Tomáš Oberhuber

Faculty of Nuclear Sciences and Physical Engineering
Czech Technical University in Prague

Polynomiální aproximace

- v numerické matematice často pracujeme s funkcemi, které nelze vyjádřit analyticky
- nelze je tedy vyjádřit přesně, ale lze je alespoň aproximovat
- někdy zase známe některou závislost jen z experimentu tj. známe funkční hodnoty jen v několika bodech
- pro svou jednoduchost se nejčastěji volí polynomiální aproximace

Lagrangeův polynom

- jednou možností by byl Taylorův polynom
- problém je v tom, že ten potřebuje znát derivace poměrně vysokých řádů
- měření derivací experimentálně je ale velmi složité až nemožné
- většinou naměříme pouze funkční hodnoty, ale zato v několika různých bodech
- místo Taylorova polynomu proto použijeme **Lagrangeův polynom**

Lagrangeův polynom

Matematická formulace problému

Remark 1

Buď $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ *funkce jejíž hodnoty známe ve vzájemně různých bodech* $x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n$. *Hledáme polynom* $L_n(x)$ *co nejnižšího stupně tak, aby platilo*

$$L_n(x_i) = f(x_i) \quad \text{pro} \quad \forall i = 0, \ldots, n.$$

Za **vhodných podmínek** *by mohlo platit, že* $L_n(x)$ *bude blízko* $f(x)$ *i v ostatních bodech. Odhadujeme-li hodnotu* f *mezi body* $x_0, \ldots, x_n$, *jde o* **interpolaci** *jinak jde o* **extrapolaci**.

Lagrangeův polynom

Remark 2

Pro $i = 0, \dots, n$ definujeme polynomy

$$l_i = \prod_{j=0, j \neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j},$$

pro které platí

$$l_i(x_j) = \delta_{ij}.$$

Lagrangeův interpolační polynom je definován jako

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x).$$

Lagrangeův polynom

Theorem 3

Buď $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a body $x_0, \ldots, x_n \in D_f$. Pak existuje právě jeden interpolační polynom P stupně n splňující

$$P(x_i) = f(x_i) \quad \text{pro} \quad \forall i = 0, \ldots, n.$$

Lagrangeův polynom

Example 4

Napočítejte Lagrangeův interpolační polynom pro funkci f se znalostí funkčních hodnot $f(-1)=1, f(0)=0, f(1)=1$.

Řešení:

Je tedy $n=2$ a $x_0=-1, x_1=0, x_2=1$.
Dále platí

$$\begin{aligned}
l_0(x) &= \frac{x-x_1}{x_0-x_1}\frac{x-x_2}{x_0-x_2} &= \tfrac{1}{2}x(x-1),\\
l_1(x) &= \frac{x-x_0}{x_1-x_0}\frac{x-x_2}{x_1-x_2} &= -(x+1)(x-1),\\
l_2(x) &= \frac{x-x_0}{x_2-x_0}\frac{x-x_1}{x_2-x_1} &= \tfrac{1}{2}x(x+1).
\end{aligned}$$

a

$$L_2(x)=\frac{1}{2}x(x-1)+0[-(x+1)(x-1)]+\frac{1}{2}x(x+1)=x^2.$$

Example 5

Napočítejte Lagrangeův interpolační polynom pro funkci f se znalostí funkčních hodnot $f(-1)=1, f(0)=1, f(1)=1$.

Lagrangeův polynom

Remark 6

Definice Lagrangeova polynomu není pro výpočet příliš vhodná. Pro každé nové x potřebujeme znovu napočítat $l_i(x)$. Jmenovatele na x nezávisí, ale čitatele ano tj. musíme přepočítat n^2 členů. Ukážeme si, jak tento polynom napočítat efektivněji. Použijeme **Newtonovu interpolační formuli**.

Lagrangeův polynom - Newtonova formule

Definition 7

Buď $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a body $x_0, \ldots, x_n \in D_f$. Poměrné diference (*divided differences*) prvního řádu jsou podíly typu:

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1] &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \\ &\vdots \\ f[x_{n-1}, x_n] &= \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}. \end{aligned}$$

Poměrné diference k-tého řádu jsou podíly typu:

$$f[x_i, \ldots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}.$$

Lagrangeův polynom - Newtonova formule

Poměrné diference napočítáváme po sloupcích v následující tabulce:

$$
\begin{array}{cccccc}
x_0 & f(x_0) & & & & \\
x_1 & f(x_1) & f[x_0,x_1] & & & \\
x_2 & f(x_2) & f[x_1,x_2] & f[x_0,x_1,x_2] & & \\
x_3 & f(x_3) & f[x_2,x_3] & f[x_1,x_2,x_3] & \ddots & \\
x_4 & f(x_4) & f[x_3,x_4] & f[x_2,x_3,x_4] & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots \\
x_{n-4} & f(x_{n-4}) & f[x_{n-5},x_{n-4}] & f[x_{n-6},x_{n-5},x_{n-4}] & & \\
x_{n-3} & f(x_{n-3}) & f[x_{n-4},x_{n-3}] & f[x_{n-5},x_{n-4},x_{n-3}] & & \\
x_{n-2} & f(x_{n-2}) & f[x_{n-3},x_{n-2}] & f[x_{n-4},x_{n-3},x_{n-2}] & & \\
x_{n-1} & f(x_{n-1}) & f[x_{n-2},x_{n-1}] & f[x_{n-3},x_{n-2},x_{n-1}] & & \\
x_n & f(x_n) & f[x_{n-1},x_n] & f[x_{n-2},x_{n-1},x_n] & \ldots & \ldots \quad f[x_0,x_1,\ldots,x_n]
\end{array}
$$

Lagrangeův polynom - Newtonova formule

Theorem 8

Pro poměrné diference k-tého řádu platí

$$f[x_i, \ldots, x_{i+k}] = \sum_{j=i}^{i+k} \frac{f(x_j)}{\prod_{m=i, m\neq j}^{i+k}(x_j - x_m)}.$$

Lagrangeův polynom - Newtonova formule

- pro $n \geq 1$ platí

$$L_n = L_0 + (L_1 - L_0) + (L_2 - L_1) + \ldots (L_n - L_{n-1})$$

- $L_k - L_{k-1}$ jsou polynomy stupně nejvýše k-tého a uzly $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ jsou jeho kořeny
- platí tedy

$$L_k(x) - L_{k-1}(x) = A(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{k-1})$$

- a $A = f[x_0, \ldots, x_k]$ tj.

$$\begin{aligned} L_n(x) \quad = \quad & f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + \\ & f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \ldots + \\ & f[x_0, \ldots, x_n](x - x_0) \ldots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

Lagrangeův polynom - Newtonova formule

Example 9

Pomocí Newtonovy formule napočítejte Lagrangeův interpolační polynom pro funkci f se znalostí funkčních hodnot $f(-1) = 1, f(0) = 0, f(1) = 1$ za předpokladu, že f je dostatečně hladká.

Řešení:

$$
\begin{aligned}
f[x_0, x_1] &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = -1, \\
f[x_1, x_2] &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 1, \\
f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f[x_1, x_2] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0} = 1.
\end{aligned}
$$

A tedy

$$
\begin{aligned}
L_2(x) &= f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\
&= 1 - 1(x - x_0) + 1(x - x_0)(x - x_1) \\
&= 1 - (x + 1) + 1(x + 1)x \\
&= x^2.
\end{aligned}
$$

Lagrangeův polynom - Newtonova formule

```
void dividedDifferences( const double nodes[ n+1 ],
                         const double fx[ n+1 ],
                         double differences[ n+1][ n+1 ] )
{
   for( int i = 0; i <= n; i++ )
      differences[ i ][ 0 ] = fx[ i ];
   for( int j = 1; j <= n; j++ )
   {
      for( int i = j; i <= n; i++ )
         differences[ i ][ j ] =
           ( differences[ i ][ j-1 ] -
             differences[ i-1 ][ j-1 ] ) /
           ( nodes[ i ] - nodes[ i-j ] );
   }
}

double newtonFormula( const double nodes[ n+1 ],
                      const double differences[ n+1 ][ n+1 ],
                      double x )
{
   double value = 0.0, product = 1.0;
   for( int i = 0; i <= n; i++ )
   {
      value = value + differences[ i ][ i ] * product;
      product = product * ( x - nodes[ i ] );
   }
}
```

Lagrangeův polynom - chyba aproximace

Theorem 10

Buď $I_x \subset D_f$ nejmenší interval takový, že $x, x_0, x_1, \ldots, x_n \in I_x$ a f má na I_x derivaci řádu $n+1$. Buď L_n Lagrangeův interpolační polynom příslušný k funkci f a bodům $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Pak existuje $\xi \in I_x$ takové, že

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_n(x),$$

kde

$$\omega_n(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i).$$

Lagrangeův polynom - chyba aproximace

Remark 11

K výpočtu Lagrangeova polynomu nepotřebujeme znát žádnou derivaci funkce f. Pokud ale neexistuje $n+1$ derivace funkce f, pak $L_n(x)$ vůbec nelze považovat za její aproximaci.

Lagrangeův polynom - řád aproximace

Definition 12

Buď H_{x_0} okolí bodu x_0 a funkce $f, g : H_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f aproximuje funkci g na okolí H_{x_0} s přesností řádu r, právě když platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x) - g(x)|}{|x - x_0|^r} = C,$$

kde C je kladná nenulová konstanta.

Lagrangeův polynom - chyba aproximace

Remark 13

Zapíšeme-li chybu ve tvaru

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n),$$

vidíme, že

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} \frac{\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)\right|}{|x-x_0|} &= \\ \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi(x_0))}{(n+1)!}(x_0-x_1)\dots(x_0-x_n)\right| &= C,\end{aligned}$$

a podobně pro $x_1, \dots, x_n$.

Lagrangeův polynom - řád aproximace

To znamená, že:

- Lagrangeův polynom je **dobrou aproximací funkce** f **jen na určitých okolích bodů** x_i**.**
- Lagrangeův polynom na těchto okolích aproximuje fci. f **s přesností prvního řádu nezávisle na volbě** n**.**
- Volba **vyššího** n má smysl jen tehdy, pokud je $\left|f^{(n+1)}(x)\right| = 0$ nebo alespoň velmi malé na I_x. Pak je f **buď polynom nebo funkce blízká polynomu**. Pokud ne, dochází k tzv. **Rungovu jevu**.

Lagrangeův polynom - Rungův jev

Remark 14

Rungův jev popisuje situaci, kdy při konstrukci Lagrangeova polynomu volíme stále více uzlových bodů a tím pádem i vyšší n. Očekávali bychom, že chyba interpolace se bude zmenšovat, ale může tomu být právě naopak. Tento jev je způsoben členem $\omega_n(x)$ *ve výrazu pro chybu interpolace a jde o výrazné oscilace Lagrangeova polynomu blízko krajních uzlů* x_0 *a* x_n.

Lagrangeův polynom - Rungův jev

Example 15

Mějme funkci

$$f = \frac{1}{1 + 25x^2}$$

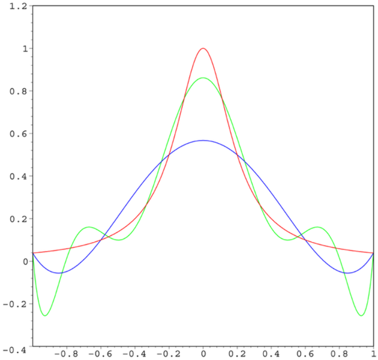
na intervalu $< -1, 1 >$ a ekvidistantně rozložené uzly $x_0, x_1, \ldots x_n$

$$x_i = \frac{2i}{n} - 1,$$

pro $i = 0, \ldots, n$. Lze ukázat, že platí

$$\lim_{n \to \infty} \left(\max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x) - L_n(x)| \right) = +\infty$$

Lagrangeův polynom - Rungův jev



- červeně je zobrazena původní funkce f
- modře je zobrazen polynom $L_5(x)$
- zeleně je zobrazen polynom $L_9(x)$

Lagrangeův polynom

Jsme ve sporné situaci:

- Lagrangeův polynom je obecně dobrou aproximací pouze na okolích zadaných uzlů $x_0, \ldots x_n$.
- Přidáním dodatečných uzlů se ale zvýší n a díky Rungovu jevu se celková chyba aproximace může zvýšit.

Řešením je **interpolace po částech**, kdy fci. f na daném intervalu aproximujeme několika Lagrangeovy polynomy nižších stupňů než n.

Lagrangeův polynom - interpolace po částech

- interval $\langle x_0, x_n \rangle$ rozdělíme na několik podintervalů
- na každém podintervalu konstruujeme Lagrangeův polynom jen s pomocí uzlů x_i, které se nachází v daném podintervalu
- pokud jsou krajní body podintervalů tvořeny některými ze zadaných uzlů a pokud na podintervalech konstruujeme polynom alespoň prvního řádu, je výsledkem aproximace spojitou funkcí, obecně však ne diferencovatelnou

Chceme-li provádět hladší navazování, je potřeba použít tzv. **Hermitovy polynomy**.

Hermitova-Birkoffova interpolace

Definition 16

Mějme funkci $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, která má na intervalu $I \subset D_f$ alespoň M derivací. Mějme vzájemně různé uzly $x_0, \ldots, x_n \in I$ a mějme dány

$$f^{(k)}(x_i),$$

pro $i = 0, \ldots n$, $k = 0, \ldots, m_i$, kde $m_i \in \mathbb{N}$ a $m_i \leq M$. Definujme číslo $N = \sum_{i=1}^{n}(m_i + 1)$. Pak existuje právě jeden polynom stupně $N - 1$ zvaný **Hermitův interpolační polynom**, který splňuje

$$H_{N-1}^{(k)}(x_i) = f^{(k)}(x_i),$$

pro $i = 0, \ldots, n$ a $k = 0, \ldots, m_i$.

Hermitova-Birkoffova interpolace

Remark 17

Polynom $H^{(k)}_{N-1}$ je definován jako

$$H_{N-1}(x) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{m_i} f^{(k)}(x_i) L_{ik}(x),$$

kde L_{ik} je **Hermitův charakteristický polynom** *stupně $N-1$, pro který platí*

$$\frac{d^p}{dx^p} L_{ik}(x_j) = \begin{cases} 1 & i = j \wedge k = p \\ 0 & jinak \end{cases},$$

a je definován jako

$$L_{ij}(x) = l_{ij}(x) - \sum_{k=j+1}^{m_i} l^{(k)}_{ij}(x_i) L_{ik}(x),$$

a

$$l_{ij}(x) = \frac{(x - x_j)^j}{j!} \prod_{k=0, k \neq i}^{n} \left(\frac{x - x_k}{x_i - x_k} \right)^{m_k + 1}.$$

Hermitova-Birkoffova interpolace

Theorem 18

Buď $x \in \mathbb{R}$, I_x buď nejmenší interval obsahující uzly $x_0, \ldots, x_n$ a bod x. Nechť f má na intervalu I_x derivace do řádu N. Pak pro chybu interpolace platí,

$$f(x) - H_{N-1}(x) = \frac{f^{(N)}(\xi)}{N!}\Omega_N(x),$$

kde $\xi \in I_x$, $\Omega_N(x) = (x - x_0)^{m_0+1} \ldots (x - x_n)^{m_n+1}$.

Interpolace v $\mathbb{R}^n$

Remark 19

Mějme body $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ a předpokládejme, že všechna x_i a y_i pro $i = 0, 1, \ldots, n$ jsou různá. Pak můžeme definovat bazické polynomy

$$
\begin{aligned}
l_i^x(x) &= \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \\
l_i^y(y) &= \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{y - y_j}{y_i - y_j}.
\end{aligned}
$$

Lagrangeův interpolační polynom pak má tvar

$$
L_n(x) = \sum_{i=0, j=0}^{n} f(x_i, y_j) l_i^x(x) l_j^y(y).
$$

Shrnutí a otázky

- Lagrangeův polynom - konstrukce, existence a jednoznačnost
- Newtonova formule
- chyba aproximace
- **Pokud sestrojím polynom $L_4(x)$ k funkci f, která není diferencovatelná, co lze říci o tom, jak $L_4(x)$ aproximuje f?**
- Jaký je řád aproximace funkce f Lagrangeovým polynomem?
- **podle čeho volit stupeň Lagrangeova polynomu**
- **interpolace funkce po částech a navazování Lagrangeových polynomů**
- interpolace s vyšším řádem přesnosti