Tomáš Oberhuber

Faculty of Nuclear Sciences and Physical Engineering
Czech Technical University in Prague

Video na Youtube

1. Posloupnosti
2. Normy
3. Geometrická posloupnost matic
4. Otázky

Pojem limity a konvergence v lineární algebře

Definition 1

Nechť je dána posloupnost vektorů $\vec{x}^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}\right)^T$ pro $k = 1, 2, 3 \ldots$. Říkáme, že posloupnost vektorů $\left\{\vec{x}^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje k vektoru $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$, právě když pro každé $i \in \hat{n}$

$$\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i.$$

Používáme značení

$$\vec{x}^{(k)} \to \vec{x},$$

nebo

$$\lim_{k\to\infty} \vec{x}^{(k)} = \vec{x}.$$

Pojem limity a konvergence v lineární algebře

Definition 2

Analogicky předchozí definici říkáme, že posloupnost matic

$$\mathbb{A}^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(k)} & \dots & a_{1m}^{(k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^{(k)} & \dots & a_{nm}^{(k)} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n,m},$$

pro $k = 1, 2, 3, \dots$ konverguje k matici $\mathbb{A}$, právě když pro každý prvek a_{ij} pro $i \in \hat{n}$ a $j \in \hat{m}$ platí

$$lim_{k \to \infty} a_{ij}^{(k)} = a_{ij}.$$

$\|\vec{x}\|_{\tilde{Q}} = \frac{1}{3}\sqrt{x^2+y^2}$

Normy

Remark 3

Dokazovat konvergenci po prvcích by bylo velmi nešikovné. K vyšetřování konvergence použijeme normu.

Definition 4

Norma na množině vektorů z $\mathbb{C}^n$ je taková funkce, která každému vektoru $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ přiřazuje reálné číslo $\|\vec{x}\|$, a která splňuje následující podmínky:

- $\|\vec{x}\| \geq 0$ a $\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$,
- $\|\lambda\vec{x}\| = |\lambda|\,\|\vec{x}\|$ pro všechna $\lambda \in \mathbb{C}$ a všechna $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$,
- $\|\vec{x}+\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ pro všechna $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n$.

$\|\vec{x}\| = 1$ $\quad$ $\|\lambda \underline{\vec{x}}\| = \underline{|\lambda|}$

Normy

Remark 5

Snadno vidíme, že platí $\left\|\vec{x}-\vec{y}\right\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x}-\vec{y} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{y}$. *Tato vlastnost normy se často používá k důkazu, že dva vektory se rovnají.*

$\|\vec{x}\|_Q = |x_1| + 2\sqrt{|x_2|^2 + |x_3|^2} +$

Normy

$3 \max\{|x_5|, |x_6|\}$

Příklady norem:

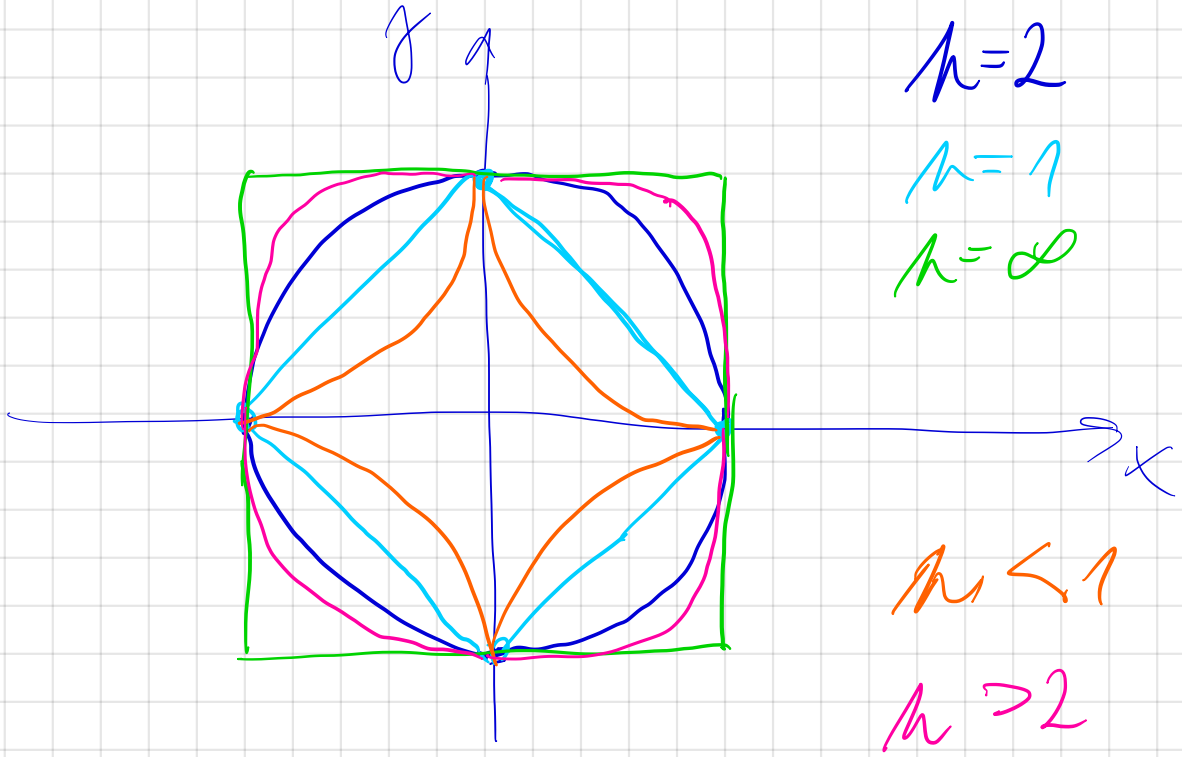
- **maximová norma** - $\|\vec{x}\|_\infty = \max_{i \in \hat{n}} |x_i|$
- **součtová norma** - $\|\vec{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$
- **euklidovská norma** - $\|\vec{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

Remark 6

Lze ukázat, že platí

$$\lim_{p \to \infty} \|\vec{x}\|_p = \lim_{p \to \infty} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|\vec{x}\|_\infty .$$

Dokažte, že uvedené normy splňují definici.



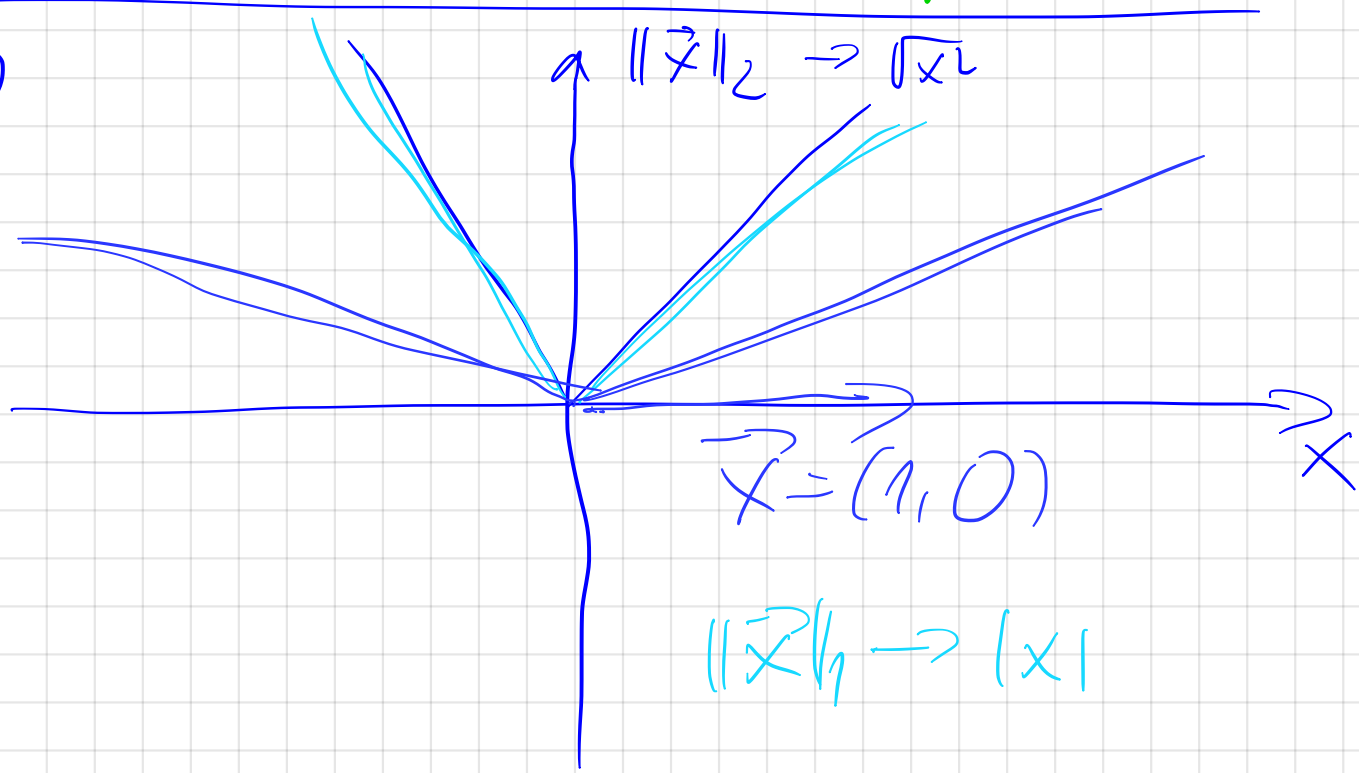
$$\|\vec{x}\|_p = 1$$

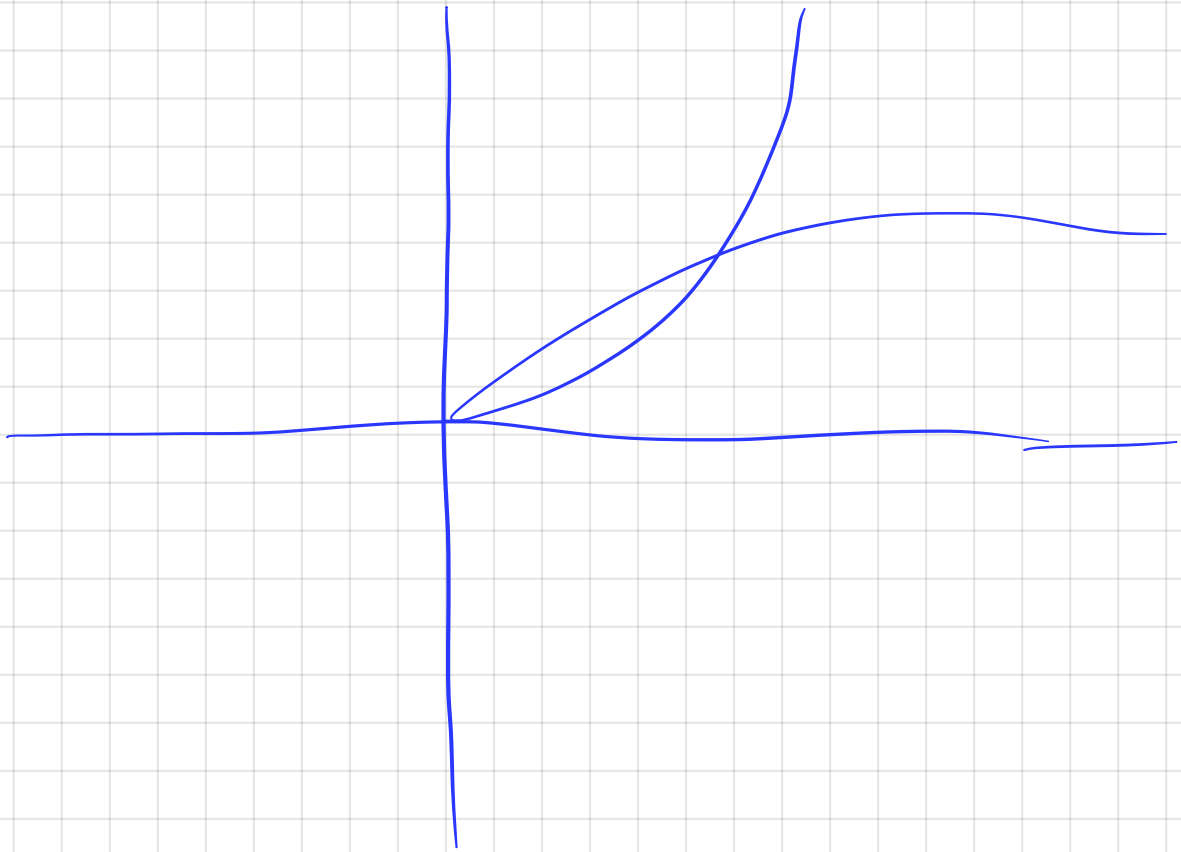
$$p=2;\ \|\vec{x}\|_2 = \sqrt{x^2+y^2} = 1$$

$$p=1;\ \|\vec{x}\|_1 = |x|+|y|$$

$$p=\infty;\ \|\vec{x}\|_\infty = \max\{|x|,|y|\}$$

$y=0$





Normy

$\|\vec{x}\|_\beta = 0$

$\Rightarrow \|\vec{x}\|_\alpha = 0$

Theorem 7

Pro libovolné dvě normy $\|\cdot\|_\alpha$ a $\|\cdot\|_\beta$ na množině vektorů z $\mathbb{C}^n$ existují kladné konstanty γ_1 a γ_2 splňující

$$\gamma_1 \|\vec{x}\|_\alpha \leq \|\vec{x}\|_\beta \leq \gamma_2 \|\vec{x}\|_\alpha ,$$

pro libovolný vektor $\vec{x}$.

$\|\vec{x}\|_\alpha = 0 \Rightarrow$

$\|\vec{x}\|_\beta = 0$

Bez důkazu.

$\|\vec{x}-\vec{y}\|_\alpha = 0 \Leftrightarrow \|\vec{x}-\vec{y}\|_\beta = 0$

Normy

Theorem 8

Nechť $\left\{\vec{x}^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ *je posloupnost vektorů. Potom*

$$\vec{x}^{(k)} \to \vec{x} \Leftrightarrow \left\|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}\right\| \to 0,$$

v libovolné normě $\|\cdot\|$.

Důkaz.

Video na Youtube

$\square$

$$\vec{x}^{(k)} \to \vec{x} \underset{\text{DEF.}}{\iff} x_i^{(k)} \to x_i \; ; \forall i = 1, \dots, n$$

$$\vec{x}^{(k)}, \vec{x} \in \mathbb{C}^n$$

$$\iff |x_i^{(k)} - x_i| \to 0 \iff \|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}\|_\infty = 0$$

$$\|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i^{(k)} - x_i| \to 0$$

$$\vec{x}^{(k)} \to \vec{x} \iff \|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}\|_\infty \to 0$$

$$\forall \|\cdot\|_*, \|\cdot\|_\infty \; ; \exists \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}^+$$

$$\gamma_1 \|\vec{x}\|_* \leq \|\vec{x}\|_\infty \leq \gamma_2 \|\vec{x}\|_* \; ; \forall \vec{x} \in \mathbb{C}^n$$

$$\gamma_1 \|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}\|_* \leq \|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}\|_\infty \leq \gamma_2 \|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}\|_*$$

- $\vec{x}^{(k)} \to \vec{x} \iff \|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}\|_\infty \to 0 \implies$
  $\|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}\|_* \to 0$
- $\|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}\|_* \to 0 \implies \|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}\|_\infty \to 0$

$$\iff \vec{x}^{(k)} \to x \qquad \square$$

Normy

Definition 9

Norma na množině čtvercových matic řádu n je funkce, která každé matici $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ přiřazuje reálné číslo $\|\mathbb{A}\|$ splňující:

- $\|\mathbb{A}\| \geq 0$ a $\|\mathbb{A}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbb{A} = \theta$,
- $\|\lambda\mathbb{A}\| = |\lambda|\,\|\mathbb{A}\|$,
- $\|\mathbb{A} + \mathbb{B}\| \leq \|\mathbb{A}\| + \|\mathbb{B}\|$,
- $\|\mathbb{A}\mathbb{B}\| \leq \|\mathbb{A}\|\,\|\mathbb{B}\|$,

pro všechna $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n,n}$ a $\lambda \in \mathbb{C}$.

Normy

Remark 10

Na maticovou normu se lze dívat jako na vektorovou normu aplikovanou na vektory, které mají n^2 složek. Tato norma navíc splňuje čtvrtý bod definice. Proto i tato norma splňuje větu o konvergenci vektorů v normě. Tudíž i konvergenci matic lze vyšetřovat pomocí norem.

Normy

Příkladem maticové normy je Schurova norma:

$$\|\mathbb{A}\|_S = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2}.$$

Dokažte, že tato norma splňuje všechny čtyři body definice.

Normy

Definition 11

Maticová norma se nazývá **souhlasnou** s danou vektorovou normou, platí-li pro libovolnou matici $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ a libovolný vektor $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$

$$\left\|\mathbb{A}\vec{x}\right\| \leq \|\mathbb{A}\| \left\|\vec{x}\right\| .$$

Remark 12

Schurova maticová norma je souhlasná s euklidovskou normou.

Důkaz.

Dokažte. □

$$\boxed{\|\mathbb{A}\| = \max \frac{\|\mathbb{A}\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|}}$$

Normy

$$\Rightarrow \|\mathbb{A}\vec{x}\| \leq \|\mathbb{A}\| \cdot \|\vec{x}\|$$

Definition 13

Maticová norma **indukovaná vektorovou normou** je norma daná vztahem

$$\|\mathbb{A}\| = \max_{\|\vec{x}\|=1} \left\|\mathbb{A}\vec{x}\right\|,$$

pro $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$.

- dokažte, že takto definovaná maticová norma splňuje definici normy
- maximum existuje vždy, neboť jde o supremum spojité funkce na kompaktní množině
- ne pro každou maticovou normu existuje vektorová norma, která ji indukuje

Normy

Theorem 14

Při značení

- $\|\mathbb{A}\|_\infty = \max_{\|\vec{x}\|_\infty=1} \|\mathbb{A}\vec{x}\|_\infty$,
- $\|\mathbb{A}\|_1 = \max_{\|\vec{x}\|_1=1} \|\mathbb{A}\vec{x}\|_1$,
- $\|\mathbb{A}\|_2 = \max_{\|\vec{x}\|_2=1} \|\mathbb{A}\vec{x}\|_2$,

pro každou matici $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ *platí následující vztahy:*

- $\|\mathbb{A}\|_\infty = \max_{i\in\hat{n}} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$,
- $\|\mathbb{A}\|_1 = \max_{j\in\hat{n}} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$,
- $\|\mathbb{A}\|_2 = \sqrt{\rho(\mathbb{A}^*\mathbb{A})}$.

Důkaz.

Video na Youtube

□

- $\|A\|_\infty = \max\limits_{\|\vec{x}\|_\infty = 1} \|A\vec{x}\|_\infty$

? $\vec{x}^* = \arg\max\limits_{\|\vec{x}\|_\infty = 1} \|A\vec{x}\|_\infty$

$\|\vec{x}\|_\infty = 1 \iff |x_i| \leq 1 \quad ; A \in \mathbb{R}^{n,n}$

$x_i \in \langle -1, 1 \rangle \quad \forall i = 1, \dots, n$

$\vec{y} = A\vec{x} \quad ; \|\vec{y}\|_\infty$ BYLA MAX.,

TJ. CHCEME JEDNU URČITOU SLOŽKU $\vec{y}$ MAXIMÁLNÍ

$\|\vec{y}\|_\infty = \max\limits_{i=1,\dots,n} |y_i|$

$\vec{y} = A\vec{x} \iff x_1 A_{*1} + x_2 A_{*2} + \dots + x_n A_{*n}$

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & x_1 & & x_2 & & \dots & & x_n \\
1 & | & 1 & | & & & 1 & | \\
-1 & | & -1 & | & & & -1 & |
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
a_{11} & a_{12} & & a_{1n} & & & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & y_1 & \\
+ & + & \dots & + & = & \vdots & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} & & y_n &
\end{array}
\quad \Big\} \; y_i \text{ MAX}
$$

$x_j = \operatorname{sign} a_{ij} \quad ; \forall j = 1, \dots, n$

$\forall i = 1, \dots, n \; ; \; \exists \, x_1^i, \dots, x_n^i \; ;$

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\max_{i=1,\dots,n} |y_i| = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

$A \in \mathbb{C}^{n,n} \; ; \; x_j^i \; ; \; x_j^i a_{ij} = |a_{ij}| \Rightarrow$

$$x_j^i = \overline{a_{ij}} / |a_{ij}|$$

- $\|A\|_1 = \max\limits_{\|\vec{x}\|_1 = 1} \|A\vec{x}\|_1 \; ; \; A \in \mathbb{R}^{n,n}$

$\|\vec{x}\|_1 \Leftrightarrow \sum\limits_{j=1}^{n} |x_i| = 1 \; ; \; \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ \vdots \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ Pri.

$\vec{y} = A\vec{x} \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} |y_i| \to MAX.$

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & \dots & x_n & & \\ a_{11} & a_{12} & & a_{1n} & & y_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & = & y_2 \\ & & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} & & y_n \end{array}$$

$x_{j^*} = 1$ PRO $\sum_{i=0}^{n} |a_{ij^*}|$ MAX.

$x_j = 0$ PRO OSTATNÍ j

$\Rightarrow \vec{y} = A_{*j^*} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |y_i|$ JE MAX.

$$= \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

- $\|A\|_2 = \max_{\|\vec{x}\|_2 = 1} \underline{\|A\vec{x}\|_2}$

$$\|A\vec{x}\|_2^2 = (A\vec{x}, A\vec{x}) = (\vec{x}, A^*A\vec{x})$$

A^*A JE NORMÁLNÍ

SCHUROVA VĚTA PRO NORMÁLNÍ MATICE $\Rightarrow A^*A = U^* D U$

NA DIAG. D JE SPEKTRUM A^*A

$$(\vec{x}, A^*A\vec{x}) = (\vec{x}, U^*DU\vec{x}) = (U\vec{x}, DU\vec{x})$$

$$= (\vec{y}, D\vec{y}) \; ; \; \vec{y} = U\vec{x}$$

- U JE UNITÁRNÍ $\Longrightarrow$

$$\|\vec{y}\|_2 = \|U\vec{x}\|_2 = \|\vec{x}\|_2 = 1$$

$$\|A\vec{x}\|_2^2 = (\vec{y}, D\vec{y}) \quad ; \quad \vec{y} = U\vec{x}$$

$$\|A\|_2^2 = \max_{\|\vec{x}\|_2=1} \|A\vec{x}\|_2^2 = \max_{\|\vec{y}\|_2=1} (\vec{y}, D\vec{y})$$

$\vec{y} = U\vec{x}$

$$= \max_{\|\vec{y}\|_2=1} \sum_{i=1}^{n} \underline{d_{ii} |y_i|^2}$$

$$\|\vec{y}\|_2^2 = 1 \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2 = 1$$

$\Rightarrow$ VOLÍME $y_i = 1$ PRO d_{ii} MAX.

A^*A JE PO MATICE $\Longrightarrow$

$$(\vec{x}, A^*A\vec{x}) = (A\vec{x}, A\vec{x}) > 0 \; ; \; \vec{x} \neq \vec{0}$$

<u>PO MATICE MÁ KLADNÁ VL. ČÍSLA</u>

$$\Rightarrow d_{ii} > 0 \Rightarrow \max_{i=1,\dots,n} d_{ii} = \rho(A^*A)$$

$$\Rightarrow \|A\|_2^2 = \rho(A^*A) \qquad \square$$

!!!

Pozitivně definitní matice

$(\mathbb{A}\vec{e}^{(i)}, \vec{e}^{(i)}) = (\mathbb{A}_{*i}, \vec{e}^{(i)}) = a_{ii} > 0$

Definition 15

Čtvercová matice $\mathbb{A}$ je **pozitivně definitní**, právě když pro každý vektor $\vec{x} \neq \vec{0}$ platí, že

$$\vec{x}^* \mathbb{A} \vec{x} = (\mathbb{A}\vec{x}, \vec{x}) > 0$$

je kladné (> 0) reálné číslo. Značíme také $\mathbb{A} > 0$. Je-li pro čtvercovou matici $\mathbb{B}$ matice $\mathbb{A} - \mathbb{B} > 0$, pak píšeme $\mathbb{A} > \mathbb{B}$.

Theorem 16

Všechna vlastní čísla pozitivně definitní matice $\mathbb{A}$ jsou kladná. Je-li $\mathbb{A}$ hermitovská matice s kladnými vlastními čísly, pak je pozitivně definitní.

Důkaz.

Video na Youtube

□

- $\mathbb{A}$ JE PD. $\quad \vec{x}^* \mathbb{A} \vec{x} > 0 \; ; \forall \vec{x} \neq \vec{0}$

$(\mathbb{A}\vec{x}, \vec{x}) > 0$

$\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$; $\vec{x}_\lambda$ PŘÍSLUŠNÝ VL. VEKTOR NORMOVANÝ NA 1, TJ.

$\|\vec{x}_\lambda\|_2 = 1$

$(\mathbb{A}\vec{x}_\lambda, \vec{x}_\lambda) = (\lambda \vec{x}_\lambda, \vec{x}_\lambda) = \lambda (\vec{x}_\lambda, \vec{x}_\lambda) =$

$\lambda \|\vec{x}_\lambda\|_2^2 = \lambda > 0$

- $\mathbb{A}$ JE HERMITOVSKÁ A MÁ KLADNÁ VL. ČÍSLA

SCHUR $\Rightarrow \mathbb{A} = \mathbb{U}^* \mathbb{D} \mathbb{U}$; $d_{ii} > 0 \; \forall i = 1, \dots, n$

SPEKTRUM $\mathbb{A}$

$\vec{x} \neq \vec{0}$; $(\mathbb{A}\vec{x}, \vec{x}) = (\mathbb{U}^* \mathbb{D} \mathbb{U} \vec{x}, \vec{x}) =$

$= (\mathbb{D}\mathbb{U}\vec{x}, \mathbb{U}\vec{x}) = (\mathbb{D}\vec{y}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} d_{ii} |y_i|^2 > 0$

$\vec{y} = \mathbb{U}\vec{x}$

$\square$

Normy

Definition 17

Buď $\mathbb{A}$ hermitovská a PD. Podle Schurovy věty je

$$\mathbb{A} = \mathbb{U}^* \mathbb{D} \mathbb{U},$$

kde $\mathbb{D}$ je diagonální matice s kladnými prvky. Pro libovolné $p \in \mathbb{R}$ definujeme

$$\mathbb{A}^p = \mathbb{U}^* \mathbb{D}^p \mathbb{U}.$$

$$\mathbb{A}^2 = \underbrace{\mathbb{U}^* \mathbb{D}}_{\mathbb{A}} \overbrace{\mathbb{U} \mathbb{U}^*}^{\mathbb{I}} \underbrace{\mathbb{D} \mathbb{U}}_{\mathbb{A}} = \mathbb{U}^* \mathbb{D}^2 \mathbb{U}$$

Normy

Definition 18

Buď $\mathbb{A}$ hermitovská pozitivně definitní matice. Pak *energetickou* vektorovou a maticovou normu definujeme jako

$$\left\|\vec{x}\right\|_A := \left\|\mathbb{A}^{\frac{1}{2}}\vec{x}\right\|_2,$$

$$\left\|\mathbb{B}\right\|_A := \left\|\mathbb{A}^{\frac{1}{2}}\mathbb{B}\mathbb{A}^{-\frac{1}{2}}\right\|_2.$$

Konvergence geometrické posloupnosti matic

$a \in \mathbb{R};\ a^k \to 0 \Leftrightarrow |a| < 1$

Theorem 19

Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. *Potom platí*

$$\mathbb{A}^k \to \theta \Leftrightarrow \rho(\mathbb{A}) < 1.$$

!!!

Důkaz.

Video na Youtube

□

$$\mathbb{A} = \mathbb{T}\,\mathbb{D}\,\mathbb{T}^{-1} \Rightarrow \mathbb{A}^k = \mathbb{T}\,\mathbb{D}^k\,\mathbb{T}^{-1}$$

$$\mathbb{A}^2 = \mathbb{T}\,\mathbb{D}\,\underbrace{\mathbb{T}^{-1}\,\mathbb{T}}_{\mathbb{I}}\,\mathbb{D}\,\mathbb{T}^{-1} = \mathbb{T}\,\mathbb{D}^2\,\mathbb{T}^{-1}$$

$$\mathbb{A}^k \to \Theta \iff \mathbb{D}^k \to \Theta$$

$$\mathbb{D}^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix} \longrightarrow \Theta \iff \lambda_i^k \to 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

$$\iff |\lambda_i| < 1 \;;\; \forall i = 1, \dots, n \iff \rho(\mathbb{A}) < 1$$

$$\mathbb{A}^k = \mathbb{U}^* \mathbb{R}^k \mathbb{U} \;;\quad \mathbb{R}^k \overset{?}{\longrightarrow} \Theta \quad \times$$

JORDAN ; $\mathbb{A} = \mathbb{T}^{-1}\,\mathbb{J}\,\mathbb{T} \Rightarrow$

$$\mathbb{A}^k \to \Theta \iff \mathbb{J}^k \to \Theta$$

$$\mathbb{J}^k = \begin{pmatrix} \mathbb{J}_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbb{J}_r^k \end{pmatrix} \longrightarrow \Theta \iff \mathbb{J}_i^k \to \Theta \quad \forall i = 1, \dots, r$$

$$\mathbb{J}_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

$\lambda_i \to \lambda \; ; \; J_i \to J$

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \; ; \; J^2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & & \\ & \lambda & 1 & & & \\ & & \lambda & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \lambda & 1 \\ & & & & & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & & \\ & \lambda & 1 & & & \\ & & \lambda & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \lambda & 1 \\ & & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow (\lambda+1)(\lambda+1) = (\lambda+1)^2$

$\rightsquigarrow (\lambda+1)^k \to$ BINOMICKÁ V.

$\binom{k}{0} = 1$

$$(J^k)_{ij} = \begin{cases} \binom{k}{j-i} \lambda^{k-(j-i)} & ; \; j > i \; ; \; k \geq j-i \; , \\ \lambda^k & ; \; i = j \\ 0 & ; \; j < i \end{cases} \quad \text{JINAK } 0$$

$$J^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \binom{k}{2}\lambda^{k-2} & \cdots \\ & \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \\ & & \lambda^k & \\ & & & \ddots \\ & & & & \lambda^k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \diagdown \diagdown \diagdown \diagdown \end{pmatrix}$$

$$J^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \lambda^2 & 2\lambda & 1 & 0 \cdots & 0 \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & 1 \\ & & & & \lambda^2 & 2\lambda \\ & & & & & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

Dk.: $k=1$;

$$J_{ij} = \begin{cases} \binom{1}{j-i} \lambda^{\overbrace{1-(j-1)}^{0}} & ; i<j \quad ; 1 \geq j-i \Rightarrow j=i+1 \\ \lambda^1 & ; i=j \\ 0 & ; j<i \end{cases}$$

$$\binom{1}{j-i} \lambda^{1-(j-i)} \underset{j=i+1}{=} \binom{1}{i+1-i} \lambda^{1-1} = 1$$

$k-1 \to k$

$$(J^k)_{ij} = \sum_{l=0}^{n} (J^{k-1})_{il} \underbrace{J_{lj}}$$

λ PRO $l=j$

1 PRO $l=j-1$

$$= (J^{k-1})_{ij} \cdot \lambda + (J^{k-1})_{ij-1} \cdot 1$$

$$(J^k)_{ij} = \underbrace{(J^{k-1})_{ij}}\cdot\lambda + (J^{k-1})_{i\,j-1}\cdot 1$$

$$= \binom{k-1}{j-i}\lambda^{k-\cancel{1}-(j-i)}\cdot\underbrace{\lambda} + \binom{k-1}{j-1-i}\lambda^{k-\cancel{1}-(j-\cancel{1}-i)}\cdot 1$$

$$= \lambda^{k-(j-i)}\cdot\Big[\underbrace{\binom{k-1}{j-i}+\binom{k-1}{j-1-i}}_{\binom{k}{j-i}}\Big] =$$

$$= \binom{k}{j-i}\lambda^{k-(j-i)}$$

$$\overset{?}{=} \binom{k}{j-i}\lambda^{k-(j-i)} \xrightarrow[k\to\infty]{?} 0$$

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} = \frac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-m+1)}^{m \text{ ZÁVOREK}}}{m!}$$

$$\leq \frac{n^m}{m!}$$

$$\binom{k}{j-i} \leq \frac{k^{j-i}}{(j-i)!}$$

$$\overset{?}{\leq} \frac{k^{j-i}}{(j-i)!} \lambda^{k-(j-i)} \xrightarrow[k\to\infty]{?} 0$$

$$\frac{k^c}{c_1} \frac{\lambda^k}{\underbrace{\lambda^{j-i}}_{c_2}} = \frac{1}{c_3} \cdot k^c \cdot \lambda^k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

$$\Longleftrightarrow |\lambda| < 1$$

$\square$

Konvergence geometrické posloupnosti matic

!!!

Theorem 20

Postačující podmínka pro to, aby $\mathbb{A}^k \to \theta$ *pro* $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ *je, že existuje maticová norma taková, že* $\|\mathbb{A}\| < 1$.

Důkaz.

Video na Youtube

$\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

$\|A^k\| \leq \|A\|^k \xrightarrow[k \to \infty]{} 0 \Leftrightarrow \|A\| < 1$

$\|A\| < 1 \Rightarrow \|A\|^k \to 0 \Rightarrow \|A^k\| \to 0 \Rightarrow A^k \to \theta$

□

Konvergence geometrické posloupnosti matic

$$\rho(\mathbb{A}) \leq \|\mathbb{A}\|_*$$

Theorem 21

Absolutní hodnota libovolného vlastního čísla $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$ je nejvýše rovna libovolné normě dané matice $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$.

Důkaz.

Video na Youtube

□

$\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$; $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{B} = \frac{1}{\|\mathbb{A}\| + \varepsilon} \mathbb{A} \Rightarrow \|\mathbb{B}\| = \frac{\|\mathbb{A}\|}{\|\mathbb{A}\| + \varepsilon} < 1$$

$$\Rightarrow \mathbb{B}^k \to 0 \Leftrightarrow \rho(\mathbb{B}) < 1$$

$\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$; $\vec{x}$ PŘÍSLUŠNÝ VL. VEKTOR

$$\mathbb{A}\vec{x} = \lambda \vec{x}$$

$$\mathbb{B}\vec{x} = \frac{\lambda}{\|\mathbb{A}\| + \varepsilon} \vec{x} \Rightarrow \frac{\lambda}{\|\mathbb{A}\| + \varepsilon} \in \sigma(\mathbb{B})$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda}{\|\mathbb{A}\| + \varepsilon} < 1 \Rightarrow \lambda < \|\mathbb{A}\| + \varepsilon ; \forall \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow \lambda \leq \|\mathbb{A}\| \quad \square$$

Konvergence geometrické posloupnosti matic

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{A}^k \to (\mathbb{I}-\mathbb{A})^{-1}$$

Theorem 22

Nutnou a postačující podmínkou pro to, aby řada

$$\mathbb{I} + \mathbb{A} + \mathbb{A}^2 + \ldots,$$

konvergovala je, $\mathbb{A}^k \to \theta$. *Součtem této řady je pak matice*

$$(\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1}.$$

$$\Leftrightarrow \rho(\mathbb{A}) < 1$$

Důkaz.

Video na Youtube

$$\sum_{0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-q}$$

□

$$A^k \to 0 \iff \rho(A) < 1$$

? EXISTENCE $(I - A)^{-1}$

$$A \overset{\text{SCHUR}}{=} U^* R U \quad ; \quad R \text{ MA' LA DIAG. UL. C'A}$$

- $\forall \lambda \in \sigma(A) \; ; |\lambda| < 1$

$$I - A \overset{\text{SCHUR}}{=} U^* \underbrace{(I - R)}_{\text{DIAG. } I - R \text{ DE NENULLA}} U$$

$\Rightarrow I - R$ DE REGULARNI $\Rightarrow I - A$ DE REGULARNI $\Rightarrow \exists \, (I - A)^{-1}$

$$S_k = I + A + A^2 + \dots + A^k$$

$$S_k (I - A) = I - A^{k+1} \quad | \cdot (I - A)^{-1}$$

$$S_k = (I - A)^{-1} - A^{k+1} (I - A)^{-1}$$

$$\xrightarrow[k \to \infty]{} (I - A)^{-1} \iff A^k \to \Theta$$

$\square$

Konvergence geometrické posloupnosti matic

$$\|\mathbb{A}\| < 1 \overset{V.20}{\Longrightarrow} \mathbb{A}^k \to 0 \overset{V.22}{\Longrightarrow} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{A}^k = (\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1}$$

Theorem 23

Je-li $\|\mathbb{A}\| < 1$ *pro* $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$, *pak*

$$\left\|(\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1} - \left(\mathbb{I} + \mathbb{A} + \mathbb{A}^2 + \cdots + \mathbb{A}^k\right)\right\| \leq \frac{\|\mathbb{A}\|^{k+1}}{1 - \|\mathbb{A}\|}.$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{A}^k$$

Důkaz.

Video na Youtube

□

$$\left\| \underline{(\mathbb{I}-\mathbb{A})^{-1}} - (\mathbb{I}+\mathbb{A}+\mathbb{A}^2+\dots+\mathbb{A}^{\ell}) \right\| =$$

$$= \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{A}^k - (\mathbb{I}+\mathbb{A}+\mathbb{A}^2+\dots+\mathbb{A}^{\ell}) \right\| =$$

$$= \left\| \mathbb{A}^{\ell+1} + \mathbb{A}^{\ell+2} + \dots \right\| = \left\| \mathbb{A}^{\ell+1}(\mathbb{I}+\mathbb{A}+\mathbb{A}^2\dots) \right\|$$

$$\leq \|\mathbb{A}\|^{\ell+1} \left\| \mathbb{I}+\mathbb{A}+\mathbb{A}^2+\dots \right\| \leq$$

$$\leq \|\mathbb{A}\|^{\ell+1} \left(\|\mathbb{I}\| + \|\mathbb{A}\| + \|\mathbb{A}\|^2 \dots \right) =$$

$$= \|\mathbb{A}\|^{\ell+1} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \|\mathbb{A}\|^k} = \frac{\|\mathbb{A}\|^{\ell+1}}{1-\|\mathbb{A}\|} \quad \square$$

Otázky

- **pozitivně definitní matice**
- **konvergence geometrické posloupnosti matic**
- generované maticové normy