Tomáš Oberhuber

Faculty of Nuclear Sciences and Physical Engineering
Czech Technical University in Prague

Video na Youtube

Trojúhelníková metoda

Buď $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$, řešíme úlohu nalezení všech vlastních čísel a vlastních vektorů této matice.

Trojúhelníková metoda

- konstruujeme dvě posloupnosti
  - $\{\mathbb{L}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{n,n}$ dolní trojúhelníkové s jedničkami na diagonále
  - $\{\mathbb{R}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{n,n}$ horní trojúhelníkové
- $\mathbb{L}^{(0)}$ volíme libovolně (např. $\mathbb{I}$)
- $\mathbb{L}^{(1)}$ a $\mathbb{R}^{(1)}$ získáme rozkladem matice $\mathbb{A}\mathbb{L}^{(0)}$ tj. platí

LU ROZKLAD

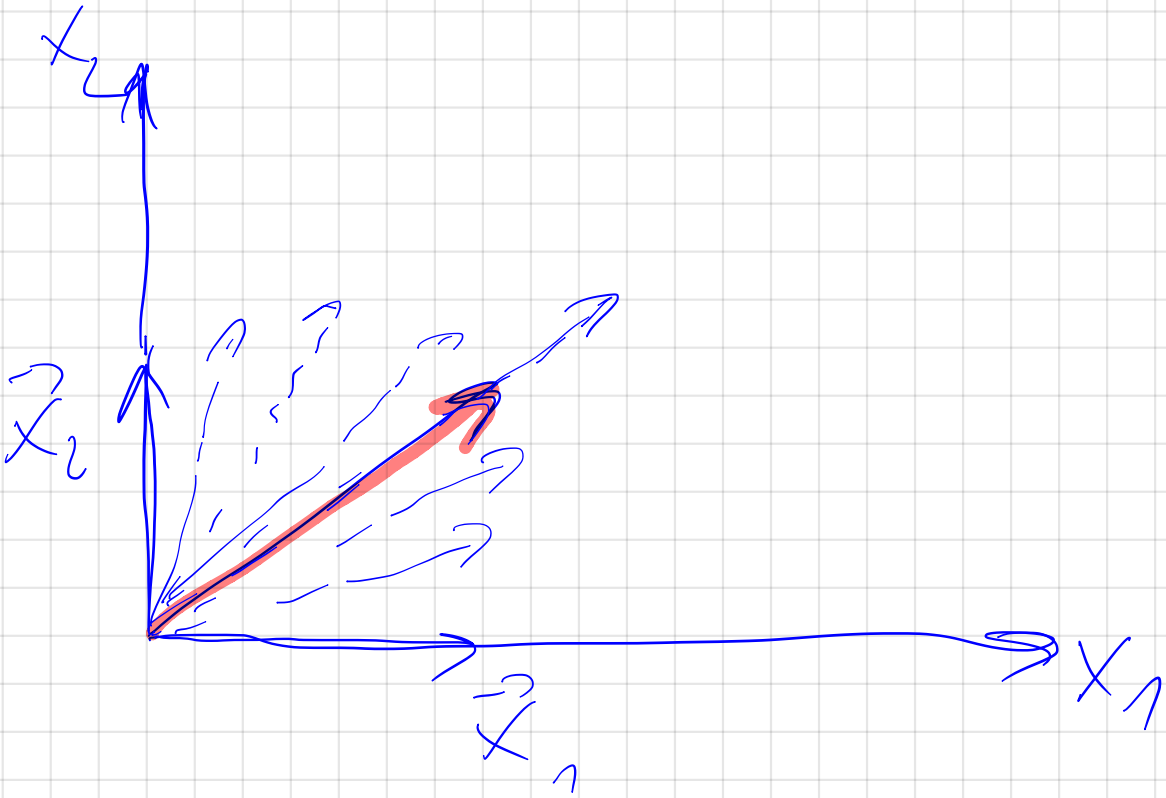
$U \to R$

$$\mathbb{L}^{(1)}\mathbb{R}^{(1)} = \mathbb{A}\mathbb{L}^{(0)}$$

  - $\mathbb{L}^{(1)}$ je dolní trojúhelníková s jedničkami na diagonále
  - $\mathbb{R}^{(1)}$ je horní trojúhelníková
- obecně počítáme iterace tvaru

$$\mathbb{L}^{(k+1)}\mathbb{R}^{(k+1)} = \mathbb{A}\mathbb{L}^{(k)}$$

  - $\mathbb{L}^{(k+1)}$ je dolní trojúhelníková s jedničkami na diagonále
  - $\mathbb{R}^{(k+1)}$ je horní trojúhelníková



$$A^k \underbrace{[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]}_{LN} = A^k X$$

Trojúhelníková metoda

$$\mathbb{L}^{(k+1)}\mathbb{R}^{(k+1)} = \mathbb{A}\mathbb{L}^{(k)}$$

$$\mathbb{L}\mathbb{R} = \mathbb{A}\mathbb{L}$$

Remark 1

Pokud ukážeme, že $\mathbb{L}^{(k)} \to \mathbb{L}$ *a* $\mathbb{R}^{(k)} \to \mathbb{R}$*, pak platí*

$$\mathbb{A}\mathbb{L} = \mathbb{L}\mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{R}\mathbb{L}^{-1}$$

a jde tedy a podobnostní transformaci a vlastní čísla matice $\mathbb{A}$ *najdeme na diagonále matice* $\mathbb{R}$*.*

Trojúhelníková metoda

Remark 2

Jak vypočítat vlastní vektory? Řešíme nejprve rovnici

$$(\mathbb{R} - \lambda \mathbb{I})\, \vec{y}^i = 0.$$

Z tvaru matice $\mathbb{R} - \lambda \mathbb{I}$ (dolní trojúhelníková s 0 na diagonále na i-tém řádku) snadno vidíme, že HORNÍ

$$\vec{y}^i_j = \begin{cases} 0 & j < i \\ 1 & j = i \\ \frac{-1}{r_{jj-\lambda}} \sum_{k=i}^{j-1} y^i_k r_{jk} & j > i \end{cases}$$

$\mathbb{A}\mathbb{L} = \mathbb{L}\mathbb{R}$

$\vec{y}$; $\mathbb{A}\mathbb{L}\vec{y} = \mathbb{L}\mathbb{R}\vec{y}$

$= \mathbb{L}\lambda\vec{y} =$

$= \lambda\mathbb{L}\vec{y}$

neboť pro $j > i$ musí platit

$$\sum_{k=i}^{j-1} y^i_k r_{jk} + y^i_j \left(r_{jj} - \lambda\right) = 0.$$

$\mathbb{A}\underbrace{\mathbb{L}\vec{y}}_{\vec{x}} = \lambda\underbrace{\mathbb{L}\vec{y}}_{\vec{x}}$

Jelikož matice $\mathbb{R}$ je matice $\mathbb{A}$ vyjádřená v bázi dané sloupci matice $\mathbb{L}$, platí, že vlastní vektory matice $\mathbb{A}$ jsou

$\mathbb{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$

$$\vec{x}^i = \mathbb{L}\vec{y}^i.$$

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ & 2 & 4 \\ & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma(\mathbb{A}) = \{3, 2, 1\}$$

$$\lambda_1 = 3;\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 1$$

? $\vec{x}^{(3)}$

$$(\mathbb{A} - \lambda_3 \mathbb{I})\vec{x}^{(3)} = \vec{0} \quad ; \vec{x}^{(3)} \neq \vec{0}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 6 & 0 \\ & 1 & 4 & 0 \\ & & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow (7, -4, 1)$$

$$x_2^{(3)} + 4x_3^{(3)} = 0 \Rightarrow x_2^{(3)} = -4$$

$$2x_1^{(3)} + 5\ x_2^{(3)} + 6\ x_3^{(3)} = 0$$

$$-4 \qquad 1$$

$$2x_1^{(3)} = 14 \Rightarrow x_1^{(3)} = 7$$

? $\vec{x}^{(2)}$; $\lambda_2 = 2$

$$(\mathbb{A} - 2\mathbb{I})\vec{x}^{(2)} = \vec{0}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 6 & 0 \\ & 0 & 4 & 0 \\ & & -1 & 0 \end{array}\right) \qquad \vec{x}^{(2)} = (-5, 1, 0)$$

$$\underbrace{x_1^{(2)} + 5\,\underset{1}{x_2^{(2)}} + 6\,\underset{0}{x_3^{(2)}} = 0}$$

$$x_1^{(2)} = -5$$

$$(\mathbb{R} - \lambda_i \mathbb{I}) = \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ & 0 & * \\ & & 0 \\ & & & -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}^{(1)} = (*, *, 1, 0)$$

$$\vec{x}^{(2)} = (*, 1, 0, 0)$$

Trojúhelníková metoda

LU ROZKLAD $\mathbb{A}\mathbb{L}^{(0)}$, $\mathbb{A}\mathbb{L}^{(k)}$ } SILNĚ REG.

- $\mathbb{L}^{(0)}$ lze volit libovolně, nemusí být ani dolní trojúhelníková
  - díky tomu má metoda samoopravující schopnost
  - pokud bychom někdy napočítali $\mathbb{L}^{(k)}$ špatně, lze ho brát jako nové $\mathbb{L}^{(0)}$

Existence LU rozkladu

Remark 3

Obě metody jsou postaveny na počítání LU rozkladu. Ten ale existuje jen pro silně regulární matice. V první iteraci musíme předpokládat, že toto je splněno. Připomeňme si navíc vzorce pro výpočet LU rozkladu:

$$
\begin{aligned}
l_{ij} &= a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} \text{ pro } j \leq i \\
u_{ij} &= (a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}) / l_{ii} \text{ pro } i < j
\end{aligned}
$$

Z nich vidíme, že prvky matic $\mathbb{L}$ a $\mathbb{U}$ závisí spojitě na prvcích matice $\mathbb{A}$. Pokud tedy matici $\mathbb{A}$ změníme jen málo, bude LU rozklad opět existovat.

Existence LU rozkladu

Theorem 4

Nechť matice $\mathbb{A}$ je silně regulární tj. existuje její LU rozklad. Buď matice $\mathbb{E}$ taková, že $\|\mathbb{E}\|$ je dostatečně malé. Pak existuje i LU rozklad matice $\mathbb{A} + \mathbb{E}$.

Theorem 5

Nechť $\mathbb{A} = \mathbb{I} + \mathbb{E}$, kde $\|\mathbb{E}\|$ je malé. Potom existuje rozklad $\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{R}$, kde $\mathbb{L}$ je dolní trojúhelníková s jedničkami na diagonále a $\mathbb{R}$ je horní trojúhelníková. Platí-li, že pokud $\|\mathbb{E}\| \to 0$, pak $\mathbb{L} \to \mathbb{I}$ a $\mathbb{R} \to \mathbb{I}$.

Konvergence trojúhelníkové metody

? $\mathcal{L}^{(k)} \to \mathbb{L} \Rightarrow \mathbb{L}^{(k)} \to \mathbb{L}$

Theorem 6

Pokud existuje trojúhelníkový rozklad matice $\mathbb{A}^k\mathbb{L}^{(0)} = \mathcal{L}^{(k)}\mathcal{R}^{(k)}$, pak platí

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(k)} &= \mathbb{L}^{(k)}, \\ \mathcal{R}^{(k)} &= \mathbb{R}^{(k)}\mathbb{R}^{(k-1)}\dots\mathbb{R}^{(1)}. \end{aligned}$$

!!!!

$\mathbb{L}^{(k+1)}\mathbb{R}^{(k+1)} = \mathbb{A}\mathbb{L}^{(k)}$

$\mathbb{R}^{(k+1)} = (\mathbb{L}^{(k+1)})^{-1}\mathbb{A}\mathbb{L}^{(k)}$

$\to \mathbb{L}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{L}$

$\mathbb{R}^{(k)} \to \mathbb{R}$

Důkaz.

Video na Youtube

□

Remark 7

V důkazu konvergence budeme zkoumat matici $\mathbb{A}^k\mathbb{L}^{(0)}$. Odvodíme, kdy existuje její LU rozklad $\mathbb{A}^k\mathbb{L}^{(0)} = \mathcal{L}^{(k)}\mathcal{R}^{(k)}$. Jelikož platí, že $\mathbb{L}^{(k)} = \mathcal{L}^{(k)}$, dokážeme-li, že $\mathcal{L}^{(k)} \to \mathbb{L}$, bude platit i $\mathbb{L}^{(k)} \to \mathbb{L}$. Pak již lze i dokázat, že $\cancel{\mathcal{R}^{(k)} \to \mathbb{R}}$, čímž máme vyšetřenou konvergenci trojúhelníkové metody.

$$\mathbb{L}^{(k+1)}\mathbb{R}^{(k+1)} = \mathbb{A}\,\mathbb{L}^{(k)}$$

$$\mathcal{L}^{(k)}\mathcal{R}^{(k)} = \underbrace{\mathbb{L}^{(k)}\mathbb{R}^{(k)}}_{=\mathbb{A}\mathbb{L}^{(k-1)}}\mathbb{R}^{(k-1)}\cdots\mathbb{R}^{(1)} =$$

$$= \underbrace{\mathbb{A}\,\mathbb{L}^{(k-1)}}\underbrace{\mathbb{L}^{(k-1)}\mathbb{R}^{(k-1)}}_{=\mathbb{A}\mathbb{L}^{(k-2)}}\mathbb{R}^{(k-2)}\cdots\mathbb{R}^{(1)} =$$

$$= \mathbb{A}\,\mathbb{A}\,\mathbb{L}^{(k-2)}\mathbb{R}^{(k-2)}\cdots\mathbb{R}^{(1)} = \cdots =$$

$$= \mathbb{A}^{k-1}\underbrace{\mathbb{L}^{(1)}\mathbb{R}^{(1)}}_{=\mathbb{A}\mathbb{L}^{(0)}} = \mathbb{A}^{k}\mathbb{L}^{(0)}$$

$\square$

Konvergence trojúhelníkové metody

Theorem 8

Nechť matice $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ je regulární a má všechna vlastní čísla jednonásobná a různá v absolutní hodnotě tj. existuje regulární matice $\mathbb{X}$, že $\mathbb{A} = \mathbb{X}\mathbb{D}\mathbb{X}^{-1}$, kde $\mathbb{D} = diag\{\lambda_1, \ldots \lambda_n\}$ pro $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots > |\lambda_n|$. Dále předpokládejme, že pro dostatečně velké k existují LU rozklady matic $\mathbb{A}\mathbb{L}^{(k)}$ a nechť dále existují LU rozklady matic $\mathbb{X}$ a $\mathbb{X}^{-1}\mathbb{L}^{(0)}$. Pak posloupnosti matic $\mathbb{L}^{(k)}$ a $\mathbb{R}^{(k)}$ z trojúhelníkové metody konvergují a na diagonále matice $\mathbb{R}$ je spektrum matice $\mathbb{A}$ seřazené sestupně podle velikosti v absolutní hodnotě.

Důkaz.

Video na Youtube $\square$

Remark 9

Pro konvergenci za jiných podmínek lze nahlédnout do skript doc. Humhala.

$$\mathbb{A} = \mathbb{X}\,\mathbb{D}\,\mathbb{X}^{-1} \quad ; \mathbb{D} = \mathrm{diag}\{\lambda_1 \dots, \lambda_n\}$$

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \dots |\lambda_n|$$

$$\mathbb{A}^k = \mathbb{X}\,\mathbb{D}^k\,\mathbb{X}^{-1}$$

$$\mathbb{A}^k \mathbb{L}^{(0)} = \mathbb{X}\,\mathbb{D}^k\,\mathbb{X}^{-1}\mathbb{L}^{(0)}$$

$$\mathbb{X} = \mathbb{L}_x \mathbb{R}_x$$

$$\mathbb{X}^{-1}\mathbb{L}^{(0)} = \mathbb{L}_y \mathbb{R}_y$$

$$\mathbb{A}^k \mathbb{L}^{(0)} = \underset{\triangle}{\mathbb{L}_x}\,\underset{\triangledown}{\mathbb{R}_x}\,\underset{\backslash}{\mathbb{D}^k}\,\underset{\triangle}{\mathbb{L}_y}\,\underset{\triangledown}{\mathbb{R}_y} = \mathbb{L}_x \mathbb{R}_x \underbrace{\mathbb{D}^k \mathbb{L}_y \mathbb{D}^{-k}}_{?} \mathbb{D}^k \mathbb{R}_y$$

$$\underset{\triangle}{\left(\mathbb{D}^k \mathbb{L}_y \mathbb{D}^{-k}\right)_{ij}} = \begin{cases} 0 & ; j > i \\ \lambda_i^k\, 1\, \lambda_i^{-k} = 1 & ; i = j \\ \lambda_i^k\, l_{ij}\, \lambda_j^{-k} & ; j < i \end{cases}$$

$$j < i \Rightarrow |\lambda_i| < |\lambda_j| \Rightarrow \left|\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right| < 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right)^k l_{ij} \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$$

$$\mathbb{D}^k \mathbb{L}_y \mathbb{D}^{-k} = \mathbb{I} + \mathbb{E}^{(k)} \; ; \; \underset{\triangle}{\mathbb{E}^{(k)}} \to \Theta$$

$$\mathbb{A}^k \mathbb{L}^{(0)} = \underset{\triangledown}{\mathbb{L}_x}\,\underset{\triangle}{\mathbb{R}_x}\,\underset{\triangle}{\left(\mathbb{I} + \mathbb{E}^{(k)}\right)}\,\underset{\triangleleft}{\mathbb{D}^k}\,\mathbb{R}_y$$

$$\mathbb{A}^{\ell}\mathbb{L}^{(0)} = \mathbb{L}_x \mathbb{R}_x (\mathbb{I} + \mathbb{E}^{(\ell)}) \mathbb{D}^{\ell} \mathbb{R}_y =$$

$$= \mathbb{L}_x \underline{\mathbb{R}_x (\mathbb{I} + \mathbb{E}^{(\ell)}) \mathbb{R}_x^{-1}} \mathbb{R}_x \mathbb{D}^{\ell} \mathbb{R}_y =$$

$$= \mathbb{L}_x \Big(\mathbb{I} + \underbrace{\mathbb{R}_x \mathbb{E}^{(\ell)} \mathbb{R}_x^{-1}}_{\xrightarrow[\ell \to \infty]{} \Theta} \Big) \mathbb{R}_x \mathbb{D}^{\ell} \mathbb{R}_y$$

$$\mathbb{I} + \mathbb{R}_x \mathbb{E}^{(\ell)} \mathbb{R}_x^{-1} \to \mathbb{I}$$

$$(\mathbb{I} + \mathbb{R}_x \mathbb{E}^{(\ell)} \mathbb{R}_x^{-1}) = \mathbb{L}_E^{(\ell)} \mathbb{R}_E^{(\ell)} \; ; \; \mathbb{L}_E^{(\ell)} \to \mathbb{I}, \quad \mathbb{R}_E^{(\ell)} \to \mathbb{I}$$

$$\mathbb{A}^{\ell}\mathbb{L}^{(0)} = \underbrace{\mathbb{L}_x \mathbb{L}_E^{(\ell)}}_{\triangle} \underbrace{\mathbb{R}_E^{(\ell)} \mathbb{R}_x \mathbb{D}^{\ell} \mathbb{R}_y}_{\triangle}$$

$$\mathbb{L}_x \mathbb{L}_E^{(\ell)} \xrightarrow[\ell \to \infty]{} \mathbb{L}_x \implies \mathbb{L}^{(\ell,1)} \to \mathbb{L}_x$$

$$\mathbb{X} = \mathbb{L}_x \mathbb{R}_x$$

$$\mathbb{A}\mathbb{L}^{(k)} = \mathbb{L}^{(k+1)}\mathbb{R}^{(k+1)} \xrightarrow{k \to \infty} \mathbb{A}\mathbb{L} = \mathbb{R}\mathbb{L} \Rightarrow$$

$$\mathbb{R} = \mathbb{L}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{L} = \mathbb{L}_x^{-1}\mathbb{A}\mathbb{L}_x$$

$$\mathbb{L}^{(k)} \to \mathbb{L}_x = \mathbb{L}$$

$$\mathbb{A} = \mathbb{X}\mathbb{D}\mathbb{X}^{-1} \Rightarrow \mathbb{R} = \mathbb{L}_x^{-1}\mathbb{X}\mathbb{D}\mathbb{X}^{-1}\mathbb{L}_x =$$

$$= \mathbb{L}_x^{-1}\underbrace{\mathbb{L}_x\mathbb{R}_x}_{\mathbb{X}}\mathbb{D}\underbrace{\mathbb{R}_x^{-1}\mathbb{L}_x^{-1}}_{\mathbb{X}^{-1}}\mathbb{L}_x = \underset{\triangle}{\mathbb{R}_x}\,\underset{\backslash}{\mathbb{D}}\,\underset{\triangle}{\mathbb{R}_x^{-1}}$$

$$\left(\mathbb{R}_x\mathbb{D}\mathbb{R}_x^{-1}\right)_{ii} = r_{ii}\,\lambda_i\,\frac{1}{r_{ii}} = \lambda_i \Rightarrow$$

DIAGONÁLA $\mathbb{R}$ A $\mathbb{D}$ JSOU SHODNÉ $\square$

LR algoritmus

LR algoritmus

- konstruujeme tři posloupnosti
  - $\left\{\mathbb{A}^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{n,n}$
  - $\left\{\hat{\mathbb{L}}^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{n,n}$ dolní trojúhelníkové s jedničkami na diagonále
  - $\left\{\hat{\mathbb{R}}^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{n,n}$ horní trojúhelníkové
- na počátku volíme

$$\begin{aligned}
\mathbb{A}^{(1)} &= \mathbb{A}, \\
\hat{\mathbb{L}}^{(1)}\hat{\mathbb{R}}^{(1)} &= \mathbb{A}^{(1)}, \\
\mathbb{A}^{(2)} &= \hat{\mathbb{R}}^{(1)}\hat{\mathbb{L}}^{(1)}
\end{aligned}$$

- obecně mají jednotlivé iterace tvar

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbb{L}}^{(k)}\hat{\mathbb{R}}^{(k)} &= \mathbb{A}^{(k)}, \\
\mathbb{A}^{(k+1)} &= \hat{\mathbb{R}}^{(k)}\hat{\mathbb{L}}^{(k)}.
\end{aligned}$$

LR algoritmus

Remark 10

Z úvahy

$$\mathbb{A}^{(k)} = \hat{\mathbb{L}}^{(k)} \hat{\mathbb{R}}^{(k)}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{A}^{(k+1)} &= \hat{\mathbb{R}}^{(k)}\hat{\mathbb{L}}^{(k)} \\
&= \underbrace{\left(\left(\hat{\mathbb{L}}^{(k)}\right)^{-1}\hat{\mathbb{L}}^{(k)}\right)}_{=\mathbb{I}}\hat{\mathbb{R}}^{(k)}\hat{\mathbb{L}}^{(k)} \\
&= \left(\hat{\mathbb{L}}^{(k)}\right)^{-1}\mathbb{A}^{(k)}\hat{\mathbb{L}}^{(k)}.
\end{aligned}$$

plyne, že pokud posloupnost $\left\{\mathbb{A}^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ *konverguje k horní trojúhelníkové matici, budou na její diagonále vlastní čísla matice* $\mathbb{A}$.

LR algoritmus

- má menší nároky na paměť než trojúhelníková metoda
  - trojúhelníková metoda potřebuje pracovní pole pro napočítání LU rozkladu, pro výsledek součinu $\mathbb{A}\mathbb{L}^{(k)}$ a pro matici $\mathbb{A}$
  - LR algoritmus potřebuje pracovní pole pro LU rozklad a napočítání součinu $\hat{\mathbb{R}}^{(k)}\hat{\mathbb{L}}^{(k)}$
  - LR algoritmus nemá tak dobrou samoopravující schopnost, takže vlivem numerických chyb můžeme získat špatné spektrum
    - nepamatuje si matici $\mathbb{A}$
    - nekonverguje pro libovolnou počáteční matici, tou je zde matice $\mathbb{A}$ na rozdíl od trojúhelníkové metody, kde ji byla libovolná matice $\mathbb{L}^{(0)}$

D-METODA

$$\mathbb{A} \qquad \mathbb{L}^{(0)} \qquad \mathbb{A}\mathbb{L}^{(0)}$$

$$\downarrow$$

$$\mathbb{A}\mathbb{L}^{(1)} - \mathbb{L}^{(1)}\mathbb{R}^{(1)}$$

$$\downarrow$$

$$\mathbb{L}^{(2)}\mathbb{R}^{(2)} - \mathbb{A}\mathbb{L}^{(2)}$$

LR

$$\mathbb{A}^{(0)}$$

$$\downarrow$$

$$\mathbb{L}^{(1)}\mathbb{R}^{(1)} \longrightarrow \mathbb{A}^{(1)} = \mathbb{R}^{(1)}\mathbb{L}^{(1)}$$

$$\downarrow$$

$$\mathbb{A}^{(2)} = \mathbb{R}^{(2)}\mathbb{L}^{(2)} \longleftarrow \mathbb{L}^{(2)}\mathbb{R}^{(2)}$$

Konvergence LR algoritmu

Theorem 11

Existuje-li trojúhelníkový rozklad matice $\mathbb{A}^k = \mathcal{L}^{(k)}\mathcal{R}^{(k)}$, pak platí

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{(k)} &= \hat{\mathbb{L}}^{(1)}\hat{\mathbb{L}}^{(2)}\dots\hat{\mathbb{L}}^{(k)} \\ \mathcal{R}^{(k)} &= \hat{\mathbb{R}}^{(k)}\hat{\mathbb{R}}^{(k-1)}\dots\hat{\mathbb{R}}^{(1)}.\end{aligned}$$

Důkaz.

Video na Youtube □

$$\hat{\mathbb{L}}^{(k)}\hat{\mathbb{R}}^{(k)} = \mathbb{A}^{(k)}$$

$$\mathbb{A}^{(k-1)} = \hat{\mathbb{R}}^{(k)}\hat{\mathbb{L}}^{(k)}$$

$$\mathcal{L}^{(k)}\mathcal{R}^{(k)} = \hat{\mathbb{L}}^{(1)}\hat{\mathbb{L}}^{(2)}\dots\underbrace{\hat{\mathbb{L}}^{(k)}\hat{\mathbb{R}}^{(k)}}_{\mathbb{A}^{(k)} = \hat{\mathbb{R}}^{(k-1)}\hat{\mathbb{L}}^{(k-1)}}\dots\hat{\mathbb{R}}^{(1)} =$$

$$= \hat{\mathbb{L}}^{(1)}\hat{\mathbb{L}}^{(2)}\dots\underbrace{\hat{\mathbb{L}}^{(k-1)}\hat{\mathbb{R}}^{(k-1)}}_{\mathbb{A}^{(k-1)}}\underbrace{\hat{\mathbb{L}}^{(k-1)}\hat{\mathbb{R}}^{(k-1)}}_{\mathbb{A}^{(k-1)}}\dots\hat{\mathbb{R}}^{(1)} =$$

$$= \hat{\mathbb{L}}^{(1)}\hat{\mathbb{L}}^{(2)}\dots\hat{\mathbb{L}}^{(k-2)}\mathbb{A}^{(k-1)}\mathbb{A}^{(k-1)}\mathbb{R}^{(k-2)}\dots\hat{\mathbb{R}}^{(1)} =$$

$$= \hat{\mathbb{L}}^{(1)}\hat{\mathbb{L}}^{(2)}\dots\underbrace{\hat{\mathbb{L}}^{(k-2)}\hat{\mathbb{R}}^{(k-2)}}_{\mathbb{A}^{(k-2)}}\underbrace{\hat{\mathbb{L}}^{(k-2)}\hat{\mathbb{R}}^{(k-2)}}_{\mathbb{A}^{(k-2)}}\underbrace{\hat{\mathbb{L}}^{(k-2)}\hat{\mathbb{R}}^{(k-2)}}_{\mathbb{A}^{(k-2)}}\dots\hat{\mathbb{R}}^{(1)}$$

$$= \dots = \mathbb{A}^{k}$$

$\square$

Konvergence LR algoritmu

Remark 12

Pokud v trojúhelníkové metodě volíme $\mathbb{L}^{(0)} = \mathbb{I}$*, pak je* $\mathbb{A}^k\mathbb{L}^{(0)} = \mathbb{A}^k$ *a musí platit*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(k)} = \mathbb{L}^{(k)} &= \hat{\mathbb{L}}^{(1)}\hat{\mathbb{L}}^{(2)}\dots\hat{\mathbb{L}}^{(k)}, \\ \mathcal{R}^{(k)} = \mathbb{R}^{(k)}\mathbb{R}^{(k-1)}\dots\mathbb{R}^{(1)} &= \hat{\mathbb{R}}^{(k)}\hat{\mathbb{R}}^{(k-1)}\dots\hat{\mathbb{R}}^{(1)}, \end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned} \mathbb{L}^{(k)} &= \hat{\mathbb{L}}^{(1)}\hat{\mathbb{L}}^{(2)}\dots\hat{\mathbb{L}}^{(k)}, \\ \mathbb{R}^{(k)} &= \hat{\mathbb{R}}^{(k)}. \end{aligned}$$

$\mathbb{L}^{(k-1)} = \hat{\mathbb{L}}^{(1)}\dots\hat{\mathbb{L}}^{(k-1)}$

$(\mathbb{L}^{(k-1)})^{-1}\mathbb{L}^{(k)} =$

$= (\hat{\mathbb{L}}^{(k-1)})^{-1}\dots(\hat{\mathbb{L}}^{(1)})^{-1}\hat{\mathbb{L}}^{(1)}\dots\hat{\mathbb{L}}^{(k-1)}\hat{\mathbb{L}}^{(k)} = \hat{\mathbb{L}}^{(k)}$

Konvergence LR algoritmu

Remark 13

Z konvergence trojúhelníkové metody $\mathbb{L}^{(k)} \to \mathbb{L}$ *a* $\mathbb{R}^{(k)} \to \mathbb{R}$, *plyne*

$$\mathbb{A}^{(k)} = \hat{\mathbb{L}}^{(k)}\hat{\mathbb{R}}^{(k)} = \left(\mathbb{L}^{(\mathbb{k}-\mathbb{1})}\right)^{-1}\mathbb{L}^{(k)}\mathbb{R}^{(k)} \to \mathbb{L}^{-1}\mathbb{L}\mathbb{R} = \mathbb{R},$$

tj. matice $\mathbb{A}^{(k)}$ *z LR algoritmu skutečně konverguje k horní trojúhelníkové matici. Na diagonále má vlastní čísla matice* $\mathbb{A}$ *seřazené sestupně podle velikosti v absolutní hodnotě (to už jsme ukázali).*

Konvergence LR algoritmu

Nyní již můžeme vše shrnout ve formě následující věty:

Theorem 14

Nechť matice $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ je regulární a diagonalizovatelná a předpokládejme, že trojúhelníková metoda konverguje s volbou $\mathbb{L}^{(0)} = \mathbb{I}$. Pak LR algoritmus konverguje také, a platí, že posloupnost $\mathbb{A}^{(k)}$ konverguje k horní trojúhelníkové matici s hlavními čísly matice $\mathbb{A}$ na diagonále seřazenými sestupně podle velikosti v absolutní hodnotě.