Reprezentace čísel s pohyblivou desetinnou čárkou na počítači

Zaokrouhlovací chyby

Stabilita úlohy

Podmíněnost matic

Numerické metody

Otázky

Tomáš Oberhuber

Faculty of Nuclear Sciences and Physical Engineering
Czech Technical University in Prague

Video na Youtube

1. Reprezentace čísel s pohyblivou desetinnou čárkou na počítači
2. Zaokrouhlovací chyby
3. Stabilita úlohy
4. Podmíněnost matic
5. Numerické metody
6. Otázky

$\pi, e, \sqrt{2}$

Reprezentace čísel s pohyblivou desetinnou čárkou

Definition 1

Buď základ $\beta \in \mathbb{N}$ pevně dané číslo $\beta \geq 2$, x buď reálné číslo s konečným počtem cifer $0 \leq x_k < \beta$ pro $k = -m, \ldots, n$. Pak **poziční zápis čísla v soustavě se základem** β má tvar

927.381

$$x_\beta = (-1)^s \left[x_n x_{n-1} \ldots x_1 x_0 . x_{-1} x_{-2} \ldots x_{-m}\right],$$

kde požadujeme, aby platilo $x_n \neq 0$. s udává znaménko čísla x ($s = 0$, je-li x kladné a $s = 1$, je-li x záporné). Také lze psát

$1 \cdot 10^{-3} + 8 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{0} + 2 \cdot 10^{2} + 9 \cdot 10^{3}$

$$x_\beta = (-1)^s \left(\sum_{k=-m}^{n} x_k \beta^k \right).$$

Reprezentace čísel s pohyblivou desetinnou čárkou

Theorem 2

Libovolné reálné číslo $x \in \mathbb{R}$ lze s libovolnou přesností aproximovat reálným číslem x_β, jehož zápis v soustavě o základě β má konečný počet cifer.

Důkaz.

Stačí jen počet cifer volit dostatečně velký. $\square$

Reprezentace čísel s pohyblivou desetinnou čárkou

1234000000000,0

Remark 3

Při ukládání hodně velkých nebo hodně malých čísel v počítači nás ale uvedený způsob zápisu nutí ukládat do paměti velký počet cifer:

- $x = 0.00000000000000012348283$ - *velký počet nul*

Proto zavádíme exponenty a omezujeme maximální počet cifer zápisu daného čísla.

Reprezentace čísel s pohyblivou desetinnou čárkou

Definition 4

Buď $\beta \in \mathbb{N}, \beta > 1$ základ číselného rozvoje, $t \in \mathbb{N}$ **maximální počet povolených významných cifer** $0 \leq a_i < \beta$ pro $i \in \hat{t}$, $e \in \mathbb{N}$ exponent a s parametr vyjadřující znaménko daného čísla. Pak x zapisujeme ve tvaru

$$x = (-1)^s \cdot (0.a_1 a_2 \ldots a_t) \cdot \beta^e = (-1)^s \cdot m \cdot \beta^{e-t},$$

kde $m = a_1 a_2 \ldots a_t$ je **mantisa** čísla x.

$0,927381 \cdot 10^3$ $\quad$ $927381 \cdot 10^{-3}$

$\beta = 10$; $t = 6$

Reprezentace čísel s pohyblivou desetinnou čárkou

Remark 5

Pro jednoznačnost zápisu požadujeme, aby první cifra mantisy byla nenulová, tj. $a_1 \neq 0$*, tudíž* $m \geq \beta^{t-1}$*. Jinak by např. platilo*

$$1 = 0.100 \cdot 10^1 = 0.010 \cdot 10^2 = 0.001 \cdot 10^3.$$

Definition 6

Zápisu čísla, který splňuje podmínku, že $a_1 \neq 0$, se říká **normalizovaný**.

Reprezentace čísel s pohyblivou desetinnou čárkou

Remark 7

Všimněme si, že normalizovaný zápis čísla **neumožňuje** *zapsat číslo 0! Nula bývá definována speciálně - to uvidíme později.*

$(-1)^{s} \; 0{,}10000 \cdot \beta^{t}$

$\neq 0 \qquad \neq 0$

Definition 8

Definujeme **množinu čísel s pohyblivou desetinou čárkou** jako

$0{,}927381 \cdot 10^{3}; \; e = 3$

$10^{-1} \; 10^{-2} \; \ldots \; 10^{-6}$

$$\mathbb{F}(\beta, t, L, U) \equiv \{0\} \cup \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = (-1)^{s} \beta^{e} \sum_{i=1}^{t} a_i \beta^{-i} \right\},$$

kde $\beta \in \mathbb{N}, \beta > 1$ určuje základ rozvoje $t \in \mathbb{N}, t > 0$ určuje počet významných cifer, a pro exponent $e \in \mathbb{N}$ platí $L \leq e \leq U$.

Reprezentace čísel s pohyblivou desetinnou čárkou

Remark 9

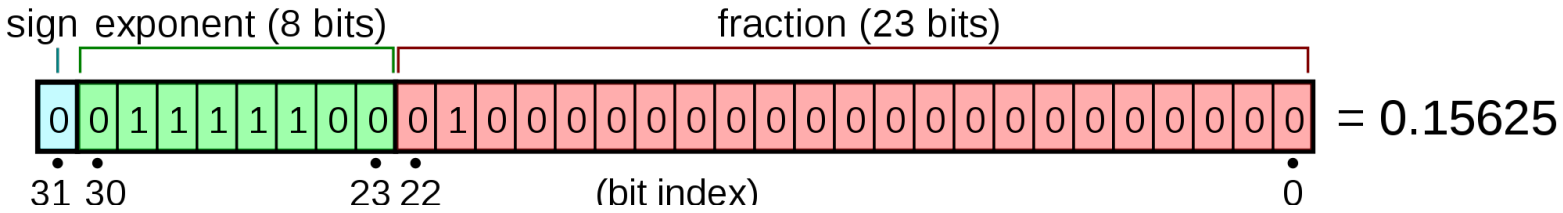
- *při práci s počítačem nejčastěji používáme základy* $\beta = 2, 10, 16$
- *interně počítače pracují nejčastěji se základy* 2*, výjimečně i* 10
- *při binárním tj.* $\beta = 2$ *zpracování čísel s pohyblivou desetinou čárkou je potřeba (je-li k dispozici N bitů)*
  - 1 *bit pro uložení znaménka s*
  - *t bitů pro uložení mantisy m*
  - $N - t - 1$ *bitů pro uložení exponentu e*

Reprezentace čísel s pohyblivou desetinnou čárkou

Standard IEEE (Institute of Electrictal and Electronics Engineers) definuje **jednoduchou a dvojitou přesnost** (single and double precision)

Reprezentace čísel s pohyblivou desetinnou čárkou

Single precision (32 bitů = 4 bajty)

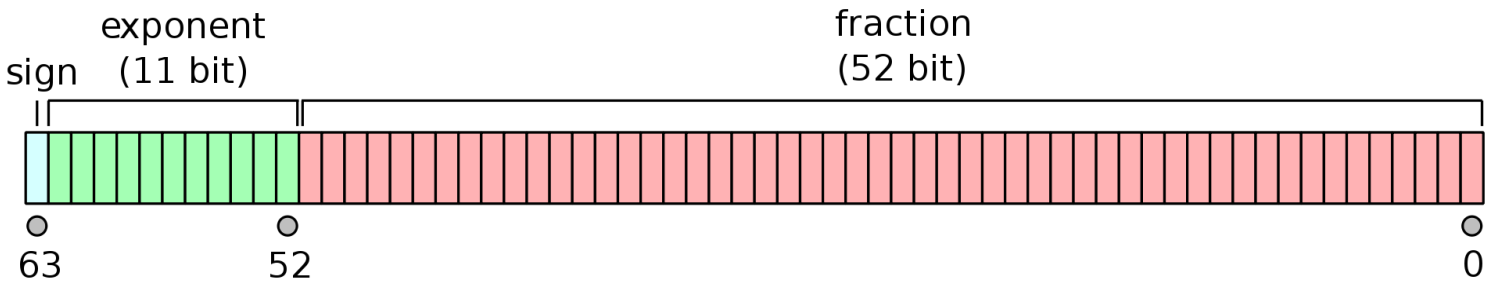


- 1 bit pro znaménko
- 8 bitů pro exponent ($L = -126, U = 127$) → 254
- 23 bitů pro mantisu (0–8 388 608)

0–255 ; 256

Reprezentace čísel s pohyblivou desetinnou čárkou

Double precision (64 bitů = 8 bajtů)



2048 HODNOT

2046 HODNOT

- 1 bit pro znaménko
- 11 bitů pro exponent ($L = -1\,022$, $U = 1\,023$)
- 52 bitů pro mantisu (0–4 503 599 627 370 496)

15 CIFER

Reprezentace čísel s pohyblivou desetinnou čárkou

Standard IEEE dále definuje denormalizovaná čísla:

hodnota	exponent	mantisa
± 0	$L-1$	0
$\pm\infty$	$U+1$	0
NaN	$U+1$	$\neq 0$

NaN znamená - **Not a Number**. Nastává při nedefinovaných operacích, např.

- dělení nulou
- odmocnina nebo logaritmus ze záporného čísla
- ...

Reprezentace čísel s pohyblivou desetinnou čárkou

Jaké je rozložení množiny $\mathbb{F}(\beta, t, L, U)$ v $\mathbb{R}$?

Example 10

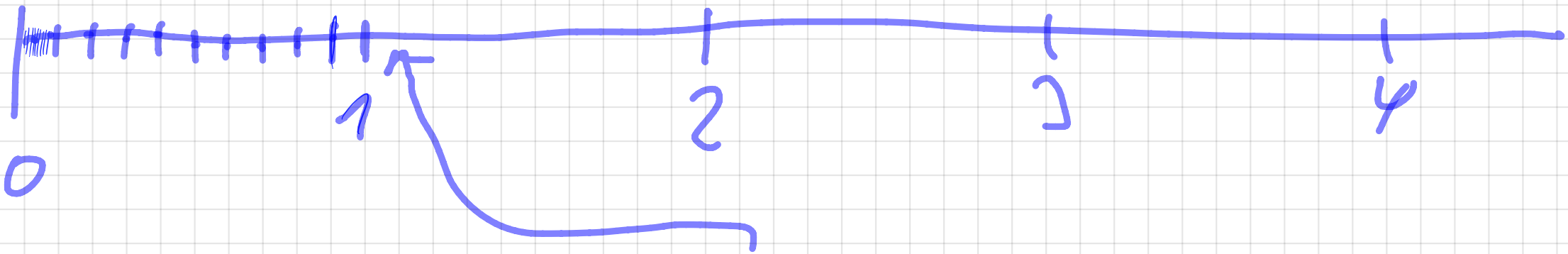
Buď $t = 1$, $\beta = 10$, $L = -2$, $U = 2$. $\mathbb{F}(\beta, t, L, U)$ obsahuje nulu a následující čísla [1]:

	$e = -2$	$e = -1$	$e = 0$	$e = 1$	$e = 2$
$a_1 = 1$	0.01	0.1	1	10	100
$a_1 = 2$	0.02	0.2	2	20	200
$a_1 = 3$	0.03	0.3	3	30	300
$a_1 = 4$	0.04	0.4	4	40	400
$a_1 = 5$	0.05	0.5	5	50	500
$a_1 = 6$	0.06	0.6	6	60	600
$a_1 = 7$	0.07	0.7	7	70	700
$a_1 = 8$	0.08	0.8	8	80	800
$a_1 = 9$	0.09	0.9	9	90	900

$\cup \{\emptyset\}$

[1] A k nim i čísla s opačným znaménkem.

$F(10,1,-2,2)$ $\mathbb{R}$



$1+0{,}1 = 1{,}1 \notin F$

$1{,}1 \simeq 1$ ZAOKROUHLENÍ

Reprezentace čísel s pohyblivou desetinnou čárkou

Remark 11

Množina $\mathbb{F}(\beta, t, L, U)$ *není uzavřena vůči základním aritmetickým operacím sčítání, odčítání, násobení a dělení.*

Example 12

$x_1 = 1 \in \mathbb{F}(10, 1, -2, 2)$, $x_2 = 0.1 \in \mathbb{F}(10, 1, -2, 2)$, ale $x_1 + x_2 = 1.1 \notin \mathbb{F}(10, 1, -2, 2)$.

Remark 13

Abychom dokázali výsledek zpracovat, musíme provést **zaokrouhlení** *na nejbližší číslo v* $\mathbb{F}(10, 1, -2, 2)$ *tj.* 1*. Tak vznikají* **zaokrouhlovací chyby** *– rounding errors. Takto definované operace, tj. nejprve přesně provedená operace a následné zaokrouhlení do množiny* $\mathbb{F}$ *budeme označovat s indexem fl. Například* $+_{fl}$, $-_{fl}$ *apod.*

Zaokrouhlovací chyby

Example 14

Mějme $\mathbb{F}(10, 2, -5, 5)$ a počítejme součet

$$10 + \underbrace{0.1 + 0.1 \ldots + 0.1}_{10\times\ 100\times,\ 1000\times}.$$

Postupně dostáváme

10,1 → 10

$$10 +_{fl} 0.1 = 10$$

a celý výsledek je nakonec 10.

11, 20, 110

Zaokrouhlovací chyby

$\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^{1,000,000}$

$(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \bar{y}_i$

Example 15

Mějme $\mathbb{F}(10, 2, -5, 5)$ a počítejme součet

$$\underbrace{0.1 + \ldots + 0.1}_{10\times} + 10.$$

$0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}3$

$\vdots$

$0{,}9 + 0{,}1 = 1$

Postupně dostáváme

$$0.1 +_{fl} 0.1 = 0.2$$

a na konec

$$1.0 + 10 = 11.$$

Zaokrouhlovací chyby

Remark 16

Z příkladu vidíme, že pokud sčítáme řádově hodně rozdílná čísla, mantisa nedokáže tento rozdíl pokrýt a větší číslo "přebije" menší.

Zaokrouhlovací chyby

- jednoduchá přesnost bývá pro inženýrské úlohy často málo přesná → 32 BITŮ
- dvojitá přesnost se ukazuje pro většinou reálných úloh dostatečná → 64 BITŮ
- vycházíme z toho, že v reálných úlohách pracujeme s čísly přibližně stejných řádů
  - tj. "buď na úrovni atomů nebo galaxií"

Stabilita úlohy

- viděli jsme, že během výpočtu se nevyhneme vzniku chyb a nepřesností
- stejně tak vstupní data jsou často naměřená experimentálně a jsou poškozenou chybou měření
- bude nás zajímat, jak se to může projevit na konečném řešení

Stabilita úlohy

Předpokládáme, že řešíme úlohu

$$F\left(\vec{x}, \vec{d}\right) = \vec{0}$$

- F je funkční zobrazení vyjadřující úlohu
- $\vec{d}$ jsou data nebo parametry úlohy
- $\vec{x}$ je řešení úlohy

Stabilita úlohy

Example 17

- řešení lineárního systému - $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow \mathbb{A}\vec{x} - \vec{b} = \vec{0}$ a tedy $F\left(\vec{x}, \vec{d}\right) = \mathbb{A}\vec{x} - \vec{b} = \vec{0}$, kde $\vec{d} \equiv \left\{\mathbb{A}, \vec{b}\right\}$
- výpočet inverzní matice - $\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{I} \Leftrightarrow \mathbb{A}\mathbb{A}^{-1} - \mathbb{I} = \theta$ a tedy $F\left(\vec{x}, \vec{d}\right) = \mathbb{A}\mathbb{A}^{-1} - \mathbb{I} = \vec{0}$, kde $\vec{d} = \mathbb{A}$ a $\vec{x} = \mathbb{A}^{-1}$
- výpočet vlastních čísel - hledáme $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, tj.

$$\begin{aligned} \det\left(\mathbb{A} - \lambda_1 \mathbb{I}\right) &= 0, \\ &\vdots \quad , \\ \det\left(\mathbb{A} - \lambda_n \mathbb{I}\right) &= 0, \end{aligned}$$

tj. $\vec{x} \equiv \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ a $\vec{d} \equiv \mathbb{A}$.

$\vec{u}(\vec{x},t)$ $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$

Stabilita úlohy

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\Delta u \Rightarrow A\vec{x} = \vec{b}$$

Definition 18

Řekneme, že úloha je **dobře položená** (well posed) nebo **stabilní** (stable), pokud má jednoznačné řešení $\vec{x}$, které závisí spojitě na vstupních datech $\vec{d}$ a pro jejich malou změnu $\delta\vec{d}$ existuje řešení

$$F(\vec{x} + \delta\vec{x}, \vec{d} + \delta\vec{d}) = 0,$$

kde $\delta\vec{x}$ je malé. Tj. **malá změna vstupních dat způsobí malou změnu řešení**.

Pokud úloha nesplňuje výše uvedené, pak říkáme, že je **špatně položená** (ill posed) nebo **nestabilní** (unstable).

Stabilita úlohy

Definition 19

Pro regulární čtvercovou matici $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$, definujeme **číslo podmíněnosti matice** jako

$$\kappa(\mathbb{A}) = \|\mathbb{A}\| \left\|\mathbb{A}^{-1}\right\| .$$

Je-li $\kappa(\mathbb{A})$ malé, řekneme, že matice je dobře podmíněná. Jinak je špatně podmíněná.

Podmíněnost matic

Example 20

Mějme soustavu

$$
\begin{aligned}
20x + 16y + 9z &= 45 \\
14x + 15y + 11z &= 40 \\
13x + 17y + 14x &= 44
\end{aligned}
$$

Řešením ve vektor $(1, 1, 1)^T$.

- Pokud pravou stranu změníme o 0.1 na $\vec{b} = (45.1, 39.9, 44.1)^T$, řešením je $\vec{x} = (-12.5, 32, -24.1)^T$.
- Pokud pravou stranu změníme o 0.01 na $\vec{b} = (45.01, 39.99, 44.01)^T$, řešením je $\vec{x} = (-0.25, 4.1, -1.51)^T$.

Podmíněnost matic

Theorem 21

Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ *je regulární. Buď* $\vec{x}$ *řešení soustavy* $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b} \neq \vec{0}$ *a perturbace* $\delta\vec{x}, \delta\vec{b}$ *takové, že platí* $\mathbb{A}\left(\vec{x} + \delta\vec{x}\right) = \vec{b} + \delta\vec{b}$. *Pak platí*

$$\frac{\left\|\delta\vec{x}\right\|}{\left\|\vec{x}\right\|} \leq \kappa\left(\mathbb{A}\right) \frac{\left\|\delta\vec{b}\right\|}{\left\|\vec{b}\right\|},$$

a jde-li o indukovanou maticovou normu, pak existuje nenulový vektor $\vec{b}$ *a nenulová perturbace* $\delta\vec{b}$ *takové, že nastává rovnost.*

Důkaz.

Video na Youtube

$\frac{1}{K(A)}$ = BLÍZKOST A K NĚKTERÉ SINGULÁRNÍ MATICI

□

$$\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$$

$$\|\vec{b}\| = \|\mathbb{A}\vec{x}\| \le \|\mathbb{A}\|\,\|\vec{x}\| \quad (*)$$

$$\mathbb{A}(\vec{x} + \delta\vec{x}) = b + \delta\vec{b}$$

$$\cancel{\mathbb{A}\vec{x}} + \mathbb{A}\delta\vec{x} = \cancel{b} + \delta\vec{b} \quad \Big| - \{\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}\}$$

$$\mathbb{A}\delta\vec{x} = \delta\vec{b}$$

$$\delta\vec{x} = \mathbb{A}^{-1}\delta\vec{b}$$

$$\|\delta\vec{x}\| = \|\mathbb{A}^{-1}\delta\vec{b}\| \le \|\mathbb{A}^{-1}\|\,\|\delta\vec{b}\| \quad (**)$$

$$(*)\cdot(**) \quad \|\vec{b}\|\,\|\delta\vec{x}\| \le \underbrace{\|\mathbb{A}\|\,\|\mathbb{A}^{-1}\|}_{K(\mathbb{A})}\,\|\delta\vec{b}\|\,\|\vec{x}\|$$

$$\frac{\|\delta\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} \le K(\mathbb{A})\,\frac{\|\delta\vec{b}\|}{\|\vec{b}\|} \quad \checkmark$$

$\|\cdot\|$ – INDUKOVANÁ MATICOVÁ NORMA

$$\|\mathbb{A}\| = \max_{\|\vec{x}\|=1} \|\mathbb{A}\vec{x}\| \qquad \vec{x} = \arg\max_{\|\vec{x}\|=1} \|\mathbb{A}\vec{x}\|$$

$$\exists\,\vec{x};\ \|\vec{x}\| = 1;\quad \|\mathbb{A}\| = \|\mathbb{A}\vec{x}\| = \|\mathbb{A}\|\,\underbrace{\|\vec{x}\|}_{=1}$$

$$b = \mathbb{A}\vec{x}$$

$$\Rightarrow \|\vec{b}\| = \|\mathbb{A}\vec{x}\| = \|\mathbb{A}\|\,\|\vec{x}\|$$

$$\exists\, \delta\vec{b}\,;\ \|\delta\vec{b}\| = 1\,;\quad \|A^{-1}\| = \|A^{-1}\delta\vec{b}\| = \|A^{-1}\|\,\underbrace{\|\delta\vec{b}\|}_{=1}$$

$$\delta\vec{b} = \arg\max_{\|\delta\vec{b}\|=1} \|A^{-1}\delta\vec{b}\|$$

$$\delta\vec{x} = A^{-1}\delta\vec{b} \Rightarrow \|\delta\vec{x}\| = \|A^{-1}\delta\vec{b}\| = \|A^{-1}\|\,\|\delta\vec{b}\|$$

$$\|\vec{b}\| = \|A\vec{x}\| = \|A\|\,\|\vec{x}\|$$

$$\|\delta\vec{x}\|\,\|\vec{b}\| = \underbrace{\|A\|\,\|A^{-1}\|}_{K(A)}\,\|\vec{x}\|\,\|\delta\vec{b}\|$$

$$\frac{\|\delta\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} = K(A)\,\frac{\|\delta\vec{b}\|}{\|\vec{b}\|}$$

$\square$

Numerické metody

Podobně jako pro úlohy, definujeme stabilitu i pro numerické metody.

Definition 22

Řekneme, že numerická metoda je stabilní, pokud při její aplikaci na **stabilní úlohu** způsobí malá změna vstupních parametrů jen malou změnu výsledku.

Remark 23

Malá změna vstupních parametrů je často způsobena zaokrouhlovacími chybami počítačové aritmetiky.

Numerické metody

Základní dělení numerických metod je na:

- přímé
- iterační

Numerické metody - přímé

- po konečném počtu kroků dávají teoreticky přesné řešení
- prakticky ale díky konečné přesnosti počítačové aritmetiky a zaokrouhlovacím chybám dávají pouze přibližné řešení
- řešení získáme až v posledním kroku, do té doby nemáme nic
- jsou robustnější = fungují pro širší třídu úloh
- lze u nich lépe předpovědět zda budou fungovat nebo ne
- z těchto důvodu jsou upřednostňovány v některých kritických průmyslových aplikacích

Numerické metody - iterační

- k přesnému řešení pouze konvergují a to jen teoreticky
- výsledkem metody je posloupnost $\left\{\vec{x}^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ zpřesňujících se aproximací přesného řešení
- jedna iterace by měla být napočítaná mnohem rychleji, než výpočet přímé metody řešící stejný problém
- iterační metody jsou většinou snazší na implementaci
- máme-li dobrý počáteční odhad přesného řešení, může být iterační metoda výrazně rychlejší
- většina numerických metod je iteračních

Analýza iteračních numerických metod

- pro iterační metody je velmi důležité umět odhadnout chybu aproximace řešení jinak ani nevíme, kdy ukončit výpočet
- využijeme vztahu

$$\vec{x}^{(k)} \to \vec{x} \Rightarrow F\left(\vec{x}^{(k)}, \vec{d}\right) \to \vec{0}$$

k následující definici

$F = A\vec{x} - \vec{b} = \Theta$

Definition 24

Buď $\|\cdot\|$ nějaká vektorová norma, pak číslo

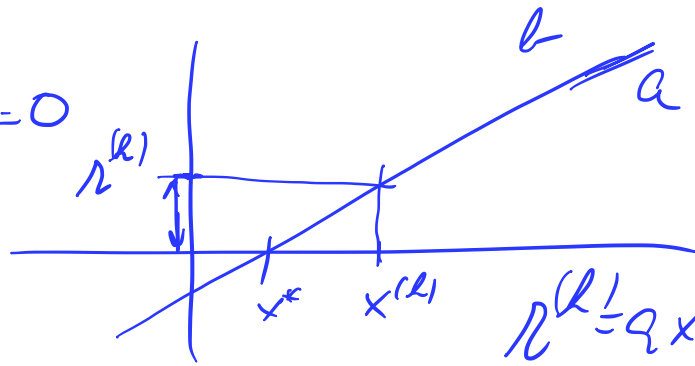
$$r^{(k)} = \left\| F\left(\vec{x}^{(k)}, \vec{d}\right) \right\|, = \| A\vec{x}^{(k)} - \vec{b} \|$$

nazýváme **reziduem** k**-té aproximace**.

Analýza iteračních numerických metod

$ax - b = 0$

$f(x) = ax - b = 0$



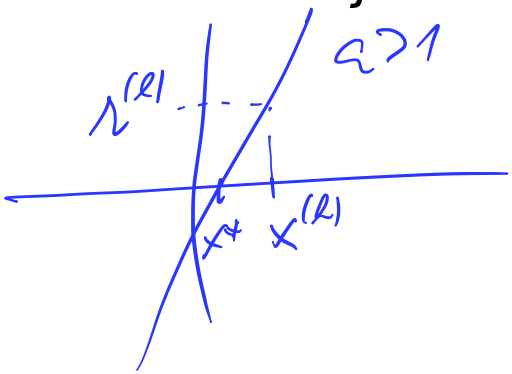
$r^{(k)} = a x^{(k)} - b = f(x^{(k)})$

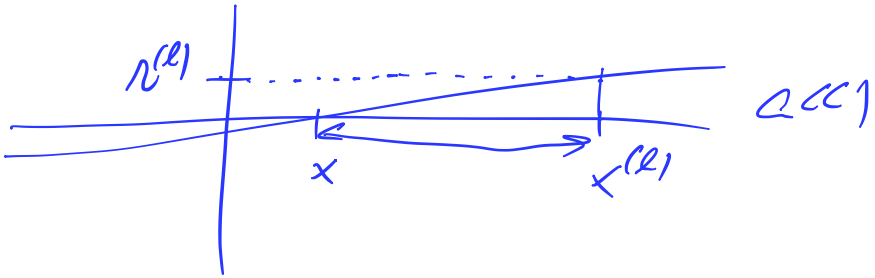
Remark 25

- *pro řešení soustavy* $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$ *máme*

$$r^{(k)} = \left\| F\left(\vec{x}^{(k)}, \vec{d}\right) \right\| = \left\| \mathbb{A}\vec{x} - \vec{b} \right\| .$$

- *bohužel neplatí, že je-li malé* $r^{(k)}$*, je malé i* $\left\| \vec{x}^{(k)} - \vec{x} \right\|$
- *reziduum je ale většinou to jediné, co máme*





Analýza iteračních numerických metod

- pokud provádíme analýzu pouze na základě znalosti F a $\vec{d}$, jde o **apriorní odhad**, tj. takový, který lze provést před výpočtem vlastní metody
- pokud provádíme analýzu i na základě znalosti $\vec{x}^{(k)}$, jde o **aposteriorní odhad**, tj. takový, který lze provést až po výpočtu několika iterací vlastní metody

Apriorní odhady

- apriorní odhady mají spíše teoretický význam
- obecně takový odhad vypadá takto

$$\left\| \vec{x}^{(k)} - \vec{x} \right\| \leq C\left(F, \vec{d}\right) \left\| \vec{x}^{(k-1)} - \vec{x} \right\|^{r},$$

kde, $C\left(F, \vec{d}\right) > 0$ a $r \in N^{+}$ je řád metody.

Apriorní odhady

- r udává řád metody
- např. u metody druhého řádu stačí napočítat polovinu iterací k získání stejně přesné aproximace v porovnání s metodou prvního řádu
- metody vyšších řádů než dva bývají v praxi často velmi nestabilní a např. špatný počáteční odhad $\vec{x}^{(0)}$ může způsobit, že metoda ani nekonverguje
- obecně panuje snaha vytvářet metody, které dávají dobrý odhad po pár iteracích
- **v praxi je ale tím nejdůležitějším měřítkem doba výpočtu nutná pro dosažení požadované přesnosti !!!**
  - lze sestrojit metody, které konvergují po pár krocích, ale jedna iterace trvá celou věčnost

Aposteriorní odhady

- aposteriorní odhady využívají navíc znalosti $\vec{x}^{(k)}$, tj. mají tvar

$$\left\|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}\right\| \leq C\left(F, \vec{d}, \vec{x}^{(k)}\right)\left\|\vec{x}^{(k-1)} - \vec{x}\right\|^{r},$$

k-1

- ze své podstaty by měly být přesnější než apriorní odhady
- mají dobré praktické použití
  - bývají základem adaptivních metod, které se umějí přizpůsobit konkrétní řešené úloze

Zdroje chyb počítačových simulací

Chyby, které vznikají při řešení reálných úloh...

Reálný problém $\xrightarrow[\textit{Chyba modelu}]{\textit{Matemat. popis}}$ matematický model $\xrightarrow[\textit{Chyba diskretizace}]{\textit{Diskretizace}}$ numerický model (algebraický model) $\xrightarrow[\textit{Chyba linearizace}]{\textit{Linearizace}}$ lineární algebraický model $\xrightarrow[\textit{Zaokrouhlovaci chyby}]{\textit{Reseni}}$ aproximace řešení.

... lze rozdělit do čtyř skupin:

Zdroje chyb počítačových simulací

- chyby způsobené samotným modelem - fyzikálním, matematickým
- chyby vzniklé při měření vstupních dat pomocí experimentů
- chyby vzniklé diskretizací tj. náhradou nekonečných limit konečným počtem operací
- chyby vzniklé zaokrouhlováním z důvodů aritmetiky s konečnou přesností

Otázky

- reprezentace čísel s pohyblivou desetinnou čárkou
- jednoduchá a dvojitá přesnost
- **zaokrouhlovací chyby** $10 + 0{,}1$
- **podmíněnost matice**
- **řád metody**