Tomáš Oberhuber

Faculty of Nuclear Sciences and Physical Engineering
Czech Technical University in Prague

Video na Youtube

1. Richardsonovy iterace
2. Jacobiho metoda
3. Gaussova-Seidelova metoda
4. Super-relaxační metoda
5. Shrnutí a porovnání přímých a iterativních metod

Richardsonovy iterace

- tato metoda je dána předpisem

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} - \theta(\mathbb{A}\vec{x}^{(k)} - \vec{b}),$$

  pro $\theta \in \mathbb{R}$
- parametru θ se říká **relaxační parametr**
- snadno vidíme, že

$$\begin{aligned} \mathbb{H} &= \theta\mathbb{I} \\ \mathbb{B} &= \mathbb{I} - \theta\mathbb{A} \\ \vec{c} &= \theta\vec{b} \end{aligned}$$

Richardsonovy iterace

```
bool RichardsonovyIterace( const Matrix& A,
                           const Vector& b,
                           Vector& x,
                           double theta,
                           double eps )
{
   double normB = norm( b );
   double r = eps + 1.0;
   Vector y;
   while( r > eps )
   {
      /****
       * Richardsonovy iterace
       */
      r = 0.0;
      for( int i = 0; i < n; i++ )
      {
         double r_i = b[ i ];
         for( int j = 0; j < n; j++ )
            r_i = r_i - A[ i ][ j ] * x[ j ];
         y[ i ] = x[ i ] - theta * r_i;
         r = r + r_i * r_i;
      }

      /****
       * Kopirovani y do x
       */
      for( int i = 0; i < n; i++ )
         x[ i ] = y[ i ];

      /****
       * Vypocet rezidua
       */
      r = sqrt( r ) / normB;
   }
}
```

Richardsonovy iterace
Jacobiho metoda
Gaussova-Seidelova metoda
Super-relaxační metoda
Shrnutí a porovnání přímých a iterativních metod

Richardsonovy iterace

Example 1

```
stationary-solver --method richardson \
                  --relaxation 0.5 \
                  --input-file data/matrix-pd.mtx
stationary-solver --method richardson \
                  --relaxation 1.0 \
                  --input-file data/matrix-pd.mtx
stationary-solver --method richardson \
                  --relaxation 1.5 \
                  --input-file data/matrix-pd.mtx
stationary-solver --method richardson \
                  --relaxation 2.0 \
                  --input-file data/matrix-pd.mtx
```

Richardsonovy iterace

Theorem 2

Je-li $\mathbb{A}$ hermitovská a PD, pak metoda Richardsonových iterací konverguje, právě když

$$\frac{2}{\theta}\mathbb{I} > \mathbb{A} > 0.$$

Konvergence je navíc monotónní vzhledem k vektorové normě $\|\cdot\|_A$.

Důkaz.

Video na Youtube □

Remark 3

Pro hermitovskou a PD matici $\mathbb{A}$ metoda konverguje pro

$$\theta < \frac{2}{\rho\left(\mathbb{A}\right)}.$$

Jacobiho metoda

- navrhl ji Carl Gustav Jakob Jacobi (1845)
- u Jacobiho metody napočítáváme i-tou složku vektoru $\vec{x}^{(k+1)}$ z vektoru $\vec{x}^{(k)}$ tak, aby byla splněna i-tá rovnice soustavy tj.

$$
\begin{aligned}
x_i^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{ii}} \Big(b_i - a_{i1} x_1^{(k)} - a_{i2} x_2^{(k)} - \ldots \\
&\quad - a_{i,i-1} x_{i-1}^{(k)} - a_{i,i+1} x_{i+1}^{(k)} - \ldots - a_{in} x_n^{(k)} \Big),
\end{aligned}
$$

pro $i = 1, \ldots, n$.

Jacobiho metoda

```
bool JacobihoMetoda( const Matrix& A,
                     const Vector& b,
                     Vector& x,
                     double eps )
{
   double normB = norm( b );
   double r = eps + 1.0;
   Vector y;
   while( r > eps )
   {
      /****
       * Jacobiho iterace
       */
      for( int i = 0; i < n; i++ )
      {
         double s = 0.0;
         for( int j = 0; j < n; j++ )
            if( j != i )
               s = s + A[ i ][ j ] * x[ j ];
         y[ i ] = ( b[ i ] - s ) / A[ i ][ i ];
      }
      /****
       * Vypocet rezidua
       */
      r = 0.0;
      for( int i = 0; i < n; i++ )
      {
         double Ax_i = 0.0;
         for( int j = 0; j < n; j++ )
            Ax_i = Ax_i + A[ i ][ j ] * y[ j ];
         r = r + ( Ax_i - b_i ) * ( Ax_i - b_i );
         x[ i ] = y[ i ];
      }
      r = sqrt( r ) / normB;
   }
}
```

Jacobiho metoda

Example 4

```
stationary-solver --method jacobi \
                  --input-file data/matrix-pd.mtx
```

Jacobiho metoda - numerická analýza

- matici $\mathbb{A}$ přepíšeme ve tvaru

$$\mathbb{A} = \mathbb{D} - \mathbb{L} - \mathbb{R},$$

kde

- $\mathbb{D}$ je diagonála matice $\mathbb{A}$
- $\mathbb{L}$ jsou záporně vzaté prvky matice $\mathbb{A}$ **pod** diagonálou
- $\mathbb{R}$ jsou záporně vzaté prvky matice $\mathbb{A}$ **nad** diagonálou

Jacobiho metoda - numerická analýza

- pro numerickou analýzu lze tuto metodu maticově zapsat takto

$$
\begin{aligned}
\vec{x}^{(k+1)} &= \mathbb{D}^{-1}\left[\vec{b} + (\mathbb{D} - \mathbb{A})\,\vec{x}^{(k)}\right] \\
&= \mathbb{D}^{-1}(\mathbb{L} + \mathbb{R})\,\vec{x}^{(k)} + \mathbb{D}^{-1}\vec{b} \\
&= \left(\mathbb{I} - \mathbb{D}^{-1}\mathbb{A}\right)\vec{x}^{(k)} + \mathbb{D}^{-1}\vec{b}
\end{aligned}
$$

Jacobiho metoda - numerická analýza

- vidíme tedy, že

$$
\begin{aligned}
\mathbb{B} &= \mathbb{I} - \mathbb{D}^{-1}\mathbb{A} \\
\vec{c} &= \mathbb{D}^{-1}\vec{b} \\
\mathbb{H} &= \mathbb{D}^{-1}
\end{aligned}
$$

Jacobiho metoda - numerická analýza

Theorem 5

Nutnou a postačující podmínkou pro to, aby Jacobiho metoda konvergovala pro libovolné $\vec{x}^{(0)}$ je

$$\rho\left(\mathbb{D}^{-1}(\mathbb{L}+\mathbb{R})\right) < 1.$$

Postačující podmínkou je

$$\left\|\mathbb{D}^{-1}(\mathbb{L}+\mathbb{R})\right\| < 1,$$

v libovolné maticové normě $\|\cdot\|$.

Jacobiho metoda - numerická analýza

Definition 6

Maticí s převládající diagonálou nazveme takovou matici, pro kterou platí

$$\sum_{j=1,\dots,n;j\neq i} \left|a_{ij}\right| < \left|a_{ii}\right|,$$

pro všechna $i = 1, \dots n$.

Jacobiho metoda - numerická analýza

Theorem 7

Má-li matice $\mathbb{A}$ převládající diagonálu, pak Jacobiho metoda konverguje k řešení soustavy rovnic $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$ pro libovolnou volbu $\vec{x}^{(0)}$.

Důkaz.

Video na Youtube □

Theorem 8

Je-li matice $\mathbb{A}$ hermitovská a PD, pak Jacobiho metoda konverguje k řešení soustavy rovnic $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$ pro libovolnou volbu $\vec{x}^{(0)}$, právě když platí $2\mathbb{D} > \mathbb{A} > 0$ tj. $\mathbb{A}$ a $2\mathbb{D} - \mathbb{A}$ jsou pozitivně definitní. Konvergence je navíc monotónní vzhledem k vektorové normě $\|\cdot\|_A$.

Důkaz.

Video na Youtube □

Jacobiho metoda - příklad

Example 9

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

k	$\vec{x}^{(k)}$	$\vec{r}^{(k)}$
0	$(0,0,0)$	$(1,0,1)$
1	$(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$	$(0,1,0)$
2	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$
3	$(\frac{3}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4})$	$(0,\frac{1}{2},0)$
4	$(\frac{3}{4},\frac{3}{4},\frac{3}{4})$	$(\frac{1}{4},0,\frac{1}{4})$
5	$(\frac{7}{8},\frac{3}{4},\frac{7}{8})$	$(0,\frac{1}{4},0)$
6	$(\frac{7}{8},\frac{7}{8},\frac{7}{8})$	$(\frac{1}{8},0,\frac{1}{8})$
...	...	...

Gaussova-Seidelova metoda

- roku 1823 jí popsal Carl Friedrich Gauss v jednom dopise svému studentovi Ch.L.Gerlingovi
- roku 1874 jí publikoval Phillip Ludwig von Seidel

Gaussova-Seidelova metoda

- narozdíl od Jacobiho metody, tato metoda využívá k napočítání nové složky vektoru $\vec{x}_i^{(k+1)}$ již napočítané složky tohoto vektoru tj. $\vec{x}_1^{(k+1)}, \ldots, \vec{x}_{i-1}^{(k+1)}$
- metoda je tedy dána předpisem

$$\begin{aligned} x_i^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{ii}} \Big(b_i - a_{i1} x_1^{(k+1)} - a_{i2} x_2^{(k+1)} - \ldots \\ &\quad - a_{i,i-1} x_{i-1}^{(k+1)} - a_{i,i+1} x_{i+1}^{(k)} - \ldots - a_{in} x_n^{(k)} \Big), \end{aligned}$$

pro $i = 1, \ldots, n$.

Gaussova-Seidelova metoda

```
bool GaussovaSeidelovaMetoda( const Matrix& A,
                              const Vector& b,
                              Vector& x,
                              double eps )
{
   double normB = norm( b );
   double r = eps + 1.0;
   while( r > eps )
   {
      /****
       * Gaussova-Seidelova iterace
       */

      for( int i = 0; i < n; i++ )
      {
         double s = 0.0;
         for( int j = 0; j < n; j++ )
            if( j != i )
               s = s + A[ i ][ j ] * x[ j ];
         x[ i ] = ( b[ i ] - s ) / A[ i ][ i ];
      }
      /****
       * Vypocet rezidua
       */
      r = 0.0;
      for( int i = 0; i < n; i++ )
      {
         double Ax_i = 0.0;
         for( int j = 0; j < n; j++ )
            Ax_i = Ax_i + A[ i ][ j ] * x[ j ];
         r = r + ( Ax_i - b_i ) * ( Ax_i - b_i );
      }
      r = sqrt( r ) / normB;
   }
}
```

Gaussova-Seidelova metoda

Example 10

```
stationary-solver --method gauss-seidel \
                  --input-file data/matrix-pd.mtx
```

Gaussova-Seidelova metoda - numerická analýza

- pro numerickou analýzu lze tuto metodu maticově zapsat takto

$$
\begin{aligned}
\vec{x}^{(k+1)} &= \mathbb{D}^{-1}\left[\vec{b} + \mathbb{L}\vec{x}^{(k+1)} + \mathbb{R}\vec{x}^{(k)}\right] \\
\mathbb{D}\vec{x}^{(k+1)} - \mathbb{L}\vec{x}^{(k+1)} &= \vec{b} + \mathbb{R}\vec{x}^{(k)} \\
\vec{x}^{(k+1)} &= (\mathbb{D} - \mathbb{L})^{-1}\left[\vec{b} + \mathbb{R}\vec{x}^{(k)}\right] \\
\vec{x}^{(k+1)} &= (\mathbb{D} - \mathbb{L})^{-1}\mathbb{R}\vec{x}^{(k)} + (\mathbb{D} - \mathbb{L})^{-1}\vec{b} \\
\vec{x}^{(k+1)} &= \left[\mathbb{I} - (\mathbb{D} - \mathbb{L})^{-1}\mathbb{A}\right]\vec{x}^{(k)} + \\
&\quad (\mathbb{D} - \mathbb{L})^{-1}\vec{b}
\end{aligned}
$$

Gaussova-Seidelova metoda - numerická analýza

- vidíme tedy, že

$$
\begin{aligned}
\mathbb{B} &= (\mathbb{D} - \mathbb{L})^{-1}\mathbb{R} \\
\vec{c} &= (\mathbb{D} - \mathbb{L})^{-1}\vec{b} \\
\mathbb{H} &= (\mathbb{D} - \mathbb{L})^{-1}
\end{aligned}
$$

Gaussova-Seidelova metoda - numerická analýza

Theorem 11

Nutnou a postačující podmínkou pro to, aby Gaussova-Seidelova metoda konvergovala pro libovolné $\vec{x}^{(0)}$ je

$$\rho\left((\mathbb{D}-\mathbb{L})^{-1}\mathbb{R}\right) < 1.$$

Postačující podmínkou je

$$\left\|(\mathbb{D}-\mathbb{L})^{-1}\mathbb{R}\right\| < 1,$$

v nějaké maticové normě $\|\cdot\|$.

Gaussova-Seidelova metoda - numerická analýza

Theorem 12

Má-li matice $\mathbb{A}$ převládající diagonálu, pak Gaussova-Seidelova metoda konverguje k řešení soustavy $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$ pro libovolnou volbu $\vec{x}^{(0)}$.

Důkaz.

Video na Youtube □

Theorem 13

Je-li matice $\mathbb{A}$ hermitovská a pozitivně definitní, pak Gaussova-Seidelova metoda konverguje k řešení soustavy $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$ pro libovolnou volbu $\vec{x}^{(0)}$. Konvergence je navíc monotónní vzhledem k vektorové normě $\|\cdot\|_A$.

Důkaz.

Video na Youtube □

Gaussova-Seidelova metoda - numerická analýza

Remark 14

Buď $\mathbb{A}$ PD matice taková, že $2\mathbb{D} - \mathbb{A}$ není PD. Potom Jacobiho metoda nekonverguje, ale Gaussova-Seidelova ano. Gaussova-Seidelova metoda je považována ze lepší metodu, než Jacobiho, i když v některých případech Jacobiho metoda konverguje lépe nebo konverguje tehdy, když Gaussova-Seidelova metoda nekonverguje.

Gaussova-Seidelova metoda - příklad

Example 15

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

k	*Jacobi*		*Gauss – Seidel*	
	$\vec{x}^{(k)}$	$\vec{r}^{(k)}$	$\vec{x}^{(k)}$	$\vec{r}^{(k)}$
0	$(0,0,0)$	$(1,0,1)$	$(0,0,0)$	$(1,0,1)$
1	$(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$	$(0,1,0)$	$(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{5}{8})$	$(\frac{3}{4},\frac{5}{8},0)$
2	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$	$(\frac{5}{8},\frac{5}{8},\frac{13}{16})$	$(\frac{3}{8},\frac{3}{16},0)$
3	$(\frac{3}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4})$	$(0,\frac{1}{2},0)$	$(\frac{13}{16},\frac{13}{16},\frac{29}{32})$	$(\frac{3}{16},\frac{3}{32},0)$
4	$(\frac{3}{4},\frac{3}{4},\frac{3}{4})$	$(\frac{1}{4},0,\frac{1}{4})$	$(\frac{29}{32},\frac{29}{32},\frac{61}{64})$	$(\frac{3}{32},\frac{3}{64},0)$
5	$(\frac{7}{8},\frac{3}{4},\frac{7}{8})$	$(0,\frac{1}{4},0)$	$(\frac{61}{64},\frac{61}{64},\frac{125}{128})$	$(\frac{3}{64},\frac{3}{128},0)$
6	$(\frac{7}{8},\frac{7}{8},\frac{7}{8})$	$(\frac{1}{8},0,\frac{1}{8})$	$(\frac{125}{128},\frac{125}{128},\frac{253}{256})$	$(\frac{3}{128},\frac{3}{256},0)$
...	...	...	...	...

Super-relaxační metoda

- David M. Young, Jr., 1950
- je známa zejména pod zkratkou SOR = *Successive Over Relaxation method*
- jde o modifikaci Gaussovy-Seidelovy metody
- metoda funguje velmi dobře zejména na lineární systémy pocházející z metody konečných diferencí pro řešení parabolických nebo eliptických parciálních diferenciálních rovnic

Super-relaxační metoda

- Gaussovu-Seidelovu metodu můžeme přepsat do tvaru

$$\vec{x}_i^{(k+1)} = \vec{x}_i^{(k)} + \Delta \vec{x}_i^{(k)},$$

kde

$$\begin{aligned}\Delta \vec{x}_i^{(k)} &= \frac{1}{a_{ii}} \Big(-a_{i1} \vec{x}_1^{(k+1)} - a_{i2} \vec{x}_2^{(k+1)} - \ldots - a_{i,i-1} \vec{x}_{i-1}^{(k+1)} \\ & \quad -a_{ii} \vec{x}_i^{(k)} - a_{i,i+1} \vec{x}_{i+1}^{(k)} - \ldots - a_{in} \vec{x}_n^{(k)} + \vec{b}_i \Big)\end{aligned}$$

Super-relaxační metoda

- SOR metoda je pak definována jako

$$\vec{x}_i^{(k+1)} = \vec{x}_i^{(k)} + \omega \Delta \vec{x}_i^{(k)},$$

- ω je tzv. relaxační parametr
- je-li $\omega = 1$, dostáváme Gaussovu-Seidelovu metodu
- podobnou modifikaci lze snadno provést i pro Jacobiho metodu

Super-relaxační metoda

```
bool sorMethod( const Matrix& A,
                const Vector& b,
                Vector& x,
                double eps,
                double omega )
{
   double normB = norm( b );
   double r = eps + 1.0;
   while( r > eps )
   {
      /****
       * SOR iterace
       */

      for( int i = 0; i < n; i++ )
      {
         double s = 0.0;
         for( int j = 0; j < n; j++ )
            s = s + A[ i ][ j ] * x[ j ];
         x[ i ] += omega * ( b[ i ] - s ) / A[ i ][ i ];
      }
      /****
       * Vypocet rezidua
       */
      r = 0.0;
      for( int i = 0; i < n; i++ )
      {
         double Ax_i = 0.0;
         for( int j = 0; j < n; j++ )
            Ax_i = Ax_i + A[ i ][ j ] * x[ j ];
         r = r + ( Ax_i - b_i ) * ( Ax_i - b_i );
      }
      r = sqrt( r ) / normB;
   }
}
```

Super-relaxační metoda

Example 16

```
stationary-solver --method sor \
                  --relaxation 1.2 \
                  --input-file data/matrix-pd.mtx
```

Super-relaxační metoda - numerická analýza

- maticově lze metodu zapsat jako

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} + \omega \mathbb{D}^{-1} \left(\mathbb{L}\vec{x}^{(k+1)} - \mathbb{D}\vec{x}^{(k)} + \mathbb{R}\vec{x}^{(k)} + \vec{b} \right)$$

tj.

$$\vec{x}^{(k+1)} = (\mathbb{I} - \omega(\mathbb{D} - \omega\mathbb{L})^{-1}\mathbb{A})\vec{x}^{(k)} + \omega(\mathbb{D} - \omega\mathbb{L})^{-1}\vec{b},$$

tj.

$$\begin{aligned} \mathbb{B}_\omega &= \mathbb{I} - \omega(\mathbb{D} - \omega\mathbb{L})^{-1}\mathbb{A} \\ &= (\mathbb{D} - \omega\mathbb{L})^{-1}\left((1-\omega)\,\mathbb{D} + \omega\mathbb{R}\right), \\ \mathbb{H}_\omega &= \omega(\mathbb{D} - \omega\mathbb{L})^{-1}, \\ \vec{c}_\omega &= \omega(\mathbb{D} - \omega\mathbb{L})^{-1}\vec{b}. \end{aligned}$$

Super-relaxační metoda - numerická analýza

Theorem 17

Nutnou a postačující podmínkou pro to, aby SOR metoda konvergovala pro libovolné $\vec{x}^{(0)}$ je

$$\rho\left(\mathbb{B}_\omega\right) < 1.$$

Postačující podmínkou je

$$\|\mathbb{B}_\omega\| < 1,$$

v některé maticové normě $\|\cdot\|$.

Super-relaxační metoda - numerická analýza

Theorem 18

Pro libovolné $\omega \in \mathbb{R}$ platí

$$\rho\left(\mathbb{B}_\omega\right) \geq |\omega - 1|,$$

a tedy SOR metoda nekonverguje pro $\omega \leq 0$ nebo $\omega \geq 2$.

Důkaz.

Video na Youtube □

Theorem 19

Má-li matice $\mathbb{A}$ převládající diagonálu, pak SOR metoda konverguje k řešení soustavy $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$ pro libovolnou volbu $\vec{x}^{(0)}$ pokud je $0 < \omega \leq 1$.

Důkaz.

Zatím neznám. □

Super-relaxační metoda - numerická analýza

Theorem 20

(Ostrowski): Je-li matice $\mathbb{A}$ hermitovská a pozitivně definitní, pak SOR metoda konverguje k řešení soustavy $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$ pro libovolnou volbu $\vec{x}^{(0)}$ právě když, $0 < \omega < 2$. Konvergence je navíc monotónní vzhledem k vektorové normě $\|\cdot\|_A$.

Důkaz.

Video na Youtube

□

Super-relaxační metoda - numerická analýza

Remark 21

Budeme zkoumat konvergenci SOR metody v závislosti na parametru ω. Kromě konvergence samotné nás bude zajímat i její rychlost, tj. budeme chtít najít ω_0 takové, aby bylo $\rho\left(\mathbb{B}_\omega\right)$ resp. $\|\mathbb{B}_\omega\|$ co nejmenší.

Remark 22

Vliv parametru ω na rychlost konvergence budeme analyzovat pro speciální typ matic tzv. **dvoucyklických, shodně uspořádaných**. *Dá se ukázat, že tyto matice vznikají právě při řešení eliptických nebo parabolických rovnic pomocí metody konečných diferencí.*

Super-relaxační metoda - numerická analýza

Definition 23

Elementární permutační maticí $\mathbb{I}_{ij}$ pro $(1 \leq i, j \leq n)$ nazveme takovou čtvercovou matici n-tého řádu, která má všechny diagonální prvky rovny 1, kromě prvků na i-tém a j-tém řádku, které jsou rovny 0. Mimodiagonální prvky jsou nulové kromě prvků na pozicích (i, j) a (j, i), které jsou rovny 1.

$$
\mathbb{I}_{ij} = \begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & & & \\
& \ddots & & & & & & & & & \\
& & 1 & & & & & & & & \\
& & & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & & & \\
& & & \vdots & 1 & & & \vdots & & & \\
& & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\
& & & \vdots & & & 1 & \vdots & & & \\
& & & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 & & & \\
& & & & & & & & 1 & & \\
& & & & & & & & & \ddots & \\
& & & & & & & & & & 1
\end{pmatrix}
$$

Permutační maticí nazveme každou matici, kterou lze vyjádřit jako součin libovolného počtu elementárních permutačních matic.

Super-relaxační metoda - numerická analýza

- násobením libovolné obdélnikové matice elementární permutační maticí zleva resp. zprava odpovídá prohození *i*-tého a *j*-tého řádku resp. sloupce
- snadno vidíme, že

  $$\mathbb{I}_{ij} = \mathbb{I}_{ij}^{T} = \mathbb{I}_{ij}^{-1}$$

  a tedy elementární permutační matice je symetrická a ortogonální
- ... a tedy i permutační matice je symetrická a ortogonální

Super-relaxační metoda - numerická analýza

Definition 24

Čtvercová matice $\mathbb{C}$ se nazývá **slabě cyklická s indexem 2**, jestliže existuje permutační matice $\mathbb{P}$ taková, že matice $\mathbb{P}\mathbb{C}\mathbb{P}^T$ je blokového tvaru

$$\mathbb{P}\mathbb{C}\mathbb{P}^T = \begin{pmatrix} \theta & \mathbb{M}_1 \\ \mathbb{M}_2 & \theta \end{pmatrix}$$

Super-relaxační metoda - numerická analýza

Definition 25

Nechť $\mathbb{A} = \mathbb{D} - \mathbb{L} - \mathbb{R}$. Matice $\mathbb{A}$ se nazývá **dvoucyklická**, je-li odpovídající Jacobiho matice $\mathbb{B}_J = \mathbb{D}^{-1}(\mathbb{L} + \mathbb{R})$ slabě cyklická s indexem 2.

Definition 26

Dvoucyklická matice $\mathbb{A}$ se nazývá **shodně uspořádaná**, jestliže vlastní číslo matice

$$\alpha \mathbb{D}^{-1}\mathbb{L} + \frac{1}{\alpha}\mathbb{D}^{-1}\mathbb{R}$$

nazávisí na volbě čísla $\alpha \neq 0$.

Super-relaxační metoda - numerická analýza

Theorem 27

Nechť matice $\mathbb{A}$ je dvoucyklická, shodně uspořádaná. Nechť $\lambda \neq 0$ je vlastní číslo matice $\mathbb{B}_\omega$ a $\omega \neq 0$. Nechť μ splňuje rovnici

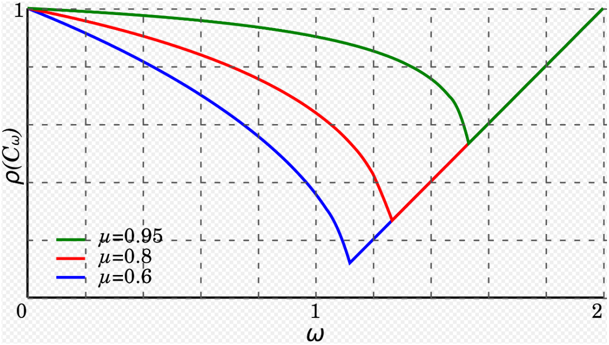
$$(\lambda + \omega - 1)^2 = \omega^2 \mu^2 \lambda.$$

Pak μ je vlastní číslo Jacobiho matice $\mathbb{B}_J$ a naopak, je-li μ vlastní číslo matice $\mathbb{B}_J$, pak příslušné λ je vlastním číslem matice $\mathbb{B}_\omega$. Navíc platí, že pro

$$\omega_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho\left(\mathbb{B}_J\right)^2}},$$

nabývá $\rho\left(\mathbb{B}_\omega\right)$ své minimum a SOR metoda tedy konverguje nejrychleji.

Super-relaxační metoda - numerická analýza



Obrázek: Závislost spektrálního poloměru matice $\mathbb{B}_\omega$ na parametru ω. Převzato z Wikipedie, použito jiné značení $C_\omega \leftrightarrow \mathbb{B}_\omega$.

Shrnutí

Podmínky na matici $\mathbb{A}$ pro konvergenci metod:

	s převládající diagonálou	hermitovská a ...
Jacobi	✓	$2\mathbb{D} > \mathbb{A} > 0$
Gauss-Seidel	✓	$A > 0$
SOR	✓	$A > 0$

Výhody iterativních metod

- jsou-li vhodně použity, jsou mnohem rychlejší než přímé metody založené na GEM
  - GEM má složitost n^3, pro velké matice je téměř nepoužitelná
  - napočítání nového $\vec{x}^{(k)}$ je založeno na násobení matice a vektoru nebo velice podobné operaci, která má složitost n^2
  - v praxi se často podaří, že dobrou aproximaci řešení získáme po pár iteracích nehledě na velikost matice

Výhody iterativních metod

Iterativní metody dokáží lépe využít vlastností řídkých matic.

- při šikovném uložení řídkých matic může mít násobení matice a vektoru ještě menší náročnost, než n^2
- modifikace GEM pro obecné řídké matice je možná, ale algoritmicky velmi složitá
- při aplikaci GEM na řídkou matici může vzniknout mnoho nových nenulových prvků a narůst tak nároky na paměť
- iterativní metody nemění samotnou maticí $\mathbb{A}$, díky tomu jsou snažší na implementaci
- v některých situacích ani nemáme matici $\mathbb{A}$ explicitně uloženou v paměti, pak je GEM nemožné použít

Výhody iterativních metod

- iterativní metody dokážou velice efektivně využít znalosti přibližného řešení, konvergují pak velice rychle
- v případě GEMu je nám jakýkoliv odhad řešení k ničemu

Nevýhody iterativních metod

- většina z nich nedá ani teoreticky přesné řešení po konečném počtu kroků
- musíme umět rozhodnout, kdy zastavit napočítávání dalších iterací $\vec{x}^{(k)}$
- počet nutných iterací silně závisí na konkrétní matici a tím pádem i doba výpočtu, u GEM doba výpočtu na samotné matici téměř nezávisí
- vyšetřování konvergence je často velice složité
    - modifikovaná GEM funguje pro libovolnou regulární matici

Výpočetní příklad

Example 28

Pomocí programu `stationary-solver` otestujte jednotlivé metody.

- výhoda stacionárních metod oproti GEM jsou vidět na PD matici `gr_30_30.mtx`
- špatná konvergence na PD matici `bcsstk01.mtx`
- indefinitní matice `pores_1.mtx`

Shrnutí

- konvergence stacionárních metod, apriorní a aposteriorní odhady chyb
- **Jacobiho, Gaussova-Seidelova a SOR metoda**
  - odvození, maticový tvar (matice $\mathbb{B}, \mathbb{H}$), konvergence
- **porovnání přímých a iteračních metod pro řešení lineárních soustav rovnic**
  - podle čeho byste se rozhodli, kterou třídu metod použijete?