(1)} & \dots & \bar{a}_{2n}^{(1)} \\ 0 & \bar{a}_{32}^{(1)} & \bar{a}_{33}^{(1)} & \dots & \bar{a}_{3n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \bar{a}_{n,2}^{(1)} & \bar{a}_{n,3}^{(1)} & \dots & \bar{a}_{n,n}^{(1)} \end{pmatrix}$$

- dostaneme tak matici, jejíž první sloupec odpovídá Hessenbergovu tvaru, není ale podobná matici $\mathbb{A}$

Hessenbergův tvar

- nyní proto provedeme násobení maticí

$$\left(\overline{\mathbb{Q}}^{(1)}\right)^{-1} = \left(\overline{\mathbb{Q}}^{(1)}\right)^* = \overline{\mathbb{Q}}^{(1)}$$

zprava

-

$$\overline{\mathbb{A}}^{(1)}\overline{\mathbb{Q}}^{(1)} := \overline{\mathbb{Q}}^{(1)}\mathbb{A}\overline{\mathbb{Q}}^{(1)} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \bar{a}_{21}^{(1)} & \bar{a}_{22}^{(1)} & \bar{a}_{23}^{(1)} & \dots & \bar{a}_{2n}^{(1)} \\ 0 & \bar{a}_{32}^{(1)} & \bar{a}_{33}^{(1)} & \dots & \bar{a}_{3n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \bar{a}_{n,2}^{(1)} & \bar{a}_{n,3}^{(1)} & \dots & \bar{a}_{n,n}^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \tilde{\mathbb{Q}}^{(1)} & & & \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ \bar{a}_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \dots & a_{3n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n,2}^{(1)} & a_{n,3}^{(1)} & \dots & a_{n,n}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & a_{13}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ h_{21} & h_{22} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \dots & a_{3n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n,2}^{(1)} & a_{n,3}^{(1)} & \dots & a_{n,n}^{(1)} \end{pmatrix} = \mathbb{H}^{(1)}$$

Vlastní čísla
matic

Částečný
problém
vlastních čísel

Mocninná metoda
Redukční metoda

Výpočet
kompletního
spektra matice

Trojúhelníková
metoda

LR algoritmus

QR algoritmus

Gramův-Schmidtův
ortonormalizační
proces

Householderovy
transformace

Givensovy rotace

QR iterace

Hessenbergovy QR
iterace

Shrnutí a
otázky

Hessenbergův tvar

- dále budeme eliminovat prvky $(a_{42}^{(1)} \dots a_{n,2}^{(1)})^T$
- definujeme $\vec{x}^{(2)} := (a_{32}^{(1)}, a_{42}^{(1)}) \dots a_{n,2}^{(1)})^T$
-

$$\vec{w}^{(2)} := \frac{\vec{x}^{(2)} + \text{sign} x_1^{(2)} \|\vec{x}^{(2)}\|_2 \vec{e}^{(2)}}{\left\| \vec{x}^{(2)} + \text{sign} x_1^{(2)} \|\vec{x}^{(2)}\|_2 \vec{e}^{(2)} \right\|_2} \in \mathbb{R}^{n-2},$$

kde $\vec{e}^{(2)}$ je první bazický vektor standardní báze prostoru $\mathbb{R}^{n-2}$

- $\tilde{\mathbb{Q}}^{(2)} := \mathbb{I} - 2\vec{w}^{(2)} (\vec{w}^{(2)})^T \in \mathbb{R}^{n-2, n-2}$
-

$$\overline{\mathbb{Q}}^{(2)} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \vec{0}^T \\ 0 & 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & \vec{0} & \tilde{\mathbb{Q}}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \tilde{\mathbb{Q}}^{(2)} \end{pmatrix}$$

Vlastní čísla
matic

Částečný
problém
vlastních čísel

Mocninná metoda
Redukční metoda

Výpočet
kompletního
spektra matice

Trojúhelníková
metoda

LR algoritmus

QR algoritmus

Gramův-Schmidtův
ortonormalizační
proces

Householderovy
transformace

Givensovy rotace

QR iterace

Hessenbergovy QR
iterace

Shrnutí a
otázky

Hessenbergův tvar

- aplikací zleva na matici $\mathbb{H}^{(1)}$ dostáváme

$$\tilde{\mathbb{Q}}^{(2)} \mathbb{H}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \tilde{\mathbb{Q}}^{(2)} & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & a_{13}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ h_{21} & h_{22} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \dots & a_{3n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n,2}^{(1)} & a_{n,3}^{(1)} & \dots & a_{n,n}^{(1)} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & a_{13}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ h_{21} & h_{22} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & \bar{a}_{32}^{(2)} & \bar{a}_{33}^{(2)} & \dots & \bar{a}_{3n}^{(2)} \\ 0 & 0 & \bar{a}_{43}^{(2)} & \dots & \bar{a}_{4n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \bar{a}_{n,3}^{(2)} & \dots & \bar{a}_{n,n}^{(2)} \end{pmatrix}$$

- pro zachování podobnostní transformace opět provedeme vynásobení zprava

Vlastní čísla
matic

Částečný
problém
vlastních čísel

Mocninná metoda
Redukční metoda

Výpočet
kompletního
spektra matice

Trojúhelníková
metoda

LR algoritmus

QR algoritmus

Gramův-Schmidtův
ortonormalizační
proces

Householderovy
transformace

Givensovy rotace

QR iterace

Hessenbergovy QR
iterace

Shrnutí a
otázky

Shrnutí a otázky

$$\overline{\mathbb{Q}}^{(2)} \mathbb{H}^{(1)} \overline{\mathbb{Q}}^{(2)} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & a_{13}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ h_{21} & h_{22} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & \bar{a}_{32}^{(2)} & \bar{a}_{33}^{(2)} & \dots & \bar{a}_{3n}^{(2)} \\ 0 & 0 & \bar{a}_{43}^{(2)} & \dots & \bar{a}_{4n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \bar{a}_{n,3}^{(2)} & \dots & \bar{a}_{n,n}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \tilde{\mathbb{Q}}^{(2)} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & a_{13}^{(2)} & \dots & a_{1n}^{(2)} \\ h_{21} & h_{22} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & \bar{a}_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{43}^{(2)} & \dots & a_{4n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n,3}^{(2)} & \dots & a_{n,n}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & \dots & a_{1n}^{(2)} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & h_{32} & h_{33} & \dots & a_{3n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{43}^{(2)} & \dots & a_{4n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n,3}^{(2)} & \dots & a_{n,n}^{(2)} \end{pmatrix} = \mathbb{H}^{(2)}$$

- takto postupujeme dále, až matici převedeme do Hessenbergova tvaru

Hessenbergovy QR iterace

- Hessenbergovy QR iterace generují posloupnost matic $\mathbb{H}^{(k)}$, které jsou v Hessenbergově tvaru
- pro QR rozklad matice $\mathbb{H}^{(k-1)}$ stačí eliminovat pouze $n - 1$ nenulových prvků pod diagonálou
- k tomu stačí provést $n - 1$ Givensových rotací
- definujeme

$$\left(\mathbb{Q}^{(k)}\right)^T = \mathbb{G}_{n-1}^{(k)} \dots \mathbb{G}_1^{(k)}$$

- pak je

$$\left(\mathbb{Q}^{(k)}\right)^T \mathbb{H}^{(k-1)} = \mathbb{R}^{(k)}$$

- a tudíž

$$\mathbb{H}^{(k-1)} = \mathbb{Q}^{(k)} \mathbb{R}^{(k)}$$

- a z definice QR iterací je

$$\mathbb{H}^{(k)} = \mathbb{R}^{(k)} \mathbb{Q}^{(k)} = \mathbb{R}^{(k)} \left(\mathbb{G}_1^{(k)}\right)^T \dots \left(\mathbb{G}_{n-1}^{(k)}\right)^T$$

Hessenbergovy QR iterace

Vlastní čísla
matic

Částečný
problém
vlastních čísel

Mocninná metoda
Redukční metoda

Výpočet
kompletního
spektra matice

Trojúhelníková
metoda

LR algoritmus

QR algoritmus

Gramův-Schmidtův
ortonormalizační
proces

Householderovy
transformace

Givensovy rotace

QR iterace

Hessenbergovy QR
iterace

Shrnutí a
otázky

Lemma 42

Výsledkem násobení

$$\mathbb{R}^{(k)} \left(\mathbb{G}_1^{(k)} \right)^T \cdots \left(\mathbb{G}_{n-1}^{(k)} \right)^T$$

je opět matice v Hessenbergovu tvaru.

- celou iteraci se nám podařilo provést s $O(n^2)$ operacemi
- na konci mámě opět matici v Hessenbergovu tvaru

Hessenbergovy QR iterace - příklad

Vlastní čísla
maticČástečný
problém
vlastních číselMocninná metoda
Redukční metodaVýpočet
kompletního
spektra maticeTrojúhelníková
metoda

LR algoritmus

QR algoritmus

Gramův-Schmidtův
ortonormalizační
procesHouseholderovy
transformace

Givensovy rotace

QR iterace

Hessenbergovy QR
iteraceShrnutí a
otázky

Ukážeme si Hessenbergovy iterace opět na příkladu. Mějme na matici $\mathbb{H}$ v Hessenbergově tvaru.

$$\mathbb{H} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & \dots & h_{1,n-1} & h_{1,n} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & \dots & h_{2,n-1} & h_{2,n} \\ 0 & h_{32} & h_{33} & \dots & h_{3,n-1} & h_{3,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & h_{n-1,n-2} & h_{n-1,n-1} & h_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & h_{n,n-1} & h_{n,n} \end{pmatrix}$$

Naším cílem je eliminovat prvky $h_{21}, h_{32}, \dots, h_{n,n-1}$ pomocí unitární transformace, čímž tuto matici převedeme na horní trojúhelníkový tvar. Použijeme k tomu Givensovy rotace pro eliminování jednotlivých prvků.

Hessenbergovy QR iterace - příklad

- k eliminaci prvku h_{21} použijeme Givensovu rotaci

$$G^{21} := G^{21}(h_{21}, h_{11}) = \begin{pmatrix} c^{21} & s^{21} & & & \\ -s^{21} & c^{21} & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

- ta eliminuje nasobením matice $\mathbb{H}$ zleva prvek h_{21} pomocí prvního řádku

$$G^{21}\mathbb{H} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1,n-1} & r_{1,n} \\ 0 & \bar{h}_{22} & \bar{h}_{23} & \dots & \bar{h}_{2,n-1} & \bar{h}_{2,n} \\ 0 & h_{32} & h_{33} & \dots & h_{3,n-1} & h_{3,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & h_{n-1,n-2} & h_{n-1,n-1} & h_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & h_{n,n-1} & h_{n,n} \end{pmatrix}$$

Hessenbergovy QR iterace - příklad

Vlastní čísla
matice

Částečný
problém
vlastních čísel

Mocninná metoda
Redukční metoda

Výpočet
kompletního
spektra matice

Trojúhelníková
metoda

LR algoritmus

QR algoritmus

Gramův-Schmidtův
ortonormalizační
proces

Householderovy
transformace

Givensovy rotace

QR iterace

Hessenbergovy QR
iterace

Shrnutí a
otázky

- dále budeme eliminovat prvek h_{32} pomocí druhého řádku matice, tj. Givensovou rotací

$$G^{32} := G^{32}(h_{32}, h_{22}^1) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & c^{32} & s^{32} & & & \\ & -s^{32} & c^{32} & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

- násobením matice $G^{21}H$ zleva dostaneme

$$G^{32}G^{21}H = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1,n-1} & r_{1,n} \\ 0 & \color{red}{r_{22}} & \color{red}{r_{23}} & \dots & \color{red}{r_{2,n-1}} & \color{red}{r_{2,n}} \\ 0 & \color{red}{0} & \color{red}{\bar{h}_{33}} & \dots & \color{red}{\bar{h}_{3,n-1}} & \color{red}{\bar{h}_{3,n}} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & h_{n-1,n-2} & h_{n-1,n-1} & h_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & h_{n,n-1} & h_{n,n} \end{pmatrix}$$

Hessenbergovy QR iterace - příklad

- takto postupujeme dále, až nakonec eliminujeme prvek $h_{n,n-1}$ pomocí předposledního řádku matice Givensovou rotací

$$G^{n,n-1} := G^{n,n-1}(h_{n,n-1}, h_{n-1,n-1}^1) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & c^{32} & s^{32} & \\ & & & -s^{32} & c^{32} & \end{pmatrix}$$

- násobením matice $G^{n-1,n-2} \dots G^{32} G^{21} H$ zleva dostáváme

$$G^{n,n-1} \dots G^{32} G^{21} H = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1,n-1} & r_{1,n} \\ 0 & r_{22} & r_{23} & \dots & r_{2,n-1} & r_{2,n} \\ 0 & 0 & r_{33} & \dots & r_{3,n-1} & r_{3,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & r_{n-1,n-1} & r_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & r_{n,n} \end{pmatrix} = R$$

Hessenbergovy QR iterace - příklad

Vlastní čísla
matic

Částečný
problém
vlastních čísel

Mocninná metoda
Redukční metoda

Výpočet
kompletního
spektra matice

Trojúhelníková
metoda

LR algoritmus
QR algoritmus

Gramův-Schmidtův
ortonormalizační
proces

Householderovy
transformace

Givensovy rotace
QR iterace

Hessenbergovy QR
iterace

Shrnutí a
otázky

- všimneme si, že Givensovy rotace vždy měnily jen dva po sobě jdoucí řádky
- nyní je potřeba napočítat matici

$$\mathbb{R} \left(\mathbb{G}^{21} \right)^T \left(\mathbb{G}^{32} \right)^T \dots \left(\mathbb{G}^{n,n-1} \right)^T$$

- transpozice Givensových rotací pouze mění znaménko mimodiagonálních členů, vzor matice ale zůstává stejný
- jelikož ale budeme nyní provádět násobení zprava, budou Givensovy rotace manipulovat se sloupci matice $\mathbb{R}$
- provedeme to opět postupně

- $$\mathbb{R} \left(\mathbb{G}^{21} \right)^T =$$

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \cdots & r_{1,n-1} & r_{1,n} \\ 0 & r_{22} & r_{23} & \cdots & r_{2,n-1} & r_{2,n} \\ 0 & 0 & r_{33} & \cdots & r_{3,n-1} & r_{3,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & r_{n-1,n-1} & r_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & r_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^{21} & -s^{21} & & & & \\ s^{21} & c^{21} & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} h_{11}^1 & \bar{r}_{12} & r_{13} & \dots & r_{1,n-1} & r_{1,n} \\ h_{21}^1 & \bar{r}_{22} & r_{23} & \dots & r_{2,n-1} & r_{2,n-1} \\ 0 & 0 & r_{33} & \dots & r_{3,n-1} & r_{3,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & r_{n-1,n-1} & r_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & r_{n,n} \end{pmatrix}$$

- Givensova rotace $(\mathbb{G}^{21})^T$ pracuje pouze s prvním a druhým sloupcem matice $\mathbb{R}$
- důležité je, že jediný nový nenulový prvek může vzniknout na pozici prvku h_{21}^1

Hessenbergovy QR iterace - příklad

- dále provedme násobení maticí $(\mathbb{G}^{32})^T$ zprava

$$\mathbb{R} \left(\mathbb{G}^{21} \right)^T \left(\mathbb{G}^{32} \right)^T =$$

$$\begin{pmatrix} h_{11}^1 & \bar{r}_{12} & r_{13} & \cdots & r_{1,n-1} & r_{1,n} \\ h_{21}^1 & \bar{r}_{22} & r_{23} & \cdots & r_{2,n-1} & r_{2,n} \\ 0 & 0 & r_{33} & \cdots & r_{3,n-1} & r_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & r_{n-1,n-1} & r_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & r_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & c^{32} & -s^{32} & & & \\ & s^{32} & c^{32} & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} h_{11}^1 & h_{12}^1 & \bar{r}_{13} & \cdots & r_{1,n-1} & r_{1,n} \\ h_{21}^1 & h_{22}^1 & \bar{r}_{23} & \cdots & r_{2,n-1} & r_{2,n} \\ 0 & h_{32}^1 & \bar{r}_{33} & \cdots & r_{3,n-1} & r_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & r_{n-1,n-1} & r_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & r_{n,n} \end{pmatrix}$$

- tato Givensova rotace pracuje opět pouze s druhým a třetím sloupcem matice $\mathbb{R} \left(\mathbb{G}^{21} \right)^T$, nový nenulový prvek tak může vzniknout pouze na pozici prvku h_{32}^1

Hessenbergovy QR iterace - příklad

Vlastní čísla
matic

Částečný
problém
vlastních čísel

Mocninná metoda
Redukční metoda

Výpočet
kompletního
spektra matice

Trojúhelníková
metoda

LR algoritmus

QR algoritmus

Gramův-Schmidtův
ortonormalizační
proces

Householderovy
transformace

Givensovy rotace

QR iterace

Hessenbergovy QR
iterace

Shrnutí a
otázky

- jako poslední krok provádíme násobení matice

$$\mathbb{R} (\mathbb{G}^{21})^T (\mathbb{G}^{32})^T \dots (\mathbb{G}^{n-1,n-2})^T \text{ maticí } (\mathbb{G}^{n,n-1})^T$$

-

$$\mathbb{R} (\mathbb{G}^{21})^T (\mathbb{G}^{32})^T \dots (\mathbb{G}^{n-1,n-2})^T (\mathbb{G}^{n,n-1})^T =$$

$$\begin{pmatrix} h_{11}^1 & h_{12}^1 & \bar{r}_{13} & \dots & r_{1,n-1} & r_{1,n} \\ h_{21}^1 & h_{22}^1 & \bar{r}_{23} & \dots & r_{2,n-1} & r_{2,n-1} \\ 0 & h_{32}^1 & \bar{r}_{33} & \dots & r_{3,n-1} & r_{3,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & r_{n-1,n-1} & r_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & r_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & c^{32} & -s^{32} & \\ & & & s^{32} & c^{32} & \\ & & & & & \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} h_{11}^1 & h_{12}^1 & h_{13}^1 & \dots & h_{1,n-1}^1 & h_{1,n}^1 \\ h_{21}^1 & h_{22}^1 & h_{23}^1 & \dots & h_{2,n-1}^1 & h_{2,n}^1 \\ 0 & h_{32}^1 & h_{33}^1 & \dots & h_{3,n-1}^1 & h_{3,n}^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & h_{n-1,n-1}^1 & h_{n-1,n}^1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & h_{n,n-1}^1 & h_{n,n}^1 \end{pmatrix}$$

- vidíme, že výsledná matice je opět v Hessenbergově tvaru

Výpočetní studie

- metody pro výpočet kompletního spektra jsou implementovány v programu `eigenvalues`
 - `--input-file` – vstupní soubor s maticí
 - `--method` – použitá metod
 - `triangular, lr, qr, qr-hessenberg`
 - `--max-iterations n` – maximální možný počet provedených iterací
 - `--convergence-residue r` – hodnota kritéria pro zastavení výpočtu
 - `--verbose n`
 - nastavuje úroveň vypisovaných informací v průběhu výpočtu

Vlastní čísla
matic

Částečný
problém
vlastních čísel

Mocninná metoda
Redukční metoda

Výpočet
kompletního
spektra matice

Trojúhelníková
metoda
LR algoritmus
QR algoritmus
Gramův-Schmidtův
ortonormalizační
proces
Householderovy
transformace
Givensovy rotace
QR iterace
Hessenbergovy QR
iterace

Shrnutí a
otázky

- částečný problém vlastních čísel
 - **mocninná metoda**
 - jak v praxi zaručit její podmínky konvergence?
 - jak napočítat nejmenší vlastní číslo?
 - redukční metoda
- úplný problém vlastních čísel
 - trojúhelníková metoda
 - LR algoritmus
 - **QR algoritmus**
 - **Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces**
 - **Householderovy transformace**
 - **Givensovy rotace**
 - **Hessenbergovy iterace**
- **na čem závisí rychlost konvergence?**
- jak konvergenci urychlit?