Tomáš Oberhuber

Faculty of Nuclear Sciences and Physical Engineering
Czech Technical University in Prague

Video na Youtube

Trojúhelníková metoda

Buď $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$, řešíme úlohu nalezení všech vlastních čísel a vlastních vektorů této matice.

Trojúhelníková metoda

- konstruujeme dvě posloupnosti
  - $\{\mathbb{L}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{n,n}$ dolní trojúhelníkové s jedničkami na diagonále
  - $\{\mathbb{R}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{n,n}$ horní trojúhelníkové
- $\mathbb{L}^{(0)}$ volíme libovolně (např. $\mathbb{I}$)
- $\mathbb{L}^{(1)}$ a $\mathbb{R}^{(1)}$ získáme rozkladem matice $\mathbb{A}\mathbb{L}^{(0)}$ tj. platí

$$\mathbb{L}^{(1)}\mathbb{R}^{(1)} = \mathbb{A}\mathbb{L}^{(0)}$$

  - $\mathbb{L}^{(1)}$ je dolní trojúhelníková s jedničkami na diagonále
  - $\mathbb{R}^{(1)}$ je horní trojúhelníková
- obecně počítáme iterace tvaru

$$\mathbb{L}^{(k+1)}\mathbb{R}^{(k+1)} = \mathbb{A}\mathbb{L}^{(k)}$$

  - $\mathbb{L}^{(k+1)}$ je dolní trojúhelníková s jedničkami na diagonále
  - $\mathbb{R}^{(k+1)}$ je horní trojúhelníková

Trojúhelníková metoda

Remark 1

Pokud ukážeme, že $\mathbb{L}^{(k)} \rightarrow \mathbb{L}$ a $\mathbb{R}^{(k)} \rightarrow \mathbb{R}$, pak platí

$$\mathbb{A}\mathbb{L} = \mathbb{L}\mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{R}\mathbb{L}^{-1}$$

a jde tedy a podobnostní transformaci a vlastní čísla matice $\mathbb{A}$ najdeme na diagonále matice $\mathbb{R}$.

Trojúhelníková metoda

Remark 2

Jak vypočítat vlastní vektory? Řešíme nejprve rovnici

$$(\mathbb{R} - \lambda \mathbb{I})\, \vec{y}^i = 0.$$

Z tvaru matice $\mathbb{R} - \lambda \mathbb{I}$ (horní trojúhelníková s 0 na diagonále na i-tém řádku) snadno vidíme, že

$$\vec{y}^i_j = \begin{cases} 0 & j < i \\ 1 & j = i \\ \frac{-1}{r_{jj} - \lambda} \sum_{k=i}^{j-1} y^i_k r_{jk} & j > i \end{cases}$$

neboť pro $j > i$ musí platit

$$\sum_{k=i}^{j-1} y^i_k r_{jk} + y^i_j \left(r_{jj} - \lambda \right) = 0.$$

Jelikož matice $\mathbb{R}$ je matice $\mathbb{A}$ vyjádřená v bázi dané sloupci matice $\mathbb{L}$, platí, že vlastní vektory matice $\mathbb{A}$ jsou

$$\vec{x}^i = \mathbb{L} \vec{y}^i.$$

Trojúhelníková metoda

- $\mathbb{L}^{(0)}$ lze volit libovolně, nemusí být ani dolní trojúhelníková
  - díky tomu má metoda samoopravující schopnost
  - pokud bychom někdy napočítali $\mathbb{L}^{(k)}$ špatně, lze ho brát jako nové $\mathbb{L}^{(0)}$

Existence LU rozkladu

Remark 3

Obě metody jsou postaveny na počítání LU rozkladu. Ten ale existuje jen pro silně regulární matice. V první iteraci musíme předpokládat, že toto je splněno. Připomeňme si navíc vzorce pro výpočet LU rozkladu:

$$
\begin{aligned}
l_{ij} &= a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} \text{ pro } j \leq i \\
u_{ij} &= (a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}) / l_{ii} \text{ pro } i < j
\end{aligned}
$$

Z nich vidíme, že prvky matic $\mathbb{L}$ a $\mathbb{U}$ závisí spojitě na prvcích matice $\mathbb{A}$. Pokud tedy matici $\mathbb{A}$ změníme jen málo, bude LU rozklad opět existovat.

Existence LU rozkladu

Theorem 4

Nechť matice $\mathbb{A}$ je silně regulární tj. existuje její LU rozklad. Buď matice $\mathbb{E}$ taková, že $\|\mathbb{E}\|$ je dostatečně malé. Pak existuje i LU rozklad matice $\mathbb{A} + \mathbb{E}$.

Theorem 5

Nechť $\mathbb{A} = \mathbb{I} + \mathbb{E}$, kde $\|\mathbb{E}\|$ je malé. Potom existuje rozklad $\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{R}$, kde $\mathbb{L}$ je dolní trojúhelníková s jedničkami na diagonále a $\mathbb{R}$ je horní trojúhelníková. Platí-li, že pokud $\|\mathbb{E}\| \rightarrow 0$, pak $\mathbb{L} \rightarrow \mathbb{I}$ a $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{I}$.

Konvergence trojúhelníkové metody

Theorem 6

Pokud existuje trojúhelníkový rozklad matice $\mathbb{A}^k\mathbb{L}^{(0)} = \mathcal{L}^{(k)}\mathcal{R}^{(k)}$, pak platí

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(k)} &= \mathbb{L}^{(k)}, \\ \mathcal{R}^{(k)} &= \mathbb{R}^{(k)}\mathbb{R}^{(k-1)}\ldots\mathbb{R}^{(1)}. \end{aligned}$$

Důkaz.

Video na Youtube □

Remark 7

V důkazu konvergence budeme zkoumat matici $\mathbb{A}^k\mathbb{L}^{(0)}$. Odvodíme, kdy existuje její LU rozklad $\mathbb{A}^k\mathbb{L}^{(0)} = \mathcal{L}^{(k)}\mathcal{R}^{(k)}$. Jelikož platí, že $\mathbb{L}^{(k)} = \mathcal{L}^{(k)}$, dokážeme-li, že $\mathcal{L}^{(k)} \to \mathbb{L}$, bude platit i $\mathbb{L}^{(k)} \to \mathbb{L}$. Pak již lze i dokázat, že $\mathcal{R}^{(k)} \to \mathbb{R}$, čímž máme vyšetřenou konvergenci trojúhelníkové metody.

Konvergence trojúhelníkové metody

Theorem 8

Nechť matice $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ je regulární a má všechna vlastní čísla jednonásobná a různá v absolutní hodnotě tj. existuje regulární matice $\mathbb{X}$, že $\mathbb{A} = \mathbb{X}\mathbb{D}\mathbb{X}^{-1}$, kde $\mathbb{D} = diag\left\{\lambda_1, \dots \lambda_n\right\}$ pro $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|$. Dále předpokládejme, že pro dostatečně velké k existují LU rozklady matic $\mathbb{A}\mathbb{L}^{(k)}$ a nechť dále existují LU rozklady matic $\mathbb{X}$ a $\mathbb{X}^{-1}\mathbb{L}^{(0)}$. Pak posloupnosti matic $\mathbb{L}^{(k)}$ a $\mathbb{R}^{(k)}$ z trojúhelníkové metody konvergují a na diagonále matice $\mathbb{R}$ je spektrum matice $\mathbb{A}$ seřazené sestupně podle velikosti v absolutní hodnotě.

Důkaz.

Video na Youtube □

Remark 9

Pro konvergenci za jiných podmínek lze nahlédnout do skript doc. Humhala.

LR algoritmus

LR algoritmus

- konstruujeme tři posloupnosti
  - $\left\{\mathbb{A}^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{n,n}$
  - $\left\{\hat{\mathbb{L}}^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{n,n}$ dolní trojúhelníkové s jedničkami na diagonále
  - $\left\{\hat{\mathbb{R}}^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{n,n}$ horní trojúhelníkové
- na počátku volíme

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^{(1)} &= \mathbb{A}, \\ \hat{\mathbb{L}}^{(1)}\hat{\mathbb{R}}^{(1)} &= \mathbb{A}^{(1)}, \\ \mathbb{A}^{(2)} &= \hat{\mathbb{R}}^{(1)}\hat{\mathbb{L}}^{(1)} \end{aligned}$$

- obecně mají jednotlivé iterace tvar

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{L}}^{(k)}\hat{\mathbb{R}}^{(k)} &= \mathbb{A}^{(k)}, \\ \mathbb{A}^{(k+1)} &= \hat{\mathbb{R}}^{(k)}\hat{\mathbb{L}}^{(k)}. \end{aligned}$$

LR algoritmus

Remark 10

Z úvahy

$$
\begin{aligned}
\mathbb{A}^{(k+1)} &= \hat{\mathbb{R}}^{(k)}\hat{\mathbb{L}}^{(k)} \\
&= \left(\left(\hat{\mathbb{L}}^{(k)}\right)^{-1}\hat{\mathbb{L}}^{(k)}\right)\hat{\mathbb{R}}^{(k)}\hat{\mathbb{L}}^{(k)} \\
&= \left(\hat{\mathbb{L}}^{(k)}\right)^{-1}\mathbb{A}^{(k)}\hat{\mathbb{L}}^{(k)}.
\end{aligned}
$$

plyne, že pokud posloupnost $\left\{\mathbb{A}^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje k horní trojúhelníkové matici, budou na její diagonále vlastní čísla matice $\mathbb{A}$.

LR algoritmus

- má menší nároky na paměť než trojúhelníková metoda
  - trojúhelníková metoda potřebuje pracovní pole pro napočítání LU rozkladu, pro výsledek součinu $\mathbb{A}\mathbb{L}^{(k)}$ a pro matici $\mathbb{A}$
  - LR algoritmus potřebuje pracovní pole pro LU rozklad a napočítání součinu $\hat{\mathbb{R}}^{(k)}\hat{\mathbb{L}}^{(k)}$
  - LR algoritmus nemá tak dobrou samoopravující schopnost, takže vlivem numerických chyb můžeme získat špatné spektrum
    - nepamatuje si matici $\mathbb{A}$
    - nekonverguje pro libovolnou počáteční matici, tou je zde matice $\mathbb{A}$ na rozdíl od trojúhelníkové metody, kde ji byla libovolná matice $\mathbb{L}^{(0)}$

Konvergence LR algoritmu

Theorem 11

Existuje-li trojúhelníkový rozklad matice $\mathbb{A}^k = \mathcal{L}^{(k)}\mathcal{R}^{(k)}$, *pak platí*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(k)} &= \hat{\mathbb{L}}^{(1)}\hat{\mathbb{L}}^{(2)}\ldots\hat{\mathbb{L}}^{(k)} \\ \mathcal{R}^{(k)} &= \hat{\mathbb{R}}^{(k)}\hat{\mathbb{R}}^{(k-1)}\ldots\hat{\mathbb{R}}^{(1)}. \end{aligned}$$

Důkaz.

Video na Youtube

□

Konvergence LR algoritmu

Remark 12

Pokud v trojúhelníkové metodě volíme $\mathbb{L}^{(0)} = \mathbb{I}$, *pak je* $\mathbb{A}^k \mathbb{L}^{(0)} = \mathbb{A}^k$ *a musí platit*

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{(k)} = \mathbb{L}^{(k)} &= \hat{\mathbb{L}}^{(1)} \hat{\mathbb{L}}^{(2)} \ldots \hat{\mathbb{L}}^{(k)}, \\
\mathcal{R}^{(k)} = \mathbb{R}^{(k)} \mathbb{R}^{(k-1)} \ldots \mathbb{R}^{(1)} &= \hat{\mathbb{R}}^{(k)} \hat{\mathbb{R}}^{(k-1)} \ldots \hat{\mathbb{R}}^{(1)},
\end{aligned}
$$

tj.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{L}^{(k)} &= \hat{\mathbb{L}}^{(1)} \hat{\mathbb{L}}^{(2)} \ldots \hat{\mathbb{L}}^{(k)}, \\
\mathbb{R}^{(k)} &= \hat{\mathbb{R}}^{(k)}.
\end{aligned}
$$

Konvergence LR algoritmu

Remark 13

Z konvergence trojúhelníkové metody $\mathbb{L}^{(k)} \to \mathbb{L}$ *a* $\mathbb{R}^{(k)} \to \mathbb{R}$, *plyne*

$$\mathbb{A}^{(k)} = \hat{\mathbb{L}}^{(k)}\hat{\mathbb{R}}^{(k)} = \left(\mathbb{L}^{(k-1)}\right)^{-1}\mathbb{L}^{(k)}\mathbb{R}^{(k)} \to \mathbb{L}^{-1}\mathbb{L}\mathbb{R} = \mathbb{R},$$

tj. matice $\mathbb{A}^{(k)}$ *z LR algoritmu skutečně konverguje k horní trojúhelníkové matici. Na diagonále má vlastní čísla matice* $\mathbb{A}$ *seřazené sestupně podle velikosti v absolutní hodnotě (to už jsme ukázali).*

Konvergence LR algoritmu

Nyní již můžeme vše shrnout ve formě následující věty:

Theorem 14

Nechť matice $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ *je regulární a diagonalizovatelná a předpokládejme, že trojúhelníková metoda konverguje s volbou* $\mathbb{L}^{(0)} = \mathbb{I}$*. Pak LR algoritmus konverguje také, a platí, že posloupnost* $\mathbb{A}^{(k)}$ *konverguje k horní trojúhelníkové matici s hlavními čísly matice* $\mathbb{A}$ *na diagonále seřazenými sestupně podle velikosti v absolutní hodnotě.*