Tomáš Oberhuber

Faculty of Nuclear Sciences and Physical Engineering
Czech Technical University in Prague

Video na Youtube

Částečný problém vlastních čísel

- výpočet kompletního spektra je velmi náročná úloha
- často nám stačí nalézt třeba jen jedno, v absolutní hodnotě největší vlastní číslo
- mluvíme pak o částečném problému vlastních čísel
- pro tento účel se používá hlavně **mocninná metoda**

Částečný problém vlastních čísel

Poznámka

V této části budeme používat zjednodušené pojmy:

- *největší vlastní číslo* $\equiv$ v absolutní hodnotě největší vlastní číslo
- *největší vlastní vektor* $\equiv$ libovolný vlastní vektor příslušející k v absolutní hodnotě největšímu vlastnímu číslu

Vlastní vektor

Mějme matici $\mathbb{A}$

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & \\ & 2 \end{pmatrix}.$$

Pak

$$\vec{x}^{(k)} = \mathbb{A}^k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^k & \\ & 2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^k \\ 2^k \end{pmatrix}$$

a

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{3^k} \vec{x}^{(k)} = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{3^k} \begin{pmatrix} 3^k \\ 2^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

což je vlastní vektor příslušející k vlastnímu číslu 3.

Vlastní vektor

- bude-li matice $\mathbb{A}$ obecná a ne diagonální, byl by výpočet $\mathbb{A}^k$ velmi náročný
- navíc nás zajímá její aplikace jen na jeden vektor $\vec{x}^{(0)} = (1,1)^T$
- výpočet k-té mocniny nahradíme následující vektorovou posloupností

$$\vec{x}^{(k+1)} = \mathbb{A}\vec{x}^{(k)}$$

- pak platí, že

$$\vec{x}^{(k)} = \mathbb{A}^k\vec{x}^{(0)}$$

Vlastní vektor

- obecně pak pro $\vec{x}^{(0)} = (x_1, x_2)^T$ dostáváme

$$\vec{x}^{(k)} = \mathbb{A}^k \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^k & \\ & 2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^k x_1 \\ 2^k x_2 \end{pmatrix}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{3^k} \vec{x}^{(k)} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{3^k} \begin{pmatrix} 3^k x_1 \\ 2^k x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

- je-li $x_1 \neq 0$, opět dostáváme největší vlastní vektor

Vlastní vektor

- vidíme tedy, že je důležité, aby **první složka** vektoru $\vec{x}^{(0)} = (x_1, x_2)^T$ byla **nenulová**, jinak by limitní vektor byl **nulový**
- jinými slovy $\vec{x}^{(0)}$ musí mít nenulový průmět do směru největšího vlastního vektoru

Vlastní vektor

- dělením číslem 3^k jsme dělali proto, aby vzniklá posloupnost $\vec{x}^{(k)}$ konvergovala
- jinak bychom dostali posloupnost vektorů, které se sice stáčí do směru největšího vlastního vektoru, ale jejich velikost roste do nekonečna
- teoreticky by to možná nemuselo vadit, ale v aritmetice s konečnou přesností by snadno došlo k přetečení maximálního nebo minimálního exponentu
- obecněji můžeme provádět dělení největší složkou výsledného vektoru
- dostáváme tak tzv. *mocninnou metodu*

Mocninná metoda

- tato metoda konstruuje následující posloupnosti:

$$
\begin{aligned}
\vec{y}^{(k+1)} &= \mathbb{A}\vec{x}^{(k)}, \\
l_{k+1} &= argmax_{i=1,\ldots,n}|y_i^{(k+1)}|, \\
\rho_{k+1} &= y_{l_{k+1}}^{(k+1)}, \\
\vec{x}^{(k+1)} &= \frac{1}{\rho_{k+1}}\vec{y}^{(k+1)}.
\end{aligned}
$$

- za vhodných předpokladů $\vec{x}^{(k)}$ konverguje k největšímu vlastnímu vektoru a ρ_k k největšímu vlastnímu číslu

Mocninná metoda

Example 1

- buď opět

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & \\ & 2 \end{pmatrix}, \vec{x}^{(0)} = (1,1)^T.$$

- pak

k	$\vec{y}^{(k+1)}$	l_{k+1}	ρ_{k+1}	$\vec{x}^{(k+1)}$
0	$(3,2)^T$	1	3	$(1,\frac{2}{3})^T$
1	$(3,\frac{4}{3})^T$	1	3	$(1,\frac{4}{9})^T$
2	$(3,\frac{8}{9})^T$	1	3	$(1,\frac{8}{27})^T$
3	$(3,\frac{16}{27})^T$	1	3	$(1,\frac{16}{81})^T$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	$(3,\frac{2^{i+1}}{3^i})^T$	1	3	$(1,(\frac{2}{3})^{i+1})^T$

Mocninná metoda

Example 2

- nyní změníme $\vec{x}^{(0)}$

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & \\ & 2 \end{pmatrix}, \vec{x}^{(0)} = (0,1)^T.$$

- pak

k	$\vec{y}^{(k+1)}$	l_{k+1}	ρ_{k+1}	$\vec{x}^{(k+1)}$
0	$(0,2)^T$	2	2	$(0,1)^T$
1	$(0,2)^T$	2	2	$(0,1)^T$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	$(0,2)^T$	2	2	$(0,1)^T$

Mocninná metoda

- metoda generuje konstantní posloupnost nejmenšího vlastního čísla a příslušného vlastního vektoru
- stalo se to proto, že za počáteční vektor $\vec{x}^{(0)}$ jsme zvolili jiný než největší vlastní vektor
- pokud by $\mathbb{A}$ byla větší matice a my zvolili za $\vec{x}^{(0)}$ jiný vlastní vektor, stalo by se to samé
- ve výsledku tak dostáváme nějaký vlastní vektor podle volby $\vec{x}^{(0)}$, ale nevíme jaký
- to ale není to, co chceme - nás zajímá největší vlastní číslo a příslušný vlastní vektor
- problém nastává, když $\vec{x}^{(0)}$ má **nulový průmět do směru "největšího vlastního vektoru"** a metoda tedy nemá šanci ho v daném směru protahovat

Mocninná metoda

Example 3

- uvažme tento příklad

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & \\ & 2 \end{pmatrix}, \vec{x}^{(0)} = (\epsilon, 1)^T.$$

- pak

k	$\vec{y}^{(k+1)}$	l_{k+1}	ρ_{k+1}	$\vec{x}^{(k+1)}$
0	$(3\epsilon, 2)^T$	2	2	$(\frac{3}{2}\epsilon, 1)^T$
1	$(\frac{9}{2}\epsilon, 2)^T$	2	2	$(\frac{9}{4}\epsilon, 1)^T$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$i-1$	$(\frac{3^i}{2^{i-1}}\epsilon, 2)^T$	2	2	$(\frac{3^i}{2^i}\epsilon, 1)^T$
i	$(\frac{3^{i+1}}{2^i}\epsilon, 2)^T$	1	$\frac{3^{i+1}}{2^i}\epsilon$	$(1, \frac{2^i}{3^{i+1}}\epsilon)^T$
$i+1$	$(3, \frac{2^{i+1}}{3^{i+1}}\epsilon)$	1	3	$(1, \frac{2^{i+1}}{3^{i+2}}\epsilon)^T$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

- zde i je takové, že $\frac{3^{i+1}}{2^i}\epsilon > 2$

Mocninná metoda

- vidíme, že stačí, aby průmět $\vec{x}^{(0)}$ do směru největšího vlastního vektoru byl i **velice malý**
- toto v praxi **u reálných úloh zajistí zaokrouhlovací chyby**
- navíc, pokud budeme $\vec{x}^{(0)}$ volit náhodně, pak je nulová pravděpodobnost trefit vektor s nulovým průmětem do největšího vlastního vektoru

Mocninná metoda

- buď $\mathbb{A}$ hermitovská, tj. $\mathbb{A} = \mathbb{U}\mathbb{D}\mathbb{U}^*$, kde
$$\mathbb{D} = diag\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$$
a platí $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|$
- platí
$$\mathbb{A}\mathbb{U} = \mathbb{U}\mathbb{D} = (\lambda_1 \vec{u}^{(1)}, \dots, \lambda_n \vec{u}^{(n)})$$
- tedy $\vec{u}^{(1)}, \dots, \vec{u}^{(n)}$ jsou ON vlastní vektory
- dále
$$\mathbb{A}^k \vec{x} = \mathbb{U}\mathbb{D}^k\mathbb{U}^* \vec{x} = \mathbb{U}\mathbb{D}^k \vec{v},$$
kde $\vec{v} = \mathbb{U}^* \vec{x}$.
- $\vec{v}$ je tedy vektor $\vec{x}$ transformovaný do báze vlastních vektorů matice $\mathbb{A}$ tj. $\vec{u}^{(1)}, \dots, \vec{u}^{(n)}$
- aby metoda dobře fungovala, je opět potřeba, aby průmět do největšího vlastního vektoru $\vec{u}^{(1)}$ byl nenulový a tedy $v_1 \neq 0$

Mocninná metoda

- pak bude platit

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\lambda_1^k}\mathbb{A}^k\vec{x}=\lim_{k\to\infty}\mathbb{U}\begin{pmatrix}\frac{\lambda_1^k}{\lambda_1^k} & & & \\ & \frac{\lambda_2^k}{\lambda_1^k} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{\lambda_n^k}{\lambda_1^k}\end{pmatrix}\vec{v}=$$

$$=\mathbb{U}\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0\end{pmatrix}\vec{v}=\mathbb{U}\begin{pmatrix}v_1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}=v_1\vec{u}^{(1)}$$

- dělení λ_1 místo ρ_k jsme zde dělali pro zjednodušení příkladu

Mocninná metoda

- v příkladu 3 jsme ukázali, že pokud se l_k nemění, ρ_k dává odhad největšího vlastního čísla
- pokud by se posloupnost l_k neustalovala, lze odhad vlastního čísla získat z odhadu vlastního vektoru
- je-li $\vec{x}^{(k)}$ odhad vlastního vektoru, pak platí

$$\mathbb{A}\vec{x}^{(k)} = \vec{y}^{(k+1)} \approx \lambda_1 \vec{x}^{(k)},$$

a tedy

$$\begin{aligned} y_1^{(k+1)} &= c_1 x_1^{(k)} \\ y_2^{(k+1)} &= c_2 x_2^{(k)} \\ &\vdots \\ y_n^{(k+1)} &= c_n x_n^{(k)} \end{aligned}$$

- každé z čísel $c_1, \ldots, c_n$ je aproximace λ_1, můžeme si vybrat jedno z nich nebo třeba průměrnou hodnotu

Mocninná metoda

Shrnutí mocninné metody pro diagonální nebo hermitovské matice:

- metoda **exponenciálně** zesiluje efekt jednotlivých vlastních čísel a vektorů
- tento efekt se zobrazuje skrze vektor $\vec{x}^{(0)}$
- aby metoda správně našla největší vlastní vektor musí být průmět $\vec{x}^{(0)}$ do směru největšího vlastního vektoru nenulový
- v takovém případě ani nemůže nastat dělení nulou, to by nastalo jen v případě, že $\vec{x}^{(0)} = 0$

Mocninná metoda stejným způsobem funguje i pro obecnější třídu matic, jak si následně ukážeme.

Mocninná metoda

Theorem 4

Vektor $\vec{x}^{(k)}$ z mocninné metody lze vyjádřit takto

$$\vec{x}^{(k)} = \frac{1}{\rho_1 \rho_2 \dots \rho_k} \mathbb{A}^k \vec{x}^{(0)}.$$

Důkaz.

Video na Youtube $\square$

Remark 5

Pokud $\rho_k \to \lambda_1$, pak platí

$$\rho_1 \rho_2 \dots \rho_k \approx \lambda_1^k.$$

Mocninná metoda

Theorem 6

Nechť matice $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ má jedno v absolutní hodnotě největší vlastní číslo λ jednonásobné nebo vícenásobné se stejnou algebraickou i geometrickou násobností a $\vec{t}^{(1)}, \ldots, \vec{t}^{(r)}$ jsou příslušné vlastní vektory. Nechť matice $\mathbb{T}$ převádí $\mathbb{A}$ do Jordanova tvaru, tj.

$$\mathbb{A} = \mathbb{T}^{-1} \mathbb{J}_{\mathbb{A}} \mathbb{T}$$

tak, že λ se vyskytuje na prvních r řádcích $\mathbb{J}_{\mathbb{A}}$. Pak pro libovolné $\vec{x}^{(0)}$ takové, že alespoň jedna z prvních r složek vektoru $\mathbb{T}\vec{x}^{(0)}$ je nenulová, platí, že v mocninné metodě konverguje posloupnost ρ_k k vlastnímu číslu λ a posloupnost $\vec{x}^{(k)}$ k příslušnému vlastnímu vektoru.

Důkaz.

Video na Youtube

Mocninná metoda

Theorem 7

Nechť matice $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ má dvě v absolutní hodnotě největší vlastní čísla $\lambda_1, -\lambda_1$ s opačným znaménkem. Nechť $\vec{t}^{(1)}, \vec{t}^{(2)}$ jsou příslušné vlastní vektory. Nechť matice $\mathbb{T}$ převádí $\mathbb{A}$ do Jordanova tvaru, tj.

$$\mathbb{A} = \mathbb{T}^{-1} \mathbb{J}_{\mathbb{A}} \mathbb{T}$$

tak, že $\pm\lambda$ se vyskytuje na prvních dvou řádcích $\mathbb{J}_{\mathbb{A}}$. Pak pro libovolné $\vec{x}^{(0)}$ takové, že alespoň jedna z prvních dvou složek vektoru $\mathbb{T}\vec{x}^{(0)}$ je nenulová, platí, že v mocninné metodě konverguje posloupnost $\sqrt{\rho_{2k}\rho_{2k+1}}$ k absolutní hodnotě největších vlastních čísel a posloupnost $\mathbb{A}\vec{x}^{(2k)} + \lambda_1\vec{x}^{(2k)}$ k vlastnímu vektoru příslušejícímu k vlastnímu číslu λ_1 a posloupnost $\mathbb{A}\vec{x}^{(2k)} - \lambda_1\vec{x}^{(2k)}$ k vlastnímu vektoru příslušejícímu k vlastnímu číslu $-\lambda_1$.

Mocninná metoda

- mocninná metoda je implementována v programu `power-method`
  - `--input-file` – vstupní soubor s maticí
  - `--eigenvalue largest/smallest` – jaké vlastní číslo hledáme
  - `--initial-value v` – nastavení vektoru $\vec{x}^{(0)}$
  - `--max-iterations n` – maximální možný počet provedených iterací
  - `--convergence-residue r` – hodnota kritéria pro zastavení výpočtu
  - `--verbose n`
    - nastavuje úroveň vypisovaných informací v průběhu výpočtu

Mocninná metoda

Remark 8

K napočítání samotného vlastního vektoru stačí konstruovat tzv. **Krylovovu posloupnost** $\vec{x}^{(0)}, \mathbb{A}\vec{x}^{(0)}, \mathbb{A}^2\vec{x}^{(0)}, \ldots$ *a dělení číslem* ρ_k *není nutné, je dobré jen pro lepší numerickou stabilitu.*

Remark 9

Rychlost konvergence závisí na poměru $\frac{\lambda_i}{\lambda_1}$*. Konvergenci můžeme urychlit vhodným posunem spektra o číslo* λ^* *úpravou původní matice na matici* $\mathbb{A} - \lambda^*\mathbb{I}$*. Tím můžeme zmenšit podíl* $\frac{\lambda_i - \lambda^*}{\lambda_1 - \lambda^*}$*. K* ρ *pak musíme přičíst* λ^**.*

Mocninná metoda

Remark 10

Pokud chceme najít v absolutní hodnotě nejmenší vlastní číslo matice $\mathbb{A}$, můžeme použít mocninnou metodu na matici $\mathbb{A}^{-1}$. Nejmenší vlastní číslo pak bude $\frac{1}{\rho}$. Pokud chceme najít vlastní číslo matice $\mathbb{A}$, které je nejblíže zvolenému číslu λ' budeme hledat největší vlastní číslo matice

$$\left(\mathbb{A} - \lambda'\mathbb{I}\right)^{-1}.$$

Hledané číslo pak získáme jako $\frac{1}{\rho} + \lambda'$.

Mocninná metoda

Remark 11

V případě z předchozí poznámky napočítáváme

$$\vec{y}^{(k+1)} = \mathbb{A}^{-1}\vec{x}^{(k)}.$$

Abychom se vyhnuli výpočtu inverze matice $\mathbb{A}$, *převedeme vztah na*

$$\mathbb{A}\vec{y}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)},$$

a řešíme soustavu lineárních rovnic. S výhodou lze využít **iterativní metody** *neboť:*

- *pro* k *malé je zbytečné řešit lineární soustavu s vysokou přesností a stačí proto počítat menší počet iterací*
- *pro* k *velké se po sobě jdoucí vektory* $\vec{y}^{(k)}$ *a* $\vec{y}^{(k+1)}$ *příliš neliší a* $\vec{y}^{(k)}$ *je dobrým odhadem řešení pro soustavu s neznámým vektorem* $\vec{y}^{(k+1)}$

Tento trik, jak se zbavit výpočtu inverze matice, jež pouze aplikujeme na jeden nebo několik vektorů, se v numerice používá velmi často.

Redukční metoda

- tato metoda slouží k odseparování již nalezených vlastních čísel, pokud chceme např. napočítat více než jedno v absolutní hodnotě největší vlastní číslo
- nehodí se ale pro výpočet kompletního spektra, kvůli rychlé ztrátě přesnosti

Remark 12

Buď tedy $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ *a* $\lambda_1 \in \sigma(\mathbb{A})$ *a* $\vec{x}$ *k němu příslušný vlastní vektor. Odvodíme metodu pro výpočet matice* $\mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n-1,n-1}$*, která má všechna vlastní čísla stejná jako* $\mathbb{A}$ *až na* λ_1*, u kterého se sníží násobnost.*

Redukční metoda

- matici $\mathbb{A}$ převedeme do báze, tvořené vektory $\vec{x}, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$
- v této bázi bude matice vypadat takto

$$\mathbb{P}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \vec{q}^t \\ \vec{\theta} & \mathbb{B} \end{pmatrix},$$

kde $\mathbb{P}$ je matice přechodu mezi bázemi.

Redukční metoda

Tvar matice $\mathbb{P}$ je zřejmý, její sloupce tvoří bazické vektory

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} x_1 & & & \\ x_2 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ x_n & & & 1 \end{pmatrix}$$

Inverzní matici k matici $\mathbb{P}$ je taková, která první řádek podělí x_1 a vynuluje všechny prvky pod diagonálou v prvním sloupci. Takovou matici ale snadno najdeme, známe ji z GEM.

$$\mathbb{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1} & & & \\ -\frac{x_2}{x_1} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -\frac{x_n}{x_1} & & & 1 \end{pmatrix}$$

Redukční metoda

Roznásobením snadno získáme tvar matice $\mathbb{B}$

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} a_{22} - \frac{x_2}{x_1} a_{12} & a_{23} - \frac{x_2}{x_1} a_{13} & \dots & a_{2n} - \frac{x_2}{x_1} a_{1n} \\ a_{32} - \frac{x_3}{x_1} a_{12} & a_{33} - \frac{x_3}{x_1} a_{13} & \dots & a_{3n} - \frac{x_3}{x_1} a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} - \frac{x_n}{x_1} a_{12} & a_{n3} - \frac{x_n}{x_1} a_{13} & \dots & a_{nn} - \frac{x_n}{x_1} a_{1n} \end{pmatrix}.$$

Její tvar lze také snadno odvodit, pokud si uvědomíme, že pravý dolní čtverec matice $\mathbb{AP}$ o rozměrech $(n-1) \times (n-1)$ odpovídá přesně prvkům matice $\mathbb{A}$. Při násobení maticí $\mathbb{P}^{-1}$ zleva pak v tomto čtverci od každého řádku i odečítáme $\frac{x_i}{x_1}$ násobek prvního řádku matice $\mathbb{A}$. To je právě význam matice $\mathbb{P}^{-1}$.

Redukční metoda

Podobně lze odvodit, že

$$\vec{q}^T = \frac{1}{x_1}\left(a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{1n}\right)$$

Nyní známe matici $\mathbb{B}$ a můžeme najít některé její vlastní číslo λ_2. Buď $\vec{z} = (z_2, \ldots, z_n)^T$ k němu příslušný vlastní vektor. Jak najít odpovídající vlastní vektor matice $\mathbb{A}$?

Redukční metoda

Logicky jako lineární kombinaci bazických vektorů daných sloupci matice $\mathbb{P}$. K tomu ale musíme dopočítat složku z_1. Musí platit

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \vec{q}^T \\ \vec{\theta} & \mathbb{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ \vec{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 z_1 + \vec{q}^T \vec{z} \\ \mathbb{B}\vec{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 z_1 + \vec{q}^T \vec{z} \\ \lambda_2 \vec{z} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \lambda_2 z_1 \\ \lambda_2 \vec{z} \end{pmatrix}$$

a tedy

$$\lambda_1 z_1 + \vec{q}^T \vec{z} = \lambda_2 z_1 \Rightarrow z_1 = \frac{\vec{q}^T \vec{z}}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Redukční metoda

- pokud by bylo $\lambda_1 = \lambda_2$, pak platí $\mathbb{B}\vec{z} = \lambda_1 \vec{z}$ a musí být

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \vec{q}^T \\ \vec{\theta} & \mathbb{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ \vec{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 z_1 + \vec{q}^T \vec{z} \\ \mathbb{B}\vec{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 z_1 \\ \lambda_1 \vec{z} \end{pmatrix}$$

- tj. musí být $\vec{q}^T \vec{z} = 0$ a z_1 lze volit libovolně.

Vlastní vektor matice $\mathbb{A}$ je pak dán jako

$$\vec{y} = \mathbb{P} \begin{pmatrix} z_1, \\ \vec{z} \end{pmatrix} = z_1 \vec{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{z} \end{pmatrix}.$$

Shrnutí a otázky

- částečný problém vlastních čísel
  - **mocninná metoda**
    - jak v praxi zaručit její podmínky konvergence?
    - jak napočítat nejmenší vlastní číslo?
  - redukční metoda