Tomáš Oberhuber

Faculty of Nuclear Sciences and Physical Engineering
Czech Technical University in Prague

CHCEME RYCHLEJŠÍ METODU NEŽ GEM – $O(n^3)$

1. Iterativní metody
2. Stacionární metody
3. Metoda postupných aproximací
4. Předpodmínění

Iterativní metody

Budeme se zabývat metodami pro řešení úlohy $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$ s regulární maticí $\mathbb{A}$. **Chceme najít efektivnější metody, než je GEM.**

n^3

- iterativní metody generují posloupnost $\left\{\vec{x}^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$, která konverguje k řešení soustavy

$$\lim_{k\to\infty} \vec{x}^{(k)} = \vec{x}^*$$

- prakticky tak (obecně) nikdy nedostaneme přesné řešení, ale můžeme dostat (téměř) libovolně přesnou aproximaci

Iterativní metody obecně

- obecně platí, že volíme libovolné $\vec{x}^{(0)}$ a dále napočítáváme

$$\vec{x}^{(k+1)} = \mathbb{B}^{(k)}\vec{x}^{(k)} + \vec{c}^{(k)},$$

  kde volba $\mathbb{B}^{(k)}$ a $\vec{c}^{(k)}$ záleží na použité metodě
- dále požadujeme, aby pro všechna k platilo

$$\vec{x}^{*} = \mathbb{B}^{(k)}\vec{x}^{*} + \vec{c}^{(k)},$$

  kde $\vec{x}^{*}$ je přesné řešení soustavy $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$

Iterativní metody obecně

Theorem 1

Iterativní metoda tvaru

$$\vec{x}^{(k+1)} = \mathbb{B}^{(k)}\vec{x}^{(k)} + \vec{c}^{(k)},$$

splňující

$$\vec{x}^{*} = \mathbb{B}^{(k)}\vec{x}^{*} + \vec{c}^{(k)},$$

konverguje k $\vec{x}^{*}$ pro libovolné $\vec{x}^{(0)}$ právě když,

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{B}^{(k)}\mathbb{B}^{(k-1)}\dots\mathbb{B}^{(0)} = \theta.$$

$$\mathbb{M}^{(k)} = \mathbb{B}^{(k)}\mathbb{B}^{(k-1)}\dots\mathbb{B}^{(0)}$$

Důkaz.

Video na Youtube

$$\mathbb{M}^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} \theta$$

□

$$\vec{x}^{(k+1)} = \mathbb{B}^{(k)} \vec{x}^{(k)} + \vec{c}^{(k)}$$

$$\vec{x}^{*} = \mathbb{B}^{(k)} \vec{x}^{*} + c^{(k)} \quad \forall k = 1, \dots,$$

$$\vec{x}^{(k)} - \vec{x}^{*} = \mathbb{B}^{(k-1)} \vec{x}^{(k-1)} + \cancel{\vec{c}^{(k-1)}} - \mathbb{B}^{(k-1)} \vec{x}^{*} - \cancel{\vec{c}^{(k-1)}} =$$

$$= \mathbb{B}^{(k-1)} \left(\vec{x}^{(k-1)} - \vec{x}^{*} \right) = \dots =$$

$$= \mathbb{B}^{(k-1)} \mathbb{B}^{(k-2)} \left(\vec{x}^{(k-2)} - \vec{x}^{*} \right) = \dots =$$

$$= \mathbb{B}^{(k-1)} \mathbb{B}^{(k-2)} \dots \mathbb{B}^{(0)} \left(\vec{x}^{(0)} - \vec{x}^{*} \right)$$

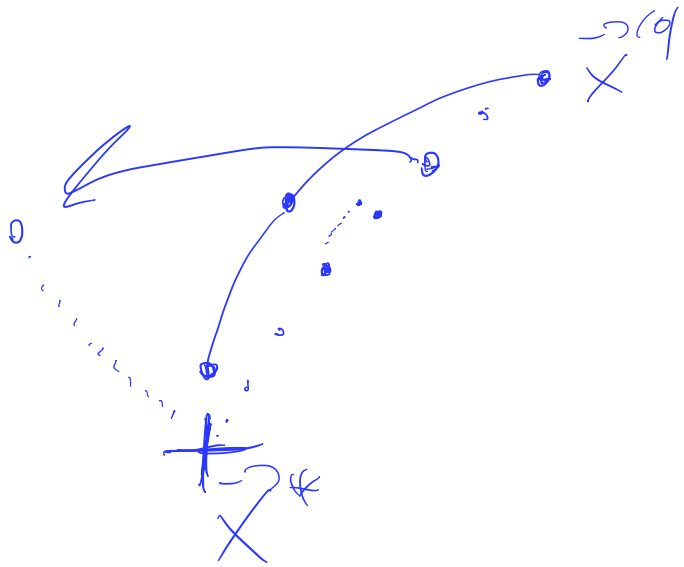
$$\Rightarrow \vec{x}^{(k)} - \vec{x}^{*} \xrightarrow[k \to \infty]{} \Theta \iff \mathbb{B}^{(k-1)} \mathbb{B}^{(k-2)} \dots \mathbb{B}^{(0)} \xrightarrow[k \to \infty]{} \Theta$$

$\square$

Citlivost a stabilita iterativních metod

$\vec{x}^{(k)} \to \vec{x}^{(0)}$

- pokud během výpočtu dojde k nějaké chybě, třeba vinou zaokrouhlení, můžeme se na výsledný vektor dívat jako na nové $\vec{x}^{(0)}$, **které může být libovolné** a metoda bude konvergovat i tak
- chyby ve výpočtech se tedy nekumulují, ale eliminují
- jde o tzv. **samoopravující** vlastnost iterativních metod
- tím pádem již dále nemusíme studovat citlivost iterativních metod na výpočetní chyby



$$\boxed{\text{PEVNÝ BOD}}$$

$$\boxed{D\vec{x} = \vec{c}}$$

Iterativní metody obecně

$O(n^2) \Rightarrow$ CHCEME VÝRAZNĚ MÉNĚ ITERACÍ NEŽ n, JINAK $O(n^2)$

Iterativní metody pro řešení lineárních soustav se dělí na:

- **stacionární** – $\mathbb{B}^{(k)}$ a $\vec{c}^{(k)}$ jsou konstantní tj.

$$\vec{x}^{(k+1)} = \underbrace{\mathbb{B}}_{O(n^2)}\underbrace{\vec{x}^{(k)}}_{O(n)} + \vec{c} \rightarrow O(n^2)$$

- **nestacionární** – $\mathbb{B}^{(k)}$ a $\vec{c}^{(k)}$ jsou různé pro každé k

Výhoda stacionárních metod je, že pracujeme jen s jednou maticí. Jsou proto jednodušší na implementaci a také na numerickou analýzu. Dále budeme studovat pouze stacionární metody.

Stacionární iterativní metody

Theorem 2

Metoda daná vztahem

$$\vec{x}^{(k+1)} = \mathbb{B}\vec{x}^{(k)} + \vec{c}$$

a splňující

$$\vec{x}^{*} = \mathbb{B}\vec{x}^{*} + \vec{c},$$

konverguje k $\vec{x}^{*}$ *pro libovolné* $\vec{x}^{(0)}$ *právě když platí,*

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{B}^{k} = \theta.$$

Důkaz.

Plyne z věty 1 a

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{B}^{(k-1)} \ldots \mathbb{B}^{(0)} = \lim_{k\to\infty} \mathbb{B}^{k}.$$

Stacionární iterativní metody

Theorem 3

Metoda daná vztahem

$$\vec{x}^{(k+1)} = \mathbb{B}\vec{x}^{(k)} + \vec{c},$$

a splňující

$$\vec{x}^{*} = \mathbb{B}\vec{x}^{*} + \vec{c},$$

konverguje k $\vec{x}^{*}$ *pro libovolné* $\vec{x}^{(0)}$ *právě když platí, že* $\rho(\mathbb{B}) < 1$.

Důkaz.

Plyne z podmínek pro konvergenci posloupnosti $\mathbb{B}^k$. □

Stacionární iterativní metody

Theorem 4

Postačující podmínkou pro to, aby metoda daná vztahem

$$\vec{x}^{(k+1)} = \mathbb{B}\vec{x}^{(k)} + \vec{c},$$

a splňující

$$\vec{x}^{*} = \mathbb{B}\vec{x}^{*} + \vec{c},$$

konvergovala k $\vec{x}^{*}$ *pro libovolné* $\vec{x}^{(0)}$ *je, že* $\|\mathbb{B}\| < 1$ *v nějaké maticové normě* $\|\cdot\|$.

Důkaz.

Plyne z podmínek pro konvergenci posloupnosti $\mathbb{B}^k$. $\square$

Stacionární iterativní metody

Theorem 5

Aposteriorní odhady chyb pro stacionární iterativní metody: *Pro metodu danou vztahem*

$$\vec{x}^{(k+1)} = \mathbb{B}\vec{x}^{(k)} + \vec{c},$$

$? \; \|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}^*\| \; ?$

a splňující

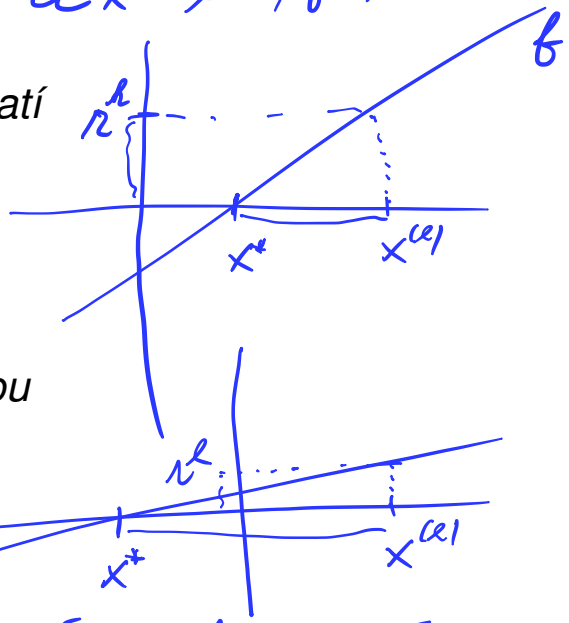
$$\vec{x}^* = \mathbb{B}\vec{x}^* + \vec{c},$$

$ax = b \; ; \; f(x) = ax + b$

kde $\vec{x}^*$ je řešením soustavy lineárních rovnic $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$, platí následující odhady chyby aproximace řešení:

- $\left\|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}^*\right\| \leq \left\|\mathbb{A}^{-1}\right\| \left\|\mathbb{A}\vec{x}^{(k)} - \vec{b}\right\| = \left\|\mathbb{A}^{-1}\right\| \left\|\vec{r}^{(k)}\right\|,$
- $\left\|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}^*\right\| \leq \left\|(\mathbb{I} - \mathbb{B})^{-1}\right\| \cancel{\|\mathbb{B}\|} \left\|\vec{x}^{(k-1)} - \vec{x}^{(k)}\right\|,$

při použití souhlasné maticové normy s danou vektorovou normou.



Remark 6

Zde jsme použili definici rezidua v k-té iteraci

$$\vec{r}^{(k)} = \mathbb{A}\vec{x}^{(k)} - \vec{b}.$$

a MALÉ $\quad \frac{1}{a}$ VELKÉ

$K(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ $\quad \uparrow \|A^{-1}\|$

Důkaz.

Video na Youtube

- $\vec{x}^{(k)} - \vec{x}^{*} = \mathbb{A}^{-1}(\mathbb{A}\vec{x}^{(k)} - \underbrace{\mathbb{A}\vec{x}^{*}}_{\vec{b}}) =$

$\mathbb{A}\vec{x}^{*} = \vec{b}$

$= \mathbb{A}^{-1}(\mathbb{A}\vec{x}^{(k)} - \vec{b}) = \mathbb{A}^{-1}\vec{r}^{(k)}$

$$\vec{x}^{(k)} - \vec{x}^{*} = \mathbb{A}^{-1}\vec{r}^{(k)}$$

$$\|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}^{*}\| \leq \|\mathbb{A}^{-1}\| \, \|\vec{r}^{(k)}\|$$

- $\vec{x}^{*} = \mathbb{B}\vec{x}^{*} + \vec{c} \iff (\mathbb{I} - \mathbb{B})\vec{x}^{*} = \vec{c} \iff$

$\vec{x}^{*} = (\mathbb{I} - \mathbb{B})^{-1}\vec{c}$

$\mathbb{B} \overset{\text{SCHUR}}{=} \mathbb{U}^{*}\mathbb{R}\mathbb{U} \Rightarrow \mathbb{I} - \mathbb{B} = \mathbb{U}^{*}(\mathbb{I} - \mathbb{R})\mathbb{U}$

$\vec{x}^{(k)}$ KONVERGUJE $\iff \rho(\mathbb{B}) < 1 \iff |r_{ii}| < 1$

$\mathbb{I} - \mathbb{R}$ MÁ NENULOVÉ DIAGONÁLU $\Rightarrow$

$\mathbb{I} - \mathbb{R}$ JE REGULÁRNÍ $\Rightarrow \mathbb{I} - \mathbb{B}$ JE REG.

$\|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}^{*}\| = \|\vec{x}^{(k)} - (\mathbb{I} - \mathbb{B})^{-1}\vec{c}\| =$

$\|(\mathbb{I} - \mathbb{B})^{-1}[(\mathbb{I} - \mathbb{B})\vec{x}^{(k)} - \vec{c}]\| =$

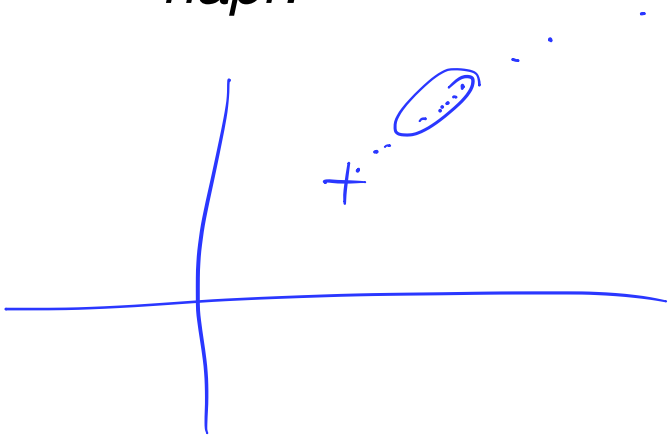
$\|(\mathbb{I} - \mathbb{B})^{-1}(\vec{x}^{(k)} - \underbrace{(\mathbb{B}\vec{x}^{(k)} + \vec{c})}_{\vec{x}^{(k+1)}})\| =$

$\leq \|(\mathbb{I} - \mathbb{B})\|^{-1} \|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}^{(k+1)}\|$ $\square$

Stacionární iterativní metody

Remark 7

- *aposteriorní odhady chyb jsou důležité pro zjištění, kdy výpočet metody zastavit a to sice tehdy, je-li* $\left\|\vec{r}^{(k)}\right\|$ *nebo* $\left\|\vec{x}^{(k-1)} - \vec{x}^{(k)}\right\|$ *dostatečně malé*
- *pojem "dostatečně malé" se často vztahuje k normě matice* $\mathbb{A}$ *nebo pravé strany* $\vec{b}$ *rovnice, tj. požadujeme např.*



$$\frac{\left\|\vec{r}^{(k)}\right\|}{\left\|\vec{b}\right\|} < \epsilon$$

Stacionární iterativní metody

Theorem 8

Apriorní odhad chyby pro stacionární iterativní metody:
Buď $\|B\| < 1$ *v nějaké maticové normě. Pak pro posloupnost* $\left\{\vec{x}^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ *generovanou předpisem*

$$\vec{x}^{(k+1)} = \mathbb{B}\vec{x}^{(k)} + \vec{c},$$

a splňující

$$\vec{x}^{*} = \mathbb{B}\vec{x}^{*} + \vec{c},$$

platí

$$\left\|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}^{*}\right\| \leq \|\mathbb{B}\|^{k}\left[\left\|\vec{x}^{(0)}\right\| + \frac{\|\vec{c}\|}{1 - \|\mathbb{B}\|}\right],$$

kde použitá maticová norma je souhlasná s použitou vektorovou normou.

$\|\mathbb{B}\| = 0{,}99$ $\|\mathbb{B}\| = 10^{-2}$

$\|\mathbb{B}\| = 0{,}1$

Důkaz.

Video na Youtube

- $\vec{x}^* = (\mathbb{I} - \mathbb{B})^{-1}\vec{c}$ $\qquad \mathbb{B}^2\vec{x}^{(k-2)} + \mathbb{B}\vec{c} + \vec{c}$
- $\vec{x}^{(k)} = \mathbb{B}\vec{x}^{(k-1)} + \vec{c} = \mathbb{B}(\mathbb{B}\vec{x}^{(k-2)} + \vec{c}) + \vec{c} =$

$$= \dots = \mathbb{B}^k\vec{x}^{(0)} + \sum_{i=0}^{k-1}\mathbb{B}^i\vec{c}$$

- $\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{B}^k = (\mathbb{I} - \mathbb{B})^{-1}$; $\rho(\mathbb{B}) < 1$

$$\|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}^*\| = \|\mathbb{B}^k\vec{x}^{(0)} + \sum_{i=0}^{k-1}\mathbb{B}^i\vec{c} - (\mathbb{I} - \mathbb{B})^{-1}\vec{c}\| =$$

$$= \|\mathbb{B}^k\vec{x}^{(0)} + \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1}\mathbb{B}^i\vec{c} - \sum_{i=0}^{\infty}\mathbb{B}^i\vec{c}}_{-\sum_{i=k}^{\infty}\mathbb{B}^i\vec{c} = \mathbb{B}^k\sum_{i=0}^{\infty}\mathbb{B}^i\vec{c}}\| =$$

$$= \|\mathbb{B}^k\vec{x}^{(0)} - \mathbb{B}^k\sum_{i=0}^{\infty}\mathbb{B}^i\vec{c}\| \le \|\mathbb{B}\|^k \cdot \|\vec{x}^{(0)} - \sum_{i=0}^{\infty}\mathbb{B}^i\vec{c}\|$$

$$\left((\mathbb{I} - \mathbb{B})^{-1}\vec{c} = \vec{x}^* \rightarrow \le \|\mathbb{B}\|^k \cdot \|\vec{x}^{(0)} - \vec{x}^*\| \right)$$

$$\|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}^*\| \le \|\mathbb{B}\|^k \|\vec{x}^{(0)} - \sum_{i=0}^{\infty}\mathbb{B}^i\vec{c}\| \le$$

$$\|\mathbb{B}\|^k\left[\|\vec{x}^{(0)}\| + \sum_{i=0}^{\infty}\|\mathbb{B}\|^i\|\vec{c}\|\right] \le \|\mathbb{B}\|^k\left[\|\vec{x}^{(0)}\| + \frac{\|\vec{c}\|}{1 - \|\mathbb{B}\|}\right]$$

Stacionární iterativní metody

- nyní již víme, za jakých podmínek stacionární metoda konverguje k nějakému vektoru $\vec{x}^*$ a známé odhady chyb
- dále se budeme zabývat otázkou, jak volit matici $\mathbb{B}$ a vektor $\vec{c}$, aby vztah

$$\vec{x}^* = \mathbb{B}\vec{x}^* + \vec{c},$$

platil pro řešení $\vec{x}^*$ soustavy lineárních rovnic $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$

$$\mathbb{B}\vec{x}^{(k)} + \vec{c} = \vec{x}^{(k+1)}$$

Metoda postupných aproximací

$\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$; $\vec{x}^{(0)}$

- při návrhu nejjednodušší iterativní metody chceme najít nějaký způsob, jak zlepšit určitou aproximaci řešení $\vec{x}^{(k)}$
- potřebujeme tedy odhadnout, jaké chyby se s danou aproximací dopouštíme
- **jediný odhad**, který máme k dispozici, je reziduum

$$\vec{r}^{(k)} = \mathbb{A}\vec{x}^{(k)} - \vec{b}$$

$\vec{x}^{(k)} - \vec{r}^{(k)}$

Metoda postupných aproximací

- zkusme tedy metodu

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} - \vec{r}^{(k)} = \vec{x}^{(k)} - \mathbb{A}\vec{x}^{(k)} + \vec{b} = \overbrace{(\mathbb{I} - \mathbb{A})}^{\mathbb{B}}\,\vec{x}^{(k)} + \overbrace{\vec{b}}^{\vec{c}}$$

- vidíme, že metoda splňuje podmínku

$$\vec{x}^* = \overbrace{(\mathbb{I} - \mathbb{A})\,\vec{x}^* + \vec{b}}^{\vec{x}^* \underbrace{- \mathbb{A}\vec{x}^* + b}_{\vec{b}}} \left(\Leftrightarrow \mathbb{A}\vec{x}^* = \vec{b}\right)$$

- je tedy

$$\begin{aligned} \mathbb{B} &= \mathbb{I} - \mathbb{A}, \\ \vec{c} &= \vec{b} \end{aligned}$$

- tuto metodu nazveme **metodou postupných aproximací**

Metoda postupných aproximací

```
bool postupneAproximace( const Matrix& A,
                         const Vector& b,
                         Vector& x,
                         double eps )
{
   double normB = norm( b );
   double r = eps + 1.0;
   Vector y;
   while( r > eps )
   {
      /****
       * Postupne aproximace
       */
      r = 0.0;
      for( int i = 0; i < n; i++ )
      {
         double r_i = b[ i ];
         for( int j = 0; j < n; j++ )
               r_i = r_i - A[ i ][ j ] * x[ j ];
         y[ i ] = x[ i ] - r_i;
         r = r + r_i * r_i;
      }
      /****
       * Vypocet rezidua
       */
      r = sqrt( r ) / normB;
   }
}
```

$n^2 \cdot K$

POČET ITERACÍ

$K << n$

A - ŘÍDKÁ (CSR)

$n \cdot K$

$K \simeq n \rightarrow O(n^2)$

$(1, 1, \ldots, 1) \simeq (0, \ldots, 0), (0{,}5, \ldots, 0{,}8)$

Metoda postupných aproximací

- stacionární metody pro řešení soustav lineárních rovnic jsou implementovány v programu `stationary-solver`
  - `--input-file` – vstupní soubor s maticí
  - `--method` – použitá metoda
    - `richardson`, `jacobi`, `gauss-seidel` a `sor`
  - `--relaxation r` – relaxační parametr
  - `--matrix-format dense/ellpack` – formát pro uložení matice soustavy
    - pro řídké matice je určen formát `ellpack`
  - `--initial-value v` – nastavení vektoru $\vec{x}^{(0)}$
  - `--max-iterations n` – maximální možný počet provedených iterací
  - `--convergence-residue r` – hodnota kritéria pro zastavení výpočtu (jde o proměnnou `eps` v kódu)
  - `--verbose n`
    - nastavuje úroveň vypisovaných informací v průběhu výpočtu

Metoda postupných aproximací

- jak uvidíme později, metoda postupných aproximací je vlastně Richardsonova metoda s relaxačním parametrem rovným 1
- na tuto hodnotu je tento parametr nastaven automaticky, pokud neuvedeme jinak

Example 9

```
stationary-solver --method richardson \
                  --input-file data/matrix-pd.mtx
```

Metoda postupných aproximací

Theorem 10

Metoda postupných aproximací pro rovnici $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$ (s regulární maticí $\mathbb{A}$) ve tvaru

$$\vec{x}^{(k+1)} = \overset{\mathbb{D}}{(\mathbb{I} - \mathbb{A})}\, \vec{x}^{(k)} + \overset{\vec{c}}{\vec{b}},$$

konverguje pro každé $\vec{x}^{(0)}$ k řešení zadané rovnice právě když

$$\rho\,(\overset{\mathbb{D}}{\mathbb{I} - \mathbb{A}}) < 1.$$

Je-li

$$\|\overset{\mathbb{D}}{\mathbb{I} - \mathbb{A}}\| < 1,$$

pro nějakou maticovou normu $\|\cdot\|$, pak tato metoda také konverguje k řešení soustavy pro libovolné $\vec{x}^{(0)}$.

Důkaz.

Plyne snadno z podmínek pro konvergenci stacionárních metod. VĚTA 3,4; $\mathbb{D} = \mathbb{I} - \mathbb{A}$; $\vec{c} = \vec{b}$. □

Metoda postupných aproximací

$p(x) = 2x^2 + 3x + 1$

$p(\mathbb{A}) = 2\mathbb{A}^2 + 3\mathbb{A} + \mathbb{I}$

Theorem 11

Buď $p(x)$ polynom proměnné x. Buď $\mathbb{A} \in C^{n,n}$, $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$. Pak $p(\lambda) \in \sigma(p(\mathbb{A}))$.

Důkaz.

Video na Youtube

$\square$

PŘÍKLAD:

$\lambda \in \sigma(\mathbb{A}) \Rightarrow p(\lambda) \in \sigma(p(\mathbb{A}))$; $\vec{x}$ VL. VEKTOR

$2\mathbb{A}^2\vec{x} + 3\mathbb{A}\vec{x} + \mathbb{I}\vec{x} = 2\mathbb{A}(\lambda\vec{x}) + 3\cdot\lambda\vec{x} + x =$

$= 2\lambda^2\vec{x} + 3\lambda\vec{x} + \vec{x} = (2\lambda^2 + 3\lambda + 1)\vec{x} = p(\lambda)\vec{x}$

- $\lambda \in \sigma(A)$; $\vec{x}$ PR. WŁASNY WEKTOR
- $A^k \vec{x} = \underbrace{A \cdots A}_{k\times} \vec{x} = \underbrace{A \cdots A}_{k-1\times} (\lambda \vec{x}) =$

$= \lambda^k \vec{x}$

- $h(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$
- $h(A) = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k$
- $h(A)\vec{x} = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k \vec{x} = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k \vec{x} =$

$= h(\lambda)\vec{x} \Rightarrow h(\lambda) \in \sigma(h(A))$ $\square$

Metoda postupných aproximací

Theorem 12

Buď $\mathbb{A}$ hermitovská ~~a PD~~. Pak metoda postupných aproximací konverguje právě když platí

$$2\mathbb{I} > \mathbb{A} > 0. \qquad \Leftrightarrow \sigma(\mathbb{A}) \subset (0,2)$$

Důkaz.

Video na Youtube

$$\underbrace{2\mathbb{I} - \mathbb{A}}_{PD} > 0$$

□

Remark 13

Takových matic ale moc není.

$\mathbb{A}$ JE HERMITOVSKÁ $\Rightarrow \sigma(\mathbb{A}) \subset \mathbb{R}$

METODA KONV. $\Leftrightarrow \rho(\mathbb{B}) < 1 \Leftrightarrow$

$\rho(\mathbb{I} - \mathbb{A}) < 1 \underset{\mathbb{A}\ \text{HERM.}}{\Leftrightarrow} \sigma(\mathbb{I} - \mathbb{A}) \subset (-1, 1) \Leftrightarrow$

$h(x) = 1 - x$

$h(\lambda) = 1 - \lambda$

$1 - \lambda \in (-1, 1) \Leftrightarrow \lambda \in (0, 2) \Leftrightarrow 2 > \underline{\lambda > 0} \Leftrightarrow$

$\mathbb{A}$ JE PD $\wedge$ $2 > \lambda \Leftrightarrow \mathbb{A}$ JE PD $\wedge$ $\underline{2 - \lambda} > 0$

$h'(x) = 2 - x$

$h'(\lambda) = 2 - \lambda$

$\Leftrightarrow \mathbb{A}$ JE PD $\wedge$ $2\mathbb{I} - \mathbb{A}$ JE PD $\Leftrightarrow$

$\underline{\mathbb{A} > 0} \wedge \underline{2\mathbb{I} - \mathbb{A} > 0} \Leftrightarrow$

$\underline{2\mathbb{I} > \mathbb{A}} \underline{> 0}$ $\square$

Předpodmíněná metoda postupných aproximací

- abychom zlepšili konvergenci metody postupných aproximací, použijeme tzv. **předpodmínění**
- soustavu $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$ vynásobíme vhodnou regulární maticí $\mathbb{H}$
- dostaneme soustavu

$$\mathbb{H}\mathbb{A}\vec{x} = \mathbb{H}\vec{b}$$

- řešení se tím nezmění

$$r^{(k)} = \mathbb{H}\mathbb{A}\vec{x}^{(k)} - \mathbb{H}\vec{b}$$

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} - \mathbb{H}\mathbb{A}\vec{x}^{(k)} + \mathbb{H}\vec{b} = \underbrace{(\mathbb{I} - \mathbb{H}\mathbb{A})}_{\mathbb{B}}\vec{x}^{(k)} + \underbrace{\mathbb{H}\vec{b}}_{\vec{c}}$$

Předpodmíněná metoda postupných aproximací

- metoda postupných aproximací má nyní mít tvar

$$
\begin{aligned}
\vec{x}^{(k+1)} &= \vec{x}^{(k)} - \vec{r}^{(k)} \\
&= \vec{x}^{(k)} - \mathbb{H}\mathbb{A}\vec{x}^{(k)} + \mathbb{H}\vec{b} \\
&= \vec{x}^{(k)} - \mathbb{H}\left(\mathbb{A}\vec{x}^{(k)} - \vec{b}\right) \\
&= \left(\mathbb{I} - \mathbb{H}\mathbb{A}\right)\vec{x}^{(k)} + \mathbb{H}\vec{b}
\end{aligned}
$$

- a samozřejmě platí podmínka

$$
\left(\mathbb{I} - \mathbb{H}\mathbb{A}\right)\vec{x}^{*} + \mathbb{H}\vec{b} = \vec{x}^{*} - \mathbb{H}\mathbb{A}\vec{x}^{*} + \mathbb{H}\vec{b} = \vec{x}^{*}
$$

$\mathbb{H}\mathbb{A}\vec{x}^{*} = \mathbb{H}\vec{b}$

Předpodmíněná metoda postupných aproximací

- ze vztahu $\vec{x}^{(k+1)} = (\mathbb{I} - \mathbb{H}\mathbb{A})\,\vec{x}^{(k)} + \mathbb{H}\vec{b}$ vidíme, že

$$\begin{aligned} \mathbb{B} &= \mathbb{I} - \mathbb{H}\mathbb{A}, \\ \vec{c} &= \mathbb{H}\vec{b} \end{aligned}$$

- platí tedy následující věty

Předpodmíněná metoda postupných aproximací

Theorem 14

Předpodmíněná metoda postupných aproximací pro rovnici $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$ (s regulární maticí $\mathbb{A}$) s předpodmíněním $\mathbb{H}$ ve tvaru

$$\vec{x}^{(k+1)} = (\mathbb{I} - \mathbb{H}\mathbb{A})\,\vec{x}^{(k)} + \mathbb{H}\vec{b},$$

konverguje pro každé $\vec{x}^{(0)}$ k řešení zadané rovnice právě když

$$\rho\,(\mathbb{I} - \mathbb{H}\mathbb{A}) < 1.$$

Je-li

$$\|\mathbb{I} - \mathbb{H}\mathbb{A}\| < 1,$$

pro nějakou maticovou normu $\|\cdot\|$, pak tato metoda také konverguje k řešení soustavy pro libovolné $\vec{x}^{(0)}$.

Důkaz.

Plyne snadno z podmínek pro konvergenci stacionárních metod. VĚTA 10 ; $\mathbb{H}\mathbb{A}\vec{x} = \mathbb{H}\vec{b}$ □

Předpodmíněná metoda postupných aproximací

Theorem 15

Buď $\mathbb{A}$ hermitovská a PD. Pak předpodmíněná metoda postupných aproximací konverguje, pokud platí

$$\mathbb{W} + \mathbb{W}^* > \mathbb{A} > 0,$$

kde $\mathbb{W} = \mathbb{H}^{-1}$. Konvergence je navíc monotónní vzhledem k vektorové normě $\|\cdot\|_A$.

$\mathbb{B} = \mathbb{I} - \mathbb{H}\mathbb{A}$

$\vec{c} = \mathbb{H}\vec{b}$

Důkaz.

Video na Youtube

□

Remark 16

Pro metodu postupných aproximací bez předpodmínění, je $\mathbb{W} = \mathbb{I}$ a dostáváme již dokázané kritérium

$$2\mathbb{I} > \mathbb{A} > 0.$$

$\mathbb{A}$ JE HERM. A PD $\qquad \mathbb{A}^n; n \in \mathbb{R}^+$

2

$$\|\mathbb{B}\|_{\mathbb{A}} = \|\mathbb{A}^{\frac{1}{2}}\mathbb{B}\mathbb{A}^{-\frac{1}{2}}\|_2 < 1$$

$$\|\mathbb{B}\|_{\mathbb{A}} = \|\mathbb{A}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{I}-\mathbb{H}\mathbb{A})\mathbb{A}^{-\frac{1}{2}}\|_2 = \|\mathbb{I}-\mathbb{A}^{\frac{1}{2}}\mathbb{H}\mathbb{A}^{\frac{1}{2}}\|_2 =$$

$$\|\hat{\mathbb{B}}\|_2 = \rho(\hat{\mathbb{B}}^*\hat{\mathbb{B}})^{\frac{1}{2}} < 1$$

$$\hat{\mathbb{B}} = \mathbb{I}-\mathbb{A}^{\frac{1}{2}}\mathbb{H}\mathbb{A}^{\frac{1}{2}}$$

- $\hat{\mathbb{B}}^*\hat{\mathbb{B}}$ JE HERMITOVSKÁ A PD

$$(\hat{\mathbb{B}}^*\hat{\mathbb{B}}\vec{x},\vec{x}) = (\hat{\mathbb{B}}\vec{x},\hat{\mathbb{B}}\vec{x}) = \|\hat{\mathbb{B}}\vec{x}\|_2^2 > 0$$

$\Rightarrow \hat{\mathbb{B}}^*\hat{\mathbb{B}}$ MÁ KLADNÁ VL. ČÍSLA

- UKÁŽEME, ŽE VL. Č. $\hat{\mathbb{B}}^*\hat{\mathbb{B}} < 1$

$$\hat{\mathbb{B}}^*\hat{\mathbb{B}} = (\mathbb{I}-\mathbb{A}^{\frac{1}{2}}\mathbb{H}\mathbb{A}^{\frac{1}{2}})^*(\mathbb{I}-\mathbb{A}^{\frac{1}{2}}\mathbb{H}\mathbb{A}^{\frac{1}{2}}) =$$

$$= (\mathbb{I}-\mathbb{A}^{\frac{1}{2}}\mathbb{H}^*\mathbb{A}^{\frac{1}{2}})(\mathbb{I}-\mathbb{A}^{\frac{1}{2}}\mathbb{H}\mathbb{A}^{\frac{1}{2}}) =$$

$$= \mathbb{I} - \mathbb{A}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{H}^*+\mathbb{H})\mathbb{A}^{\frac{1}{2}} + \mathbb{A}^{\frac{1}{2}}\mathbb{H}^*\mathbb{A}\mathbb{H}\mathbb{A}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \mathbb{I} - \mathbb{A}^{\frac{1}{2}}\mathbb{H}^*\underline{(\mathbb{H}^{-1}+(\mathbb{H}^*)^{-1})}\mathbb{H}\mathbb{A}^{\frac{1}{2}} + \mathbb{A}^{\frac{1}{2}}\mathbb{H}^*\underline{\mathbb{A}}\mathbb{H}\mathbb{A}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \mathbb{I} - \mathbb{A}^{\frac{1}{2}}\mathbb{H}^*(\mathbb{H}^{-1}+(\mathbb{H}^*)^{-1}-\mathbb{A})\mathbb{H}\mathbb{A}^{\frac{1}{2}}$$

$$\mathbb{W}+\mathbb{W}^*-\mathbb{A} > 0$$

$\mathbb{M}$ PD.

$$(A^{\frac{1}{2}} H^* \mathbb{M} H A^{\frac{1}{2}} \vec{x}, \vec{x}) = (\mathbb{M} H A^{\frac{1}{2}} \vec{x}, H A^{\frac{1}{2}} \vec{x}) =$$

$$= (\mathbb{M} \vec{y}, \vec{y}) > 0$$

$$\vec{y} = H A^{\frac{1}{2}} \vec{x}$$

$\hat{\mathbb{D}}^* \hat{\mathbb{D}} = \mathbb{I} - \hat{\mathbb{M}}$; $\hat{\mathbb{M}}$ ДЕ PD

$\lambda \in \sigma(\hat{\mathbb{D}}^* \hat{\mathbb{D}}) \Rightarrow \lambda = 1 - \lambda'$; $\lambda' > 0$

$\square$

$\mathbb{H}\mathbb{A}\vec{x} = \mathbb{H}\vec{b}$

$\mathbb{A}^{-1}\mathbb{A}\vec{x} = \mathbb{A}^{-1}\vec{b}$

$\vec{x} = \mathbb{A}^{-1}\vec{b}$

Předpodmíněná metoda postupných aproximací

- nyní vyvstává otázka, jak volit matici $\mathbb{H}$
- ze vztahu $\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} - \mathbb{H}\mathbb{A}\vec{x}^{(k)} + \mathbb{H}\vec{b}$ dostáváme, že při volbě $\mathbb{H} = \mathbb{A}^{-1}$ je

$$\begin{aligned}
\vec{x}^{(k+1)} &= \vec{x}^{(k)} - \mathbb{H}\mathbb{A}\vec{x}^{(k)} + \mathbb{H}\vec{b} \\
&= \vec{x}^{(k)} - \mathbb{A}^{-1}\mathbb{A}\vec{x}^{(k)} + \mathbb{A}^{-1}\vec{b} \\
&= \vec{x}^{(k)} - \vec{x}^{(k)} + \vec{x}^{*} \\
&= \vec{x}^{*}
\end{aligned}$$

- metoda by tak konvergovala po jedné iteraci
- získat $\mathbb{A}^{-1}$ ale umíme jen pomocí GEM, čemuž jsme se chtěli vyhnout
- umění je najít matici $\mathbb{H}$ tak, aby co nejlépe aproximovala $\mathbb{A}^{-1}$ ale byla snadno dosažitelná

Shrnutí

$A = LU \quad (\equiv A^{-1})$

$LUx = b \quad (n^2) \quad LU \to H$

$ILU \equiv$ INCOMPLETE LU $\quad H$

- **konvergence stacionárních metod**
  - $\cancel{\rho(\mathbb{A}) < 1}$ - nutná a postačující $\quad \rho(\mathbb{D}) < 1$
  - $\cancel{\|\mathbb{A}\| < 1}$ - postačující $\quad \|\mathbb{D}\| < 1$
- apriorní a **aposteriorní** odhady chyb
  - $\|\mathbb{A}\vec{x}^{(k)} - \vec{b}\| / \|\vec{b}\| < \epsilon \approx 10^{-4}$
  - $\|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}^{(k-1)}\| / \|\vec{b}\| < \epsilon \approx 10^{-4}$
- **předpodmínění**