

# Tomáš Oberhuber

Faculty of Nuclear Sciences and Physical Engineering  
Czech Technical University in Prague

Separace  
kořenů

Metoda  
bisekcí

Metody  
vyšších řádů  
přesnosti

Metoda regula  
falsi

Newtonova  
metoda

Globálně  
konvergující  
metody

Řešení  
systémů  
nelineárních  
rovníc

## Video na Youtube

# Iterační metody pro nelineární rovnice

Separace  
kořenů

Metoda  
bisekcí

Metody  
vyšších řádů  
přesnosti

Metoda regula  
falsi

Newtonova  
metoda

Globálně  
konvergující  
metody

Řešení  
systémů  
nelineárních  
rovníc

Bud'  $f$  reálná funkce jedné reálné proměnné. Budeme hledat řešení rovnice

$$f(x) = 0.$$

Řešení se skládá ze dvou kroků:

- separace kořenů
  - metody nekonvergují globálně, tj. pro libovolné  $x_0$ , jako metody pro lineární soustavy – nejprve tedy musíme najít interval nebo intervaly, tak že obsahují vždy jen jeden kořen rovnice
- výpočet kořene se zadanou přesností

Kořen rovnice budeme značit jako  $\alpha$ .

## Separace kořenů

### Metoda bisekcí

### Metody vyšších řádů přesnosti

### Metoda regula falsi

### Newtonova metoda

### Globálně konvergující metody

### Řešení systémů nelineárních rovnic

- separaci kořenů dokážeme provést jen pro algebraické rovnice např. pomocí **Sturmových posloupností** – viz Wikipedie, Numerical Recipes.
- obecně to ale nejde a musíme mít nějaký předběžný odhad podle řešené úlohy
  - bez něj často nejsme schopní tyto rovnice řešit

To, že separaci lze provést a za jakých podmínek, říká následující věta:

## Separace kořenů

Metoda bisekcí

Metody vyšších řádů přesnosti

Metoda regula falsi

Newtonova metoda

Globálně konvergující metody

Řešení systémů nelineárních rovnic

## Theorem 1

*Nechť  $f$  je reálná funkce jedné reálné proměnné, spojitá na intervalu  $\langle a, b \rangle$  a nechť  $f(a)f(b) < 0$ . Potom rovnice  $f(x) = 0$  má na  $(a, b)$  alespoň jeden kořen a pokud navíc  $f'(x)$  na  $(a, b)$  nemění znaménko, pak je tento kořen jediný.*

- budeme konstruovat posloupnost  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ , která bude konvergovat ke kořenu rovnice

# Výpočet kořene - metoda bisekcí

Separace  
kořenů

Metoda  
bisekcí

Metody  
vyšších řádů  
přesnosti

Metoda regula  
falsi

Newtonova  
metoda

Globálně  
konvergující  
metody

Řešení  
systémů  
nelineárních  
rovníc

- nejjednodušší metoda pro výpočet kořene
- je pomalá, ale poměrně dost robustní
- konstruujeme posloupnost krajních mezí intervalů  $\langle l_k, r_k \rangle$ , ve kterém se nachází kořen
- každý následující interval má poloviční délku toho předchozího

# Výpočet kořene - metoda bisekcí

Separace  
kořenů

Metoda  
bisekcí

Metody  
vyšších řádů  
přesnosti

Metoda regula  
falsi

Newtonova  
metoda

Globálně  
konvergující  
metody

Řešení  
systémů  
nelineárních  
rovníc

- volíme  $l_0 = a$  a  $r_0 = b$
- v každé iteraci pak počítáme

$$x_k = \frac{l_k + r_k}{2},$$

$$l_{k+1} := \begin{cases} x_k & \text{pokud } \text{sign } f(x_k) = \text{sign } f(l_k), \\ l_k & \text{jinak} \end{cases}$$

$$r_{k+1} := \begin{cases} x_k & \text{pokud } \text{sign } f(x_k) = \text{sign } f(r_k), \\ r_k & \text{jinak} \end{cases}$$

# Výpočet kořene - metoda bisekcí

Separace  
kořenů

Metoda  
bisekcí

Metody  
vyšších řádů  
přesnosti

Metoda regula  
falsi

Newtonova  
metoda

Globálně  
konvergující  
metody

Řešení  
systémů  
nelineárních  
rovníc

- označíme-li  $\mathcal{I}_k = \langle l_k, r_k \rangle$ , pak vždy platí, že  $\alpha \in \mathcal{I}_k$  a

$$|\alpha - x_k| \leq |\mathcal{I}_k| = \frac{b - a}{2^k} \rightarrow 0$$



Výpočet kořene - metoda  
bisekcí

## Example 2

Použijte metodu bisekcí pro nalezení kořene polynomu  $x^3 + 4x^2 - 10$  v intervalu  $\langle 1, 2 \rangle$  ( $\alpha \approx 1.3652$ ).

$k$	$l_k$	$r_k$	$f(l_k)$	$f(r_k)$	$x_k$	$f(x_k)$
1	1.0	2.0	-5.0	14.0	1.5	2.375
2	1.0	1.5	-5.0	2.375	1.25	-1.796875
3	1.25	1.5	-1.796875	2.375	1.375	0.162109375
4	1.25	1.375	-1.796875	0.162109375	1.3125	-0.848388671875

# Výpočet kořene - metoda bisekcí

## Remark 3

*Metoda bisekcí konverguje i pro úlohu*

$$\tan x = 0,$$

*pro  $l_0 = 1$ ,  $r_0 = 3$ . Posloupnost  $x_k$  konverguje k  $\frac{\pi}{2}$ , což ale samozřejmě není kořen. V této úloze jsme ale porušili předpoklad spojitosti funkce  $f(x)$  na odseparovaném intervalu.*

# Iterativní metody pro hledání kořenů

- abychom urychlili konvergenci, využijeme více informací o funkci  $f$ , než jen její znaménko v bodě  $x_k$
- máme-li určité  $x_k$ , ptáme se, jak nejlépe ho změnit, aby se nové  $x_{k+1}$  co nejlépe přiblížilo k  $\alpha$
- pokud je  $f$  diferencovatelná, pak platí

$$0 = f(\alpha) = f(x_k) + f'(\xi)(\alpha - x_k),$$

$$\alpha - x_k = \frac{-f(x_k)}{f'(\xi)},$$

$$\alpha = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(\xi)}$$

- $f'(\xi)$  ale neznáme, lze ho napočítat jen přibližně
- označme aproximaci  $f'(\xi)$  jako  $q_k$
- dostáváme obecný předpis

$$x_{k+1} = \varphi(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{q_k}.$$

# Iterativní metody pro hledání kořenů

Separace  
kořenů

Metoda  
bisekcí

**Metody  
vyšších řádů  
přesnosti**

Metoda regula  
falsi

Newtonova  
metoda

Globálně  
konvergující  
metody

Řešení  
systémů  
nelineárních  
rovníc

- vidíme, že platí  $\varphi(\alpha) = \alpha$
- otázka je, za jaké podmínky bude metoda s tímto předpisem konvergovat

# Iterativní metody pro hledání kořenů

Separace  
kořenů

Metoda  
bisekcí

Metody  
vyšších řádů  
přesnosti

Metoda regula  
falsi

Newtonova  
metoda

Globálně  
konvergující  
metody

Řešení  
systémů  
nelineárních  
rovníc

## Theorem 4

*Nechť platí  $\varphi(\alpha) = \alpha$ ,  $\varphi$  je diferencovatelná na okolí*

$$V = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - \alpha| \leq r\} \equiv \langle \alpha - r, \alpha + r \rangle,$$

*a necht' pro všechna  $x \in V$  je*

$$|\varphi'(x)| \leq K < 1.$$

*Potom posloupnost  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$  daná vztahem*

$$x_{k+1} = \varphi(x_k),$$

*konverguje k  $\alpha$  pro libovolné  $x_0 \in V$ .*

Důkaz.

Video na Youtube

# Iterativní metody pro hledání kořenů

Separace  
kořenů

Metoda  
bisekcí

Metody  
vyšších řádů  
přesnosti

Metoda regula  
falsi

Newtonova  
metoda

Globálně  
konvergující  
metody

Řešení  
systémů  
nelineárních  
rovníc

## Remark 5

*Je-li  $\varphi'(x)$  spojitá na nějakém okolí  $\alpha$ , pak posloupnost  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$  konverguje, je-li  $\varphi'(\alpha) < 1$ .*

## Definition 6

Řekneme, že iterativní metoda daná vztahem  $x_{k+1} = \varphi(x_k)$  má řád konvergence  $m$ , jestliže platí

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq C |x_k - \alpha|^m.$$

Iterativní metody pro hledání  
kořenů

## Remark 7

*Nechť  $\varphi$  má na okolí  $\alpha$  spojitě derivace do řádu  $m$  včetně (tj.  $\varphi \in C^{(m)}(H_\alpha)$ ) a platí*

$$\varphi'(\alpha) = \varphi''(\alpha) = \dots = \varphi^{(m-1)}(\alpha) = 0,$$

*a*

$$\varphi^{(m)}(x) \neq 0,$$

*na  $H_\alpha$ . Pak pro libovolné  $x_k \in H_\alpha$  platí*

$$\begin{aligned} x_{k+1} - \alpha &= \varphi(x_k) - \varphi(\alpha) = \\ &= \varphi'(\alpha)(x_k - \alpha) + \dots + \frac{\varphi^{(m-1)}(\alpha)}{(m-1)!}(x_k - \alpha)^{m-1} \\ &\quad + \frac{\varphi^{(m)}(\xi)}{m!}(x_k - \alpha)^m \\ &= \frac{\varphi^{(m)}(\xi)}{m!}(x_k - \alpha)^m. \end{aligned}$$

# Iterativní metody pro hledání kořenů

Separace  
kořenů

Metoda  
bisekcí

Metody  
vyšších řádů  
přesnosti

Metoda regula  
falsi

Newtonova  
metoda

Globálně  
konvergující  
metody

Řešení  
systémů  
nelineárních  
rovníc

## Remark 8

*Bud' funkce  $f \in C^{(1)}(\mathbb{R})$  a necht'  $f'(\alpha) \neq 0$ . Pak platí:*

$$f(x_k) = \underbrace{f(\alpha)}_{=0} + f'(\xi)(x_k - \alpha)$$

*a tedy*

$$|x_k - \alpha| \leq \frac{|f(x_k)|}{|f'(\xi)|} \leq C |f(x_k)|.$$

*Jako odhad chyby a zároveň kritérium pro zastavení výpočtu proto bereme  $|f(x_k)|$ .*



## Metoda regula falsi

- u této metody definujeme  $x_0 = l_0 = a$ ,  $x'_0 = r_0 = b$
- vytvoříme úsečku mezi body  $(x_0, f(x_0))$  a  $(x'_0, f(x'_0))$
- protože  $f(x_0)$  a  $f(x'_0)$  mají různá znaménka, úsečka musí protnout osu  $x$ , tento průsečík označíme jako  $x_1$
- dále definujeme

$$l_1 := \begin{cases} x_1 & \text{pokud } \text{sign } f(x_1) = \text{sign } f(l_0), \\ l_0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$r_1 := \begin{cases} x_1 & \text{pokud } \text{sign } f(x_1) = \text{sign } f(r_0), \\ r_0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$x'_1 := \begin{cases} l_1 & \text{pokud } \text{sign } f(x_1) = \text{sign } f(r_1), \\ r_1 & \text{jinak} \end{cases}$$

- celý postup pak iterativně opakujeme

## Metoda regula falsi

- rovnice úsečky mezi  $(x_k, f(x_k))$  a  $(x'_k, f(x'_k))$  má tvar

$$y(x) = f(x_k) + \frac{f(x_k) - f(x'_k)}{x_k - x'_k} (x - x_k)$$

- položíme  $y(x) = 0$  a řešíme rovnici

$$0 = f(x_k) + \frac{f(x_k) - f(x'_k)}{x_k - x'_k} (x_{k+1} - x_k)$$

- výsledkem je

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x'_k}{f(x_k) - f(x'_k)} f(x_k)$$

- zobrazení  $\varphi$  má tvar

$$\varphi(x) = x - \frac{x - x'_k}{f(x) - f(x'_k)} f(x)$$

- definujeme

$$l_{k+1} := \begin{cases} x_{k+1} & \text{pokud } \text{sign } f(x_{k+1}) = \text{sign } f(l_k), \\ l_k & \text{jinak} \end{cases}$$

$$r_{k+1} := \begin{cases} x_{k+1} & \text{pokud } \text{sign } f(x_{k+1}) = \text{sign } f(r_k), \\ r_k & \text{jinak} \end{cases}$$

$$x'_{k+1} := \begin{cases} l_{k+1} & \text{pokud } \text{sign } f(x_{k+1}) = \text{sign } f(r_{k+1}), \\ r_{k+1} & \text{jinak} \end{cases}$$

- jinými slovy je  $x'_k$  poslední napočítaný člen s opačným znaménkem než má  $x_k$

## Example 9

Použijte metodu regula falsi pro nalezení kořene polynomu  $x^3 + 4x^2 - 10$  v intervalu  $\langle 1, 2 \rangle$  ( $\alpha \approx 1.3652$ ).

$k$	$l_k$	$r_k$	$f(l_k)$	$f(r_k)$	$x_k$	$x'_k$
0	1.0	2.0	-5.0	14.0	1.0	2.0
1	1.26315789474	2.0	-1.60227438397	14.0	1.26315789474	2.0
2	1.26315789474	1.42906437248	-1.60227438397	1.08737088326	1.42906437248	1.26315789474
3	1.36199163414	1.42906437248	-0.0533917829598	1.08737088326	1.36199163414	1.42906437248
4	1.36513087878	1.42906437248	-0.00163697021424	1.08737088326	1.36513087878	1.42906437248

Separace  
kořenůMetoda  
bisekcíMetody  
vyšších řádů  
přesnostiMetoda regula  
falsiNewtonova  
metodaGlobálně  
konvergující  
metodyŘešení  
systémů  
nelineárních  
rovníc

## Theorem 10

*Nechť platí*

- *existuje otevřené okolí  $H_\alpha$  bodu  $\alpha$  takové, že  $f \in C^{(1)}(H_\alpha)$  tj. na  $H_\alpha$  existuje derivace  $f'$  a je zde spojitá,*
- *$f'(\alpha) \neq 0$ .*

*Pak existuje  $r$  takové, že*

$$V_\alpha \equiv \{x \in \mathbb{R} \mid |x - \alpha| < r\} \subset H_\alpha.$$

*a metoda regula falsi konverguje, pro libovolné  $x_0 \in V_\alpha$  s rychlostí prvního řádu.*

**Důkaz.**

**Video na Youtube**



Separace  
kořenů

Metoda  
bisekcí

Metody  
vyšších řádů  
přesnosti

Metoda regula  
falsi

Newtonova  
metoda

Globálně  
konvergující  
metody

Řešení  
systémů  
nelineárních  
rovníc

- u Newtonovy metody volíme  $x_0 = a$
- pro  $k = 0, 1, \dots$  konstruujeme tečny ke grafu funkce v bodě  $x_k$  a tam, kde se tečna protne s osou  $x$  definujeme nový bod  $x_{k+1}$

- rovnice tečny má tvar

$$y(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)$$

- pro  $y(x) = 0$  dostáváme

$$0 = f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k)$$

# Newtonova metoda

- tedy platí

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

- zobrazení  $\varphi$  má tvar

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

## Example 11

Použijte Newtonovu metodu pro nalezení kořene polynomu  $x^3 + 4x^2 - 10$  v intervalu  $\langle 1, 2 \rangle$  ( $\alpha \approx 1.3652$ ).

$k$	$x_k$	$f(x_k)$	$f'(x_k)$
0	1.0	-5.0	11.0
1	1.45454545455	1.54019534193	19.4381678093
2	1.37530983126	0.16727562303	16.676910046
3	1.36527945857	0.000816527384453	16.5141996685
4	1.36523001461	$1.97484268938 \cdot 10^{-8}$	16.5133990953



## Theorem 12

*Nechť platí*

- *existuje otevřené okolí  $H_\alpha$  bodu  $\alpha$  takové, že  $f \in C^{(1)}(H_\alpha)$  tj. na  $H_\alpha$  existuje derivace  $f'$  a je zde spojitá,*
- *$f'(\alpha) \neq 0$ .*

*Pak existuje  $r$  takové, že*

$$V_\alpha \equiv \{x \in \mathbb{R} \mid |x - \alpha| < r\} \subset H_\alpha.$$

*a Newtonova metoda konverguje, pro libovolné  $x_0 \in V_\alpha$  s rychlostí **prvního** řádu.*

**Důkaz.**

**Video na Youtube**



## Theorem 13

*Nechť platí*

- *existuje otevřené okolí  $H_\alpha$  bodu  $\alpha$  takové, že  $f \in C^{(2)}(H_\alpha)$  tj. na  $H_\alpha$  existuje první a druhá derivace  $f'$  a  $f''$  a jsou zde spojité,*
- *$f'(\alpha) \neq 0$ .*

*Pak existuje  $r$  takové, že*

$$V_\alpha \equiv \{x \in \mathbb{R} \mid |x - \alpha| < r\} \subset H_\alpha.$$

*a Newtonova metoda konverguje, pro libovolné  $x_0 \in V_\alpha$  s rychlostí **druhého** řádu.*

**Důkaz.**

**Video na Youtube**



Separace  
kořenů

Metoda  
bisekcí

Metody  
vyšších řádů  
přesnosti

Metoda regula  
falsi

Newtonova  
metoda

Globálně  
konvergující  
metody

Řešení  
systémů  
nelineárních  
rovníc

## Remark 14

*Newtonova metoda tedy za vhodných podmínek konverguje rychleji, než metoda Regula falsi nebo metoda bisekcí.*

*Vyžaduje ale přesnější počáteční odhad řešení  $x_0$ , tj.  $V_\alpha$  může být výrazně menší než u metody Regula falsi.*

# Newtonova metoda

## Example 15

Bude Newtonova metoda konvergovat v případě těchto dvou úloh?

1  $x^3 = 0$

2  $x^2 = 0$

Separace  
kořenů

Metoda  
bisekcí

Metody  
vyšších řádů  
přesnosti

Metoda regula  
falsi

Newtonova  
metoda

Globálně  
konvergující  
metody

Řešení  
systémů  
nelineárních  
rovníc

## Remark 16

*Pomocí Čebyševovy metody lze odvodit metody ještě vyšších řádů. Ty ale v praxi nejsou příliš užitečné, neboť vyžadují ještě přesnější odhad kořene rovnice a navíc se v něm vyskytují vyšší derivace funkce  $f$ . Kvadratická konvergence Newtonovy metody je v praxi naprosto postačující.*

Separace  
kořenů

Metoda  
bisekcí

Metody  
vyšších řádů  
přesnosti

Metoda regula  
falsi

Newtonova  
metoda

Globálně  
konvergující  
metody

Řešení  
systémů  
nelineárních  
rovníc

## Definition 17

Pod pojmem *globálně konvergující metody* pro řešení nelineárních rovnic budeme rozumět metody, které pro libovolnou volbu počátečního odhadu kořene  $x_0$  buď konvergují nebo algoritmicky selžou.

## Remark 18

*Metody, které jsme si ukázaly, často nekonvergují z jednoho důvodu. Pohybují se sice ve správném směru, ale dělají příliš veliký skok. Tím pádem kořen  $\alpha$  přeskočí a získají nový odhad, který je horší, než ten předchozí. Řešením je, zamyslet se lépe nad velikostí kroku mezi  $x_k$  a  $x_{k+1}$ .*

## Line search algoritmus

---

### Algorithm 1 Line search

---

```
1:  $r_0 = |f(x)|$ 
2: while  $r_0 > \epsilon$  do
3:   if  $f'(x) = 0$  then
4:     return EXIT_FAILURE;
5:   end if
6:    $d = -f(x)/f'(x)$ 
7:    $x_t = x + d$ 
8:   while  $|f(x_t)| \geq |f(x)|$  do
9:      $d = d/2$ 
10:     $x_t = x + d$ 
11:   end while
12:    $x = x_t$ 
13:    $r_0 = |f(x)|$ 
14: end while
```

# Metody pro řešení soustav nelineárních rovnic

## Iterativní metody pro řešení soustav nelineárních algebraických a transcendentních rovnic

### Remark 19

*Mějme reálné funkce reálných proměnných*

*$f_1, \dots, f_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Hledáme řešení soustavy rovnic:*

$$\begin{aligned}f_1(x_1, \dots, x_n) &= 0, \\f_2(x_1, \dots, x_n) &= 0, \\&\vdots \\f_n(x_1, \dots, x_n) &= 0.\end{aligned}$$

*Řešení budeme značit  $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)^T$ . Jeho separace je v tomto případě často ještě obtížnější. Přesto pro naše úvahy budeme předpokládat existenci oblasti  $H \subset \mathbb{R}^n$  (=otevřená souvislá množina) takové, že  $\vec{a} \in H$ .*



# Metody pro řešení soustav nelineárních rovnic

## Remark 20

*Provedeme formální zobecnění Newtonovy metody:*

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} - \left[ \mathbb{J}_{\vec{f}}(\vec{x}^{(k)}) \right]^{-1} \vec{f}(\vec{x}^{(k)}),$$

*kde  $\mathbb{J}_{\vec{f}}(\vec{x}^{(k)})$  je Jacobiho matice tj.*

$$\left( \mathbb{J}_{\vec{f}}(\vec{x}^{(k)}) \right)_{ij} = \frac{\partial f_i(\vec{x}^{(k)})}{\partial x_j}.$$

*resp.*

$$\mathbb{J}_{\vec{f}}(\vec{x}^{(k)}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{x}^{(k)})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(\vec{x}^{(k)})}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\vec{x}^{(k)})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n(\vec{x}^{(k)})}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

# Metody pro řešení soustav nelineárních rovnic

Separace  
kořenů

Metoda  
bisekcí

Metody  
vyšších řádů  
přesnosti

Metoda regula  
falsi

Newtonova  
metoda

Globálně  
konvergující  
metody

Řešení  
systémů  
nelineárních  
rovnic

## Remark 21

*Pro praktické počítání je výhodnější následující tvar*

$$\mathbb{J}_{\vec{f}}(\vec{x}^{(k)}) \left( \vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)} \right) = -\vec{f}(\vec{x}^{(k)}).$$

*Označíme-li  $\Delta\vec{x}^{(k)} = \vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)}$ , lze přepsat metodu do dvou kroků:*

---

### Algorithm 2 Newtonova metoda pro systémy

---

- 1: Vyřeš lineární systém:  $\mathbb{J}_{\vec{f}}(\vec{x}^{(k)}) \Delta\vec{x}^{(k)} = -\vec{f}(\vec{x}^{(k)})$
  - 2: Iteruj:  $\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} + \Delta\vec{x}^{(k)}$
-

# Metody pro řešení soustav nelineárních rovnic

Separace  
kořenů

Metoda  
bisekcí

Metody  
vyšších řádů  
přesnosti

Metoda regula  
falsi

Newtonova  
metoda

Globálně  
konvergující  
metody

Řešení  
systémů  
nelineárních  
rovníc

## Remark 22

*Výhodou je, že jsme výpočet inverzní matice převedli na řešení lineárního systému. K tomu lze použít i některou z iteračních metod. Jelikož systém v prvním kroku nemusí být nutně řešený s maximální přesností, stačí často udělat jen pár iterací a výpočet metody se tím značně urychlí oproti výpočtu inverze matice pomocí Gaussovy eliminace.*

# Metody pro řešení soustav nelineárních rovnic

## Theorem 23

*Bud' funkce  $f \in C^{(1)}(H)$ , kde  $H$  je konvexní oblast. Pak pro každé  $\vec{u}, \vec{v} \in H$  existuje  $\vec{\xi} \in H$  takové, že*

$$f(\vec{u}) - f(\vec{v}) = \nabla f(\vec{\xi})(\vec{u} - \vec{v}).$$

Důkaz.

[Video na Youtube](#)



# Metody pro řešení soustav nelineárních rovnic

## Theorem 24

*Nechť platí*

- *existuje otevřené okolí  $H_{\vec{a}}$  bodu  $\vec{a}$  takové, že  $\vec{f} \in C^{(1)}(H_{\vec{a}})$  tj. na  $H_{\vec{a}}$  existují všechny parciální derivace prvního řádu a jsou zde spojité,*
- $\mathbb{J}_{\vec{f}}(\vec{a})$  *je regulární.*

*Pak existuje  $r$  takové, že*

$$V_{\vec{a}} \equiv \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\vec{x} - \vec{a}| < r \} \subset H_{\vec{a}},$$

*a Newtonova metoda konverguje, pro libovolné  $\vec{x}^{(0)} \in V_{\vec{a}}$  s rychlostí prvního řádu.*

Důkaz.

[Video na Youtube](#)

# Metody pro řešení soustav nelineárních rovnic

## Theorem 25

*Nechť platí*

- existuje otevřené okolí  $H_{\vec{a}}$  bodu  $\vec{a}$  takové, že  $\vec{f} \in C^{(2)}(H_{\vec{a}})$  tj. na  $H_{\vec{a}}$  existují všechny parciální derivace prvního a druhého řádu a jsou zde spojité,*
- $\mathbb{J}_{\vec{f}}(\vec{a})$  je regulární.*

*Pak existuje  $r$  takové, že*

$$V_{\vec{a}} \equiv \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\vec{x} - \vec{a}| < r \} \subset H_{\vec{a}},$$

*a Newtonova metoda konverguje, pro libovolné  $\vec{x}^{(0)} \in V_{\vec{a}}$  s rychlostí **druhého** řádu.*

Důkaz.

[Video na Youtube](#)

# Metody pro řešení soustav nelineárních rovnic

## Remark 26

*I na Newtonovu metodu pro systémy nelineárních rovnic lze aplikovat line search algoritmus. Získáme tak globálně konvergující metodu.*

# Metody pro řešení soustav nelineárních rovnic

## Example 27

Pomocí Newtonovy metody řešte soustavu rovnic:

$$f_1(x, y) = x^3 + 4y^2 + x - y - 4 = 0,$$

$$f_2(x, y) = x^4 + 2y^3 - x + y + 2 = 0,$$

s počátečním odhadem  $\vec{x}^{(0)} = (-1, 1)^T$ .

**Řešení:** (napočítáme jen jednu iteraci)

$$\vec{f}(\vec{x}^{(0)}) = (-3, 7)^T,$$

$$\mathbb{J}_{\vec{f}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 + 1 & 8y - 1 \\ 4x^3 - 1 & 6y + 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{J}_{\vec{f}}(\vec{x}^{(0)}) = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -5 & 7 \end{pmatrix},$$

Řešíme tedy úlohu  $\mathbb{J}_{\vec{f}}(\vec{x}^{(0)})\Delta\vec{x}^{(0)} = -\vec{f}(\vec{x}^{(0)})$ , tj.:

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x^{(0)} \\ \Delta y^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix},$$

Dostáváme  $\Delta\vec{x}^{(0)} = \frac{1}{18}(-2, 17)^T$  a tedy  
 $\vec{x}^{(1)} = \vec{x}^{(0)} + \Delta\vec{x}^{(0)} = \frac{5}{18}(-4, 7)^T$ . Potom je

$$\vec{f}(\vec{x}^{(1)}) = (11.66, 19.06)^T.$$



# Metody pro řešení soustav nelineárních rovnic

Separace  
kořenů

Metoda  
bisekcí

Metody  
vyšších řádů  
přesnosti

Metoda regula  
falsi

Newtonova  
metoda

Globálně  
konvergující  
metody

Řešení  
systémů  
nelineárních  
rovnic

## Shrnutí a otázky:

- metoda bisekcí
- metoda regula falsi
- Newtonova metoda
- jak se při praktických výpočtech liší podmínky konvergence metody regula falsi a Newtonovy metody?
- **jaké jsou výhody a nevýhody metod vyšších řádů?**
- globálně konvergující metody
- Newtonova metoda pro systémy nelineárních rovnic
  - **jak se dá efektivně vyhnout napočítávání inverzní matice?**