Separace kořenů
Metoda bisekcí
Metody vyšších řádů přesnoti
Metoda regula falsi
Newtonova metoda
Globáně konvergující metody
Řešení systémů nelineárních rovnic

Tomáš Oberhuber

Faculty of Nuclear Sciences and Physical Engineering
Czech Technical University in Prague

Separace kořenů
Metoda bisekcí
Metody vyšších řádů přesnoti
Metoda regula falsi
Newtonova metoda
Globáně konvergující metody
Řešení systémů nelineárních rovnic

Video na Youtube

Iterační metody pro nelineární rovnice

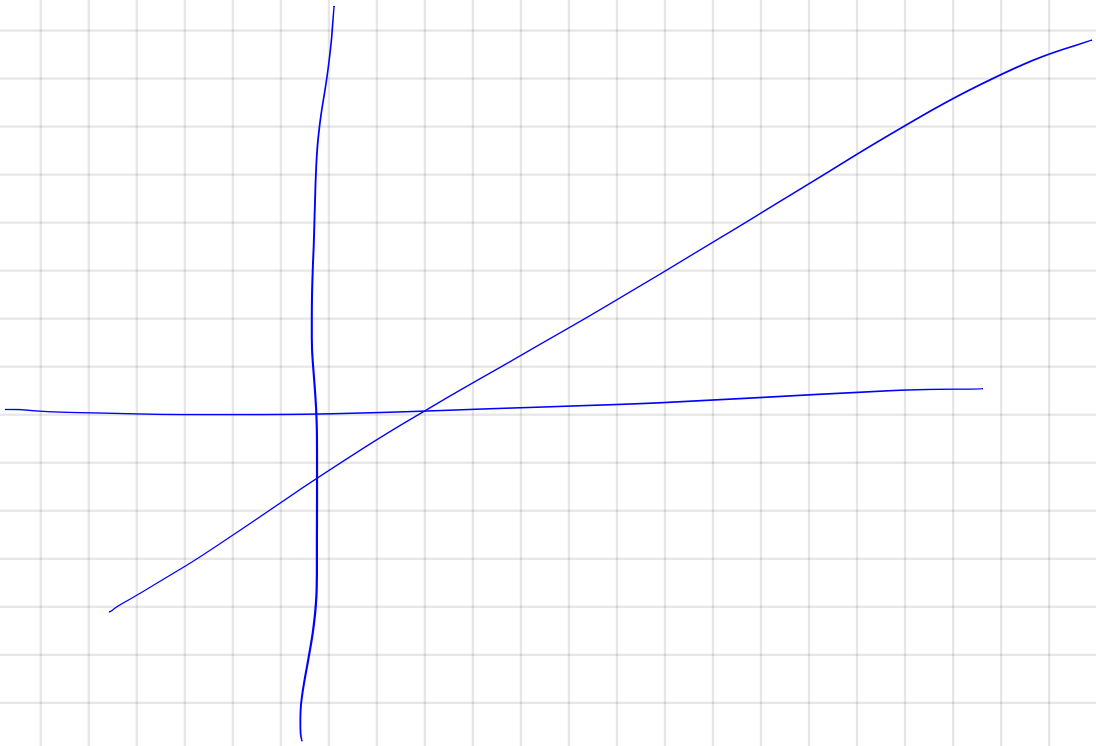
Buď f reálná funkce jedné reálné proměnné. Budeme hledat řešení rovnice

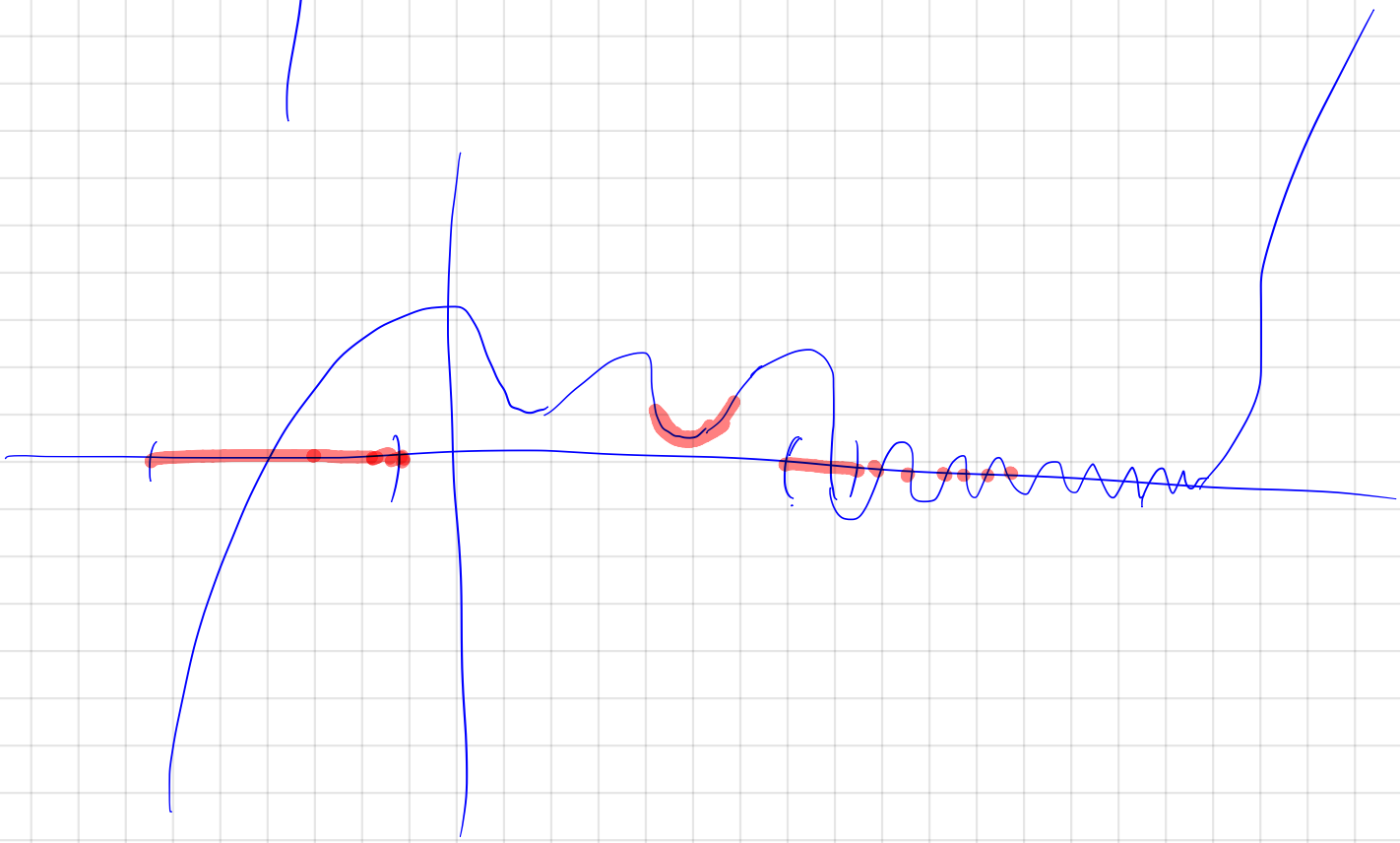
$$f(x) = 0.$$

Řešení se skládá ze dvou kroků:

- separace kořenů
  - metody nekonvergují globálně, tj. pro libovolné x_0, jako metody pro linerání soustavy – nejprve tedy musíme najít interval nebo intervaly, tak že obsahují vždy jen jeden kořen rovnice
- výpočet kořene se zadanou přesností

Kořen rovnice budeme značit jako α.





Separace kořenů

- separaci kořenů dokážeme provést jen pro algebraické rovnice např. pomocí **Sturmových posloupností** – viz Wikipedie, Numerical Recipes.
- obecně to ale nejde a musíme mít nějaký předběžný odhad podle řešené úlohy
  - bez něj často nejsme schopní tyto rovnice řešit

To, že separaci lze provést a za jakých podmínek, říká následující věta:

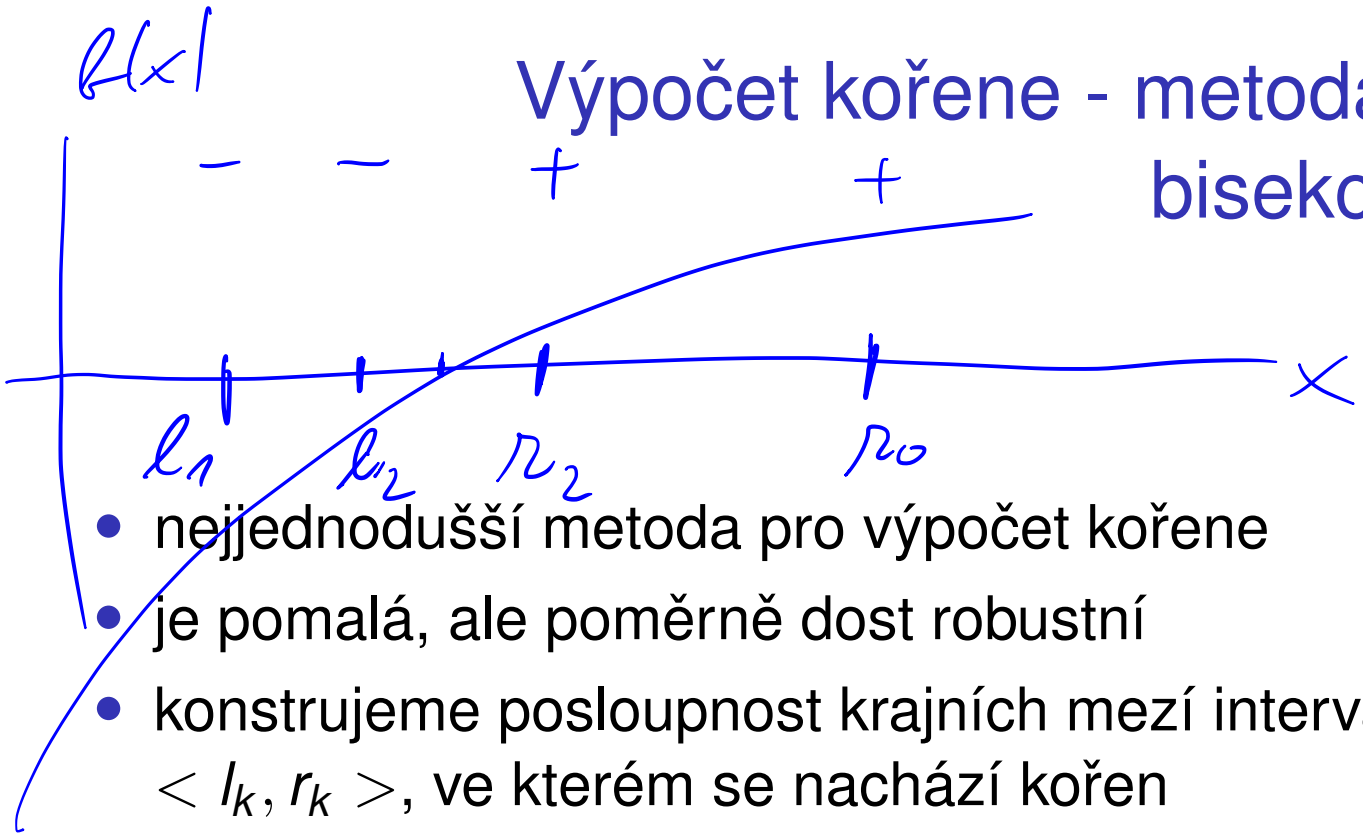
Separace kořenů

Theorem 1

Nechť f je reálná funkce jedné reálné proměnné, spojitá na intervalu $< a, b >$ a nechť $f(a)f(b) < 0$. Potom rovnice $f(x) = 0$ má na (a, b) alespoň jeden kořen a pokud navíc $f'(x)$ na (a, b) nemění znaménko, pak je tento kořen jediný.

- budeme konstruovat posloupnost $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, která bude konvergovat ke kořenu rovnice

Výpočet kořene - metoda bisekcí



- nejjednodušší metoda pro výpočet kořene
- je pomalá, ale poměrně dost robustní
- konstrujeme posloupnost krajních mezí intervalů $< l_k, r_k >$, ve kterém se nachází kořen
- každý následující interval má poloviční délku toho předchozího

$$\frac{l_0 + r_0}{2} = M_1 \; ; \quad \frac{l_1 + r_1}{2} = l_2$$

Výpočet kořene - metoda bisekcí

- volíme $l_0 = a$ a $r_0 = b$
- v každé iteraci pak počítáme

$$x_k = \frac{l_k + r_k}{2},$$

$$l_{k+1} := \begin{cases} x_k \text{ pokud sign } f(x_k) = \text{sign } f(l_k), \\ l_k \text{ jinak} \end{cases}$$

$$r_{k+1} := \begin{cases} x_k \text{ pokud sign } f(x_k) = \text{sign } f(r_k), \\ r_k \text{ jinak} \end{cases}$$

Výpočet kořene - metoda bisekcí

- označíme-li $\mathcal{I}_k =< l_k, r_k >$, pak vždy platí, že $\alpha \in \mathcal{I}_k$ a

$$|\alpha - x_k| \leq |\mathcal{I}_k| = \frac{b-a}{2^k} \rightarrow 0$$

$\alpha, x_k \in \mathcal{I}_k$

Výpočet kořene - metoda bisekcí

Example 2

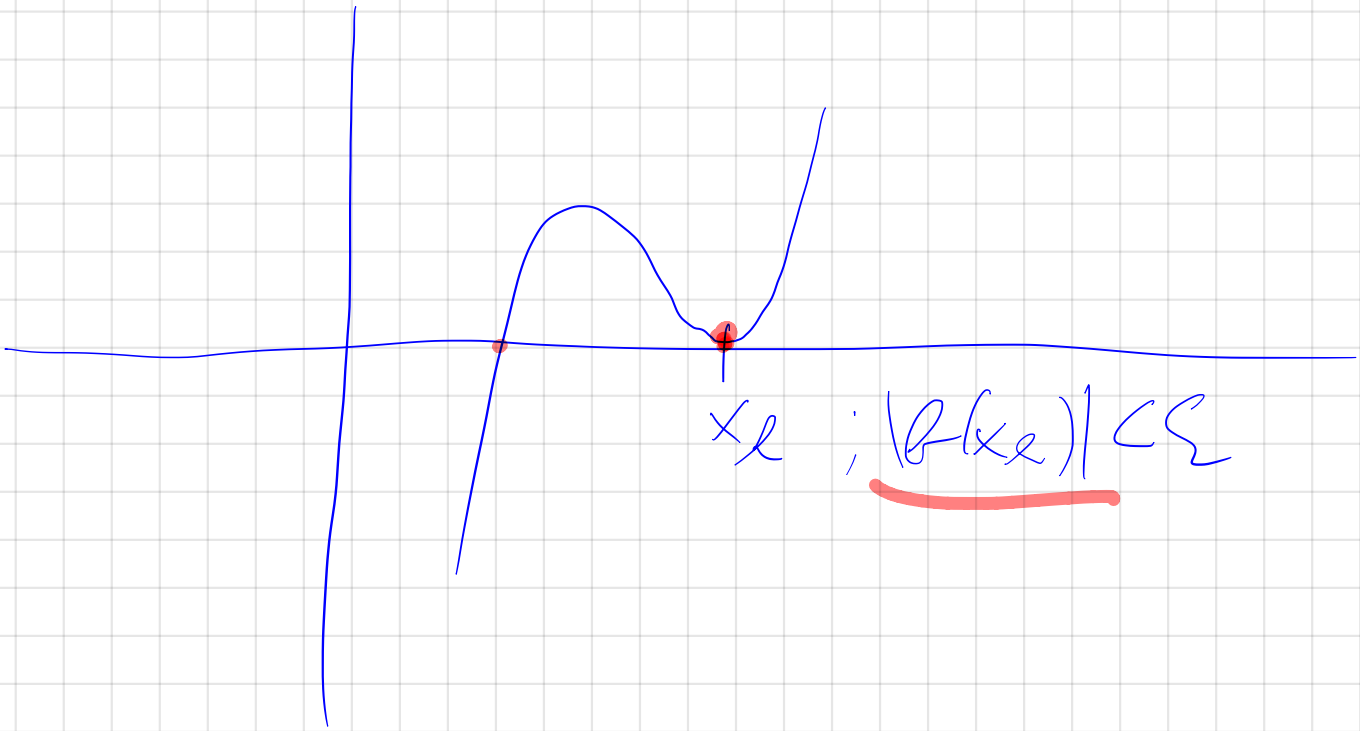
Použijte metodu bisekcí pro nalezení kořene polynomu $x^3 + 4x^2 - 10$ v intervalu $< 1, 2 >$ ($\alpha \approx 1.3652$).

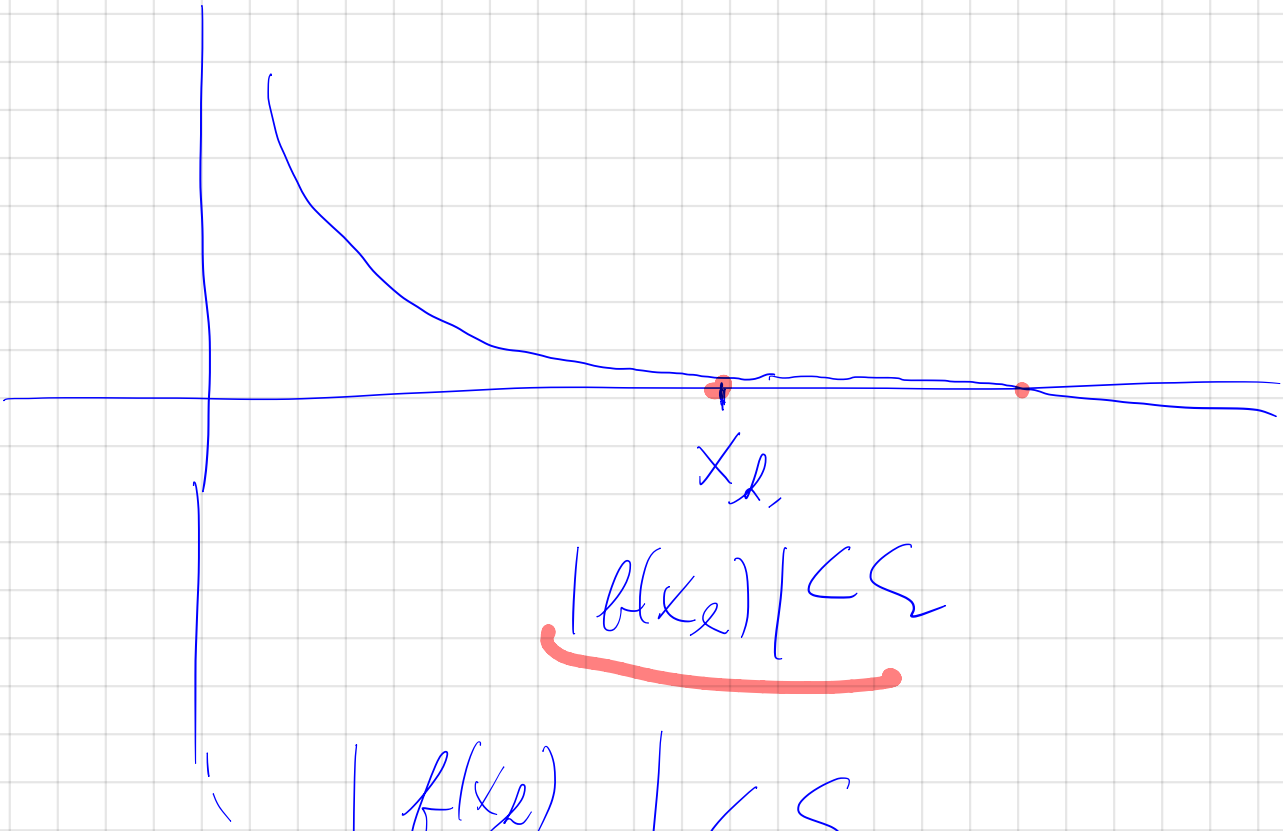
k	l_k	r_k	$f(l_k)$	$f(r_k)$	x_k	$f(x_k)$
1	1.0	2.0	-5.0	14.0	1.5	2.375
2	1.0	1.5	-5.0	2.375	1.25	-1.796875
3	1.25	1.5	-1.796875	2.375	1.375	0.162109375
4	1.25	1.375	-1.796875	0.162109375	1.3125	-0.848388671875

$|f(x_k)| \to 0$

$|f(x_k)| < \varepsilon$

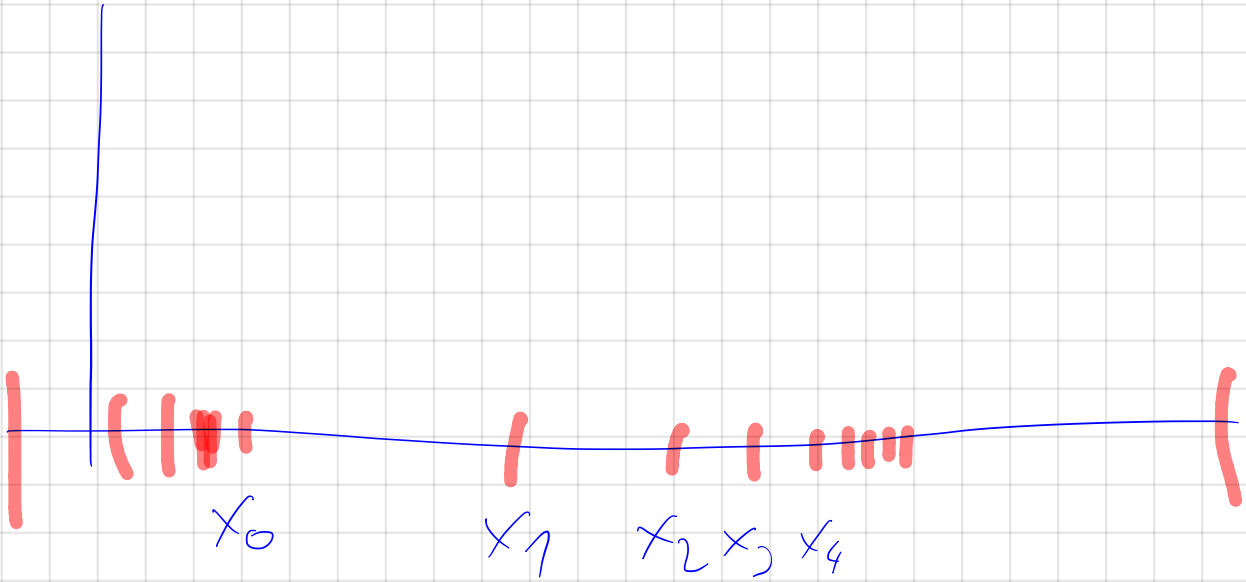
$$|f(x_k)| < \varepsilon$$





$$\left|\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\right| < \varepsilon$$

$$|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$$


x_0
x_1
x_2
x_3
x_4

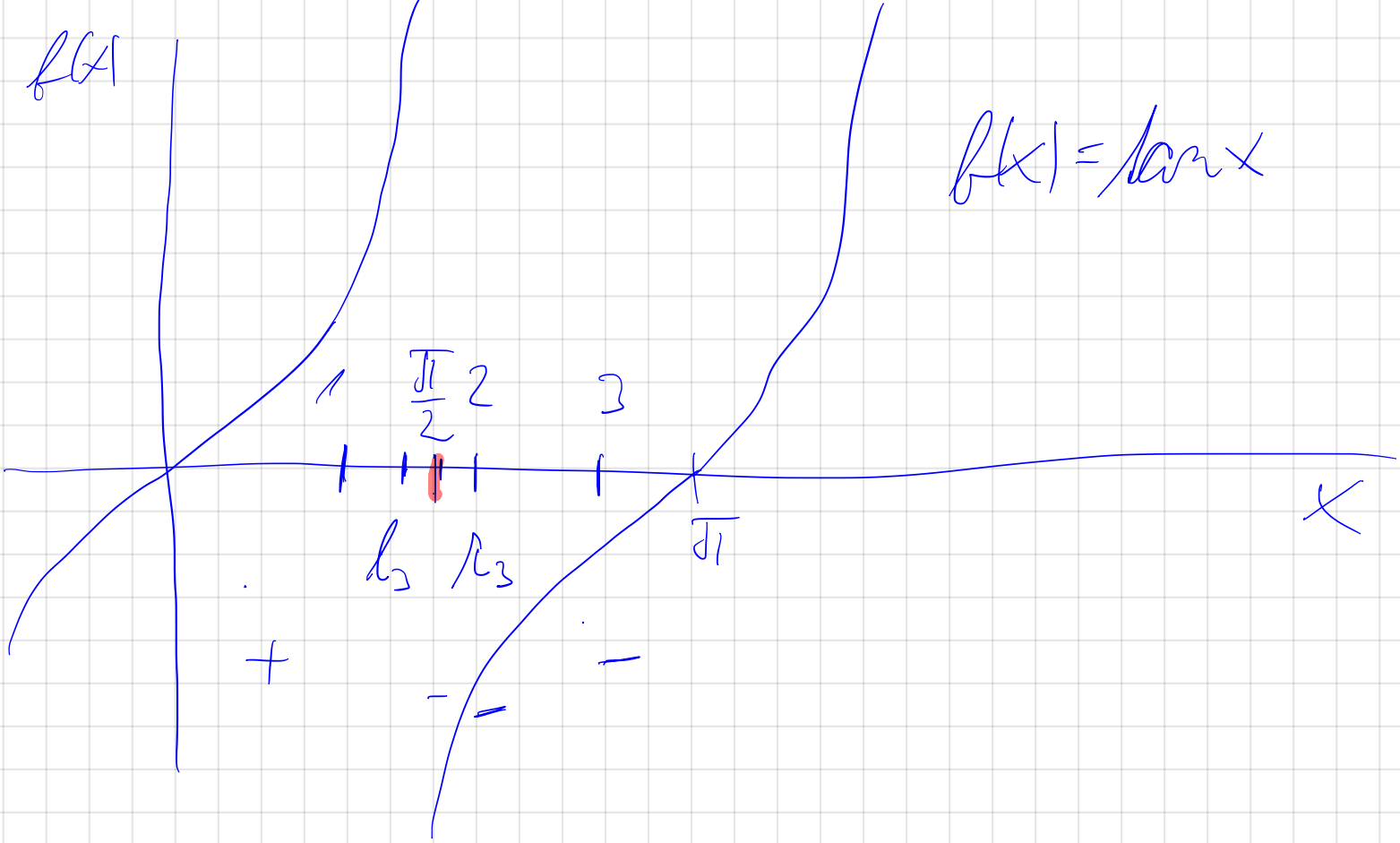
Výpočet kořene - metoda bisekcí

Remark 3

Metoda bisekcí koverguje i pro úlohu

$$\tan x = 0,$$

pro $l_0 = 1$, $r_0 = 3$. *Posloupnost* x_k *konverguje k* $\frac{\pi}{2}$, *což ale samozřejmě není kořen. V této úloze jsme ale porušili předpoklad spojitosti funkce* $f(x)$ *na odseparovaném intervalu.*



$f(x) = \tan x$

$l_3, r_3, x_l \to \frac{\pi}{2}$

Iterativní metody pro hledání kořenů

- abychom urychlili konvergenci, využijeme více informací o funkci f, než jen její znaménko v bodě x_k
- máme-li určité x_k, ptáme se, jak nejlépe ho změnit, aby se nové x_{k+1} co nejlépe přiblížilo k α
- pokud je f diferencovatelná, pak platí

$$
\begin{aligned}
0 = f(\alpha) &= f(x_k) + f'(\xi)(\alpha - x_k), \\
\alpha - x_k &= \frac{-f(x_k)}{f'(\xi)}, \\
\alpha &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(\xi)}
\end{aligned}
$$

- $f'(\xi)$ ale neznáme, lze ho napočítat jen přibližně

Iterativní metody pro hledání kořenů

- označme aproximaci $f'(\xi)$ jako q_k
- dostáváme obecný předpis

$$x_{k+1} = \varphi(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{q_k}.$$

- vidíme, že platí $\varphi(\alpha) = \alpha$
- otázka je, za jaké podmínky bude metoda s tímto předpisem konvergovat

Iterativní metody pro hledání kořenů

$x_{k+1} = \varphi(x_k)$

Theorem 4

Nechť platí $\varphi(\alpha) = \alpha$, φ je diferencovatelná na okolí

$$V = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - \alpha| \leq r\} \equiv < \alpha - r, \alpha + r >,$$

a nechť pro všechna $x \in V$ je

$\varphi \in C^{(1)}(V)$

$$|\varphi'(x)| \leq K < 1.$$

$\Leftrightarrow \underline{\varphi'(\alpha) < 1}$

Potom posloupnost $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ daná vztahem

$$x_{k+1} = \varphi(x_k),$$

$\vec{\varphi}(\vec{x}) = \mathbb{B}\vec{x} + \vec{c}$

$\vec{\varphi}'(\vec{x}) = \underline{\mathbb{B}}$; $\|\mathbb{B}\| < 1$

konverguje k α pro libovolné $x_0 \in V$.

$\vec{x}^{(k+1)} = \mathbb{B}\vec{x}^{(k)} + \vec{c}$

Důkaz.

Video na Youtube

- $x_k \in V \Rightarrow \underset{=x_{k+1}}{\varphi(x_k)} \in V$

$$|\varphi(x_k)-\alpha| = |\varphi(x_k)-\underset{=\alpha}{\varphi(\alpha)}| = |\varphi'(\xi_k)|\,|x_k-\alpha|$$

$$\xi_k \in \underset{x_k<\alpha}{(x_k,\alpha)} \vee \xi_k \in \underset{\alpha<x_k}{(\alpha,x_k)}$$

$$\Rightarrow \xi_k \in V \Rightarrow |\varphi'(\xi_k)| \le K < 1$$

$$|\varphi(x_k)-\alpha| = \underbrace{|\varphi'(\xi_k)|}_{<1}\,|x_k-\alpha| < |x_k-\alpha| \le R$$

$$\Rightarrow \varphi(x_k) = x_{k+1} \in V$$

- $\underset{\varphi(\alpha)}{\underset{\parallel}{|x_k-\alpha|}} = |\varphi(x_{k-1})-\varphi(\alpha)| = |\varphi'(\xi_{k-1})|\,|x_{k-1}-\alpha|$

$$\xi_{k-1} \in (x_{k-1},\alpha) \vee \xi_{k-1} \in (\alpha, x_{k-1})$$

$$= |\varphi'(\xi_{k-1})|\,\underline{|\varphi(x_{k-2})-\varphi(\alpha)|} =$$

$$|\varphi'(\xi_{k-1})|\,|\varphi'(\xi_{k-2})|\,|x_{k-2}-\alpha| = \dots =$$

$$\xi_{k-2} \in (x_{k-2},\alpha) \vee \xi_{k-2} \in (\alpha, x_{k-2}) \quad ; \xi_k \in V ; \forall k$$

$$\underset{\le K}{|\varphi'(\xi_{k-1})|}\,\underset{\le K}{|\varphi'(\xi_{k-2})|}\cdots\underset{\le K}{|\varphi'(\xi_0)|}\,|x_0-\alpha| \le \underset{<1}{K}^k\,|x_0-\alpha| \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

$\square$

Iterativní metody pro hledání kořenů

Definition 5

Řekneme, že iterativní metoda daná vztahem $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ má řád konvergence m, jestliže platí

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq C\,|x_k - \alpha|^m .$$

$C = 1$

$|x_k - \alpha| = 100$

$$|x_{k+1} - \alpha| < \frac{1}{10^m}$$

$f^{(m)}$

Iterativní metody pro hledání kořenů

Remark 6

Nechť φ má na okolí α spojité derivace do řádu m včetně (tj. $\varphi \in C^{(m)}(H_\alpha)$) a platí

$$\varphi'(\alpha) = \varphi''(\alpha) = \ldots = \varphi^{(m-1)}(\alpha) = 0,$$

a

$$\varphi^{(m)}(x) \neq 0,$$

$\varphi(x_k) = \cancel{\varphi(\alpha)} + \varphi'(\alpha)(x_k - \alpha).$

na H_α. Pak pro libovolne $x_k \in H_\alpha$ platí

$$\begin{aligned} x_{k+1} - \alpha &= \varphi(x_k) - \varphi(\alpha) = \\ &= \varphi'(\alpha)(x_k - \alpha) + \ldots + \frac{\varphi^{(m-1)}(\alpha)}{(m-1)!}(x_k - \alpha)^{m-1} \\ &\quad + \frac{\varphi^{(m)}(\xi)}{m!}(x_k - \alpha)^m \\ &= \frac{\varphi^{(m)}(\xi)}{m!}(x_k - \alpha)^m. \end{aligned}$$

$\Rightarrow |x_{k+1} - \alpha| \leq C|x_k - \alpha|^m$

Iterativní metody pro hledání kořenů

Remark 7

Buď funkce $f \in C^{(1)}(\mathbb{R})$ a nechť $f'(\alpha) \neq 0$. Pak platí:

$$f(x_k) = \underbrace{f(\alpha)}_{=0} + f'(\xi)(x_k - \alpha)$$

a tedy

$$|x_k - \alpha| \leq \frac{|f(x_k)|}{|f'(\xi)|} \leq C\,|f(x_k)|\,.$$

Jako odhad chyby a zároveň kritérium pro zastavení výpočtu proto bereme $|f(x_k)|$.

Metoda regula falsi

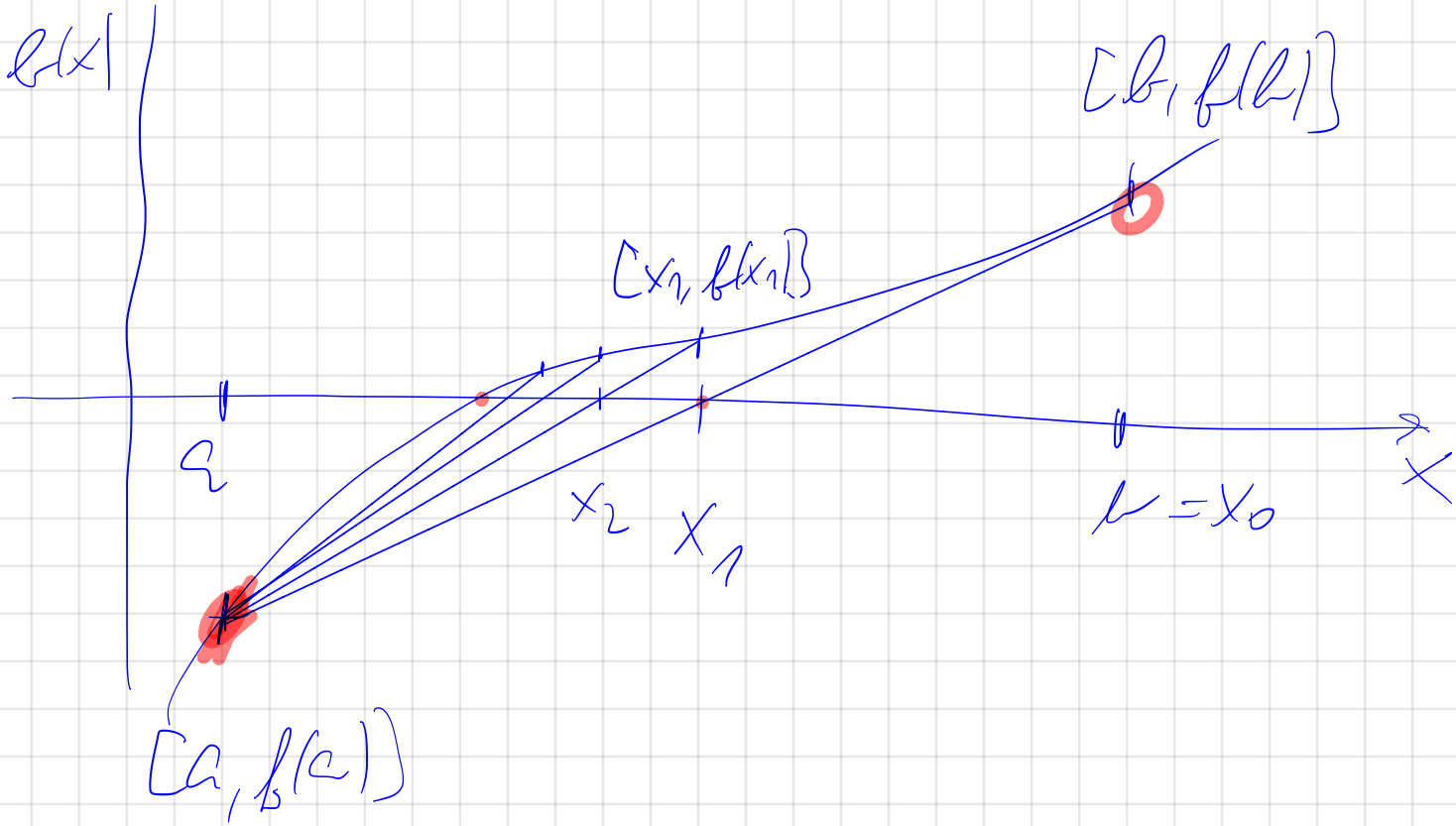
- u této metody definujeme $x_0 = l_0 = a$, $x_0' = r_0 = b$
- vytvoříme úsečku mezi body $(x_0, f(x_0))$ a $(x_0', f(x_0'))$
- protože $f(x_0)$ a $f(x_0')$ mají různá znaménka, úsečka musí protnout osu x, tento průsečík označíme jako x_1
- dále definujeme

$$l_1 := \begin{cases} x_1 \text{ pokud sign } f(x_1) = \text{sign } f(l_0), \\ l_0 \text{ jinak} \end{cases}$$

$$r_1 := \begin{cases} x_1 \text{ pokud sign } f(x_1) = \text{sign } f(r_0), \\ r_0 \text{ jinak} \end{cases}$$

$$x_1' := \begin{cases} l_1 \text{ pokud sign } f(x_1) = \text{sign } f(r_1), \\ r_1 \text{ jinak} \end{cases}$$

- celý postup pak iterativně opakujeme


f(x)
[b, f(b)]
[x1, f(x1)]
a
x2
x1
b = x0
x
[a, f(a)]

$f(x_k)f(x_k') < 0$

Metoda regula falsi

- rovnice úsečky mezi $(x_k, f(x_k))$ a $(x_k', f(x_k'))$ má tvar

$$y(x) = f(x_k) + \frac{f(x_k) - f(x_k')}{x_k - x_k'}(x - x_k)$$

- položíme $y(x) = 0$ a řešíme rovnici

$$0 = f(x_k) + \frac{f(x_k) - f(x_k')}{x_k - x_k'}(x_{k+1} - x_k)$$

- výsledkem je

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_k'}{f(x_k) - f(x_k')} f(x_k)$$

$\frac{1}{q_k}$

- zobrazení φ má tvar

$$\varphi(x) = x - \frac{x - x_k'}{f(x) - f(x_k')} f(x)$$

Metoda regula falsi

$x_0' = a$

$f(x_k) f(x_{k-1}) < 0 \Rightarrow$

$x_k' = x_{k-1}$; $x_k' = x_{k-1}$ JINAK

- definujeme

$$l_{k+1} := \begin{cases} x_{k+1} \text{ pokud } \operatorname{sign} f(x_{k+1}) = \operatorname{sign} f(l_k), \\ l_k \text{ jinak} \end{cases}$$

$$r_{k+1} := \begin{cases} x_{k+1} \text{ pokud } \operatorname{sign} f(x_{k+1}) = \operatorname{sign} f(r_k), \\ r_k \text{ jinak} \end{cases}$$

$$x'_{k+1} := \begin{cases} l_{k+1} \text{ pokud } \operatorname{sign} f(x_{k+1}) = \operatorname{sign} f(r_{k+1}), \\ r_{k+1} \text{ jinak} \end{cases}$$

- jinými slovy je x'_k poslední napočítaný člen s opačným znaménkem než má x_k

Metoda regula falsi

Example 8

Použijte metodu regula falsi pro nalezení kořene polynomu $x^3 + 4x^2 - 10$ v intervalu $< 1, 2 >$ ($\alpha \approx 1.3652$).

k	l_k	r_k	$f(l_k)$	$f(r_k)$	x_k	x'_k
0	1.0	2.0	-5.0	14.0	1.0	2.0
1	1.26315789474	2.0	-1.60227438397	14.0	1.26315789474	2.0
2	1.26315789474	1.42906437248	-1.60227438397	1.08737088326	1.42906437248	1.26315789474
3	1.36199163414	1.42906437248	-0.0533917829598	1.08737088326	1.36199163414	1.42906437248
4	1.36513087878	1.42906437248	-0.00163697021424	1.08737088326	1.36513087878	1.42906437248

Metoda regula falsi

Theorem 9

Nechť platí

- *existuje otevřené okolí H_α bodu α takové, že $f \in C^{(1)}(H_\alpha)$ tj. na H_α existuje derivace f' a je zde spojitá,*
- $f'(\alpha) \neq 0$.

Pak existuje r takové, že

$$V_\alpha \equiv \{x \in \mathbb{R} \mid |x - \alpha| < r\} \subset H_\alpha.$$

a metoda regula falsi konverguje, pro libovolné $x_0 \in V_\alpha$ s rychlostí prvního řádu.

Důkaz.

Video na Youtube

$\square$

$x_k, x_k' \in U_\alpha$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_k'}{f(x_k) - f(x_k')} f(x_k)$$

$$|x_{k+1} - \alpha| = \left| x_k - \frac{x_k - x_k'}{f(x_k) - f(x_k')} f(x_k) - \alpha \right| =$$

$$= \left| x_k - \alpha - \frac{\cancel{x_k - x_k'}}{f'(\xi)\cancel{(x_k - x_k')}} \underbrace{(f(x_k) - f(\alpha))}_{=0} \right| =$$

$$\xi \in \underset{x_k < x_k'}{(x_k, x_k')} \vee \xi \in \underset{x_k' < x_k}{(x_k', x_k)} \Rightarrow \xi \in U_\alpha$$

$$= \left| x_k - \alpha - \frac{f'(\xi')(x_k - \alpha)}{f'(\xi)} \right| = \left| 1 - \frac{f'(\xi')}{f'(\xi)} \right| |x_k - \alpha|$$

$$\xi' \in \underset{x_k < \alpha}{(x_k, \alpha)} \vee \xi' \in \underset{\alpha < x_k}{(\alpha, x_k)} \Rightarrow \xi' \in U_\alpha$$

$$|x_{k+1} - \alpha| = \underbrace{\left| \frac{f'(\xi') - f'(\xi)}{f'(\xi)} \right|}_{? \; < 1} |x_k - \alpha|$$

PRO ξ, ξ' DOSTATEČNĚ BLÍZKO

f' JE SPOJITÁ

$$\left| \frac{f'(\xi') - f'(\xi)}{f'(\xi)} \right| \leq \frac{1}{C} |f'(\xi') - f'(\xi)| \leq \frac{\varepsilon}{C} \leq K < 1$$

$f'(\alpha) \neq 0 \Rightarrow |f'(\xi)| > C$ PRO ξ DOSTATEČNĚ BLÍZKO α

$x_k, x_k' \in U_\alpha \Rightarrow |x_{k+1} - \alpha| \leq \underset{<1}{K} |x_k - \alpha|$

- $x_0, x_0' \in U_\alpha \Rightarrow x_k \in U_\alpha \Rightarrow x_k' \in U_\alpha \quad \forall k$
- $|x_k - \alpha| \leq K |x_{k-1} - \alpha| \leq K^2 |x_{k-2} - \alpha| \leq \dots$

$\leq \underset{<1}{K^k} |x_0 - \alpha| \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$ $\square$

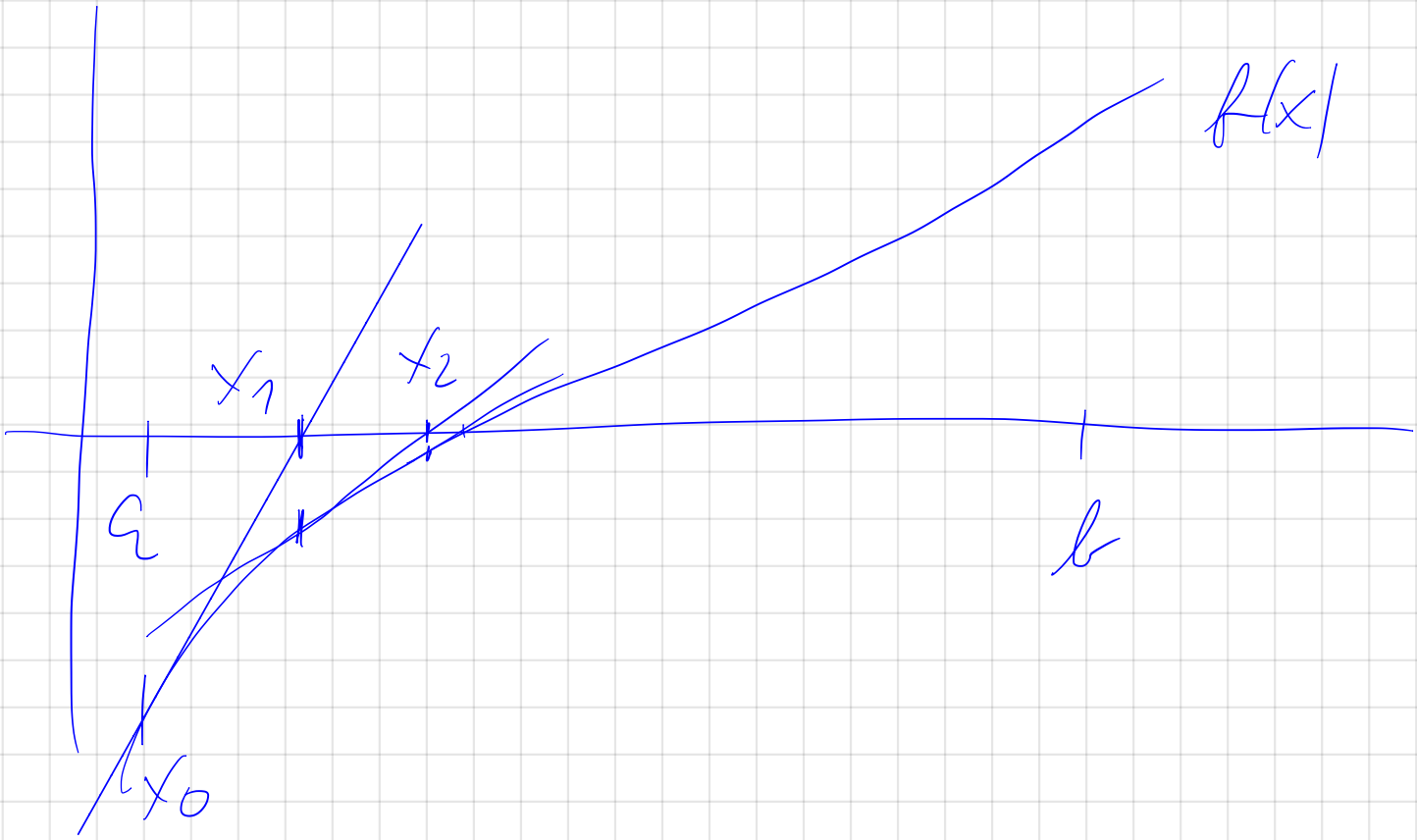
Newtonova metoda

- u Newtonovy metody volíme $x_0 = a$
- pro $k = 0, 1, \ldots$ konstruujeme tečny ke grafu funkce v bodě x_k a tam, kde se tečna protne s osou x definujeme nový bod x_{k+1}
- rovnice tečny má tvar

$$y(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)$$

- pro $y(x) = 0$ dostáváme

$$0 = f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k)$$


f(x)
x1
x2
a
b
x0

Newtonova metoda

$q_k \approx f'(x_k)$

- tedy platí

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

- zobrazení φ má tvar

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Newtonova metoda

Example 10

Použijte Newtonovu metodu pro nalezení kořene polynomu $x^3 + 4x^2 - 10$ v intervalu $< 1, 2 >$ ($\alpha \approx 1.3652$).

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$
0	1.0	-5.0	11.0
1	1.45454545455	1.54019534193	19.4381678093
2	1.37530983126	0.16727562303	16.676910046
3	1.36527945857	0.000816527384453	16.5141996685
4	1.36523001461	$1.97484268938 \cdot 10^{-8}$	16.5133990953

Newtonova metoda

Theorem 11

Nechť platí

- *existuje otevřené okolí H_α bodu α takové, že $f \in C^{(1)}(H_\alpha)$ tj. na H_α existuje derivace f' a je zde spojitá,*
- $f'(\alpha) \neq 0$.

Pak existuje r takové, že

$$V_\alpha \equiv \{x \in \mathbb{R} \mid |x - \alpha| < r\} \subset H_\alpha.$$

a Newtonova metoda konverguje, pro libovolné $x_0 \in V_\alpha$ s rychlostí prvního řádu.

Důkaz.

Video na Youtube

$\square$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad ; \quad \varphi(\alpha) = \alpha$$

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)\,f''(x)}{(f'(x))^2}$$

$$\varphi'(\alpha) = 1 - \left(\frac{f'(\alpha)}{f'(\alpha)}\right)^2 = 0 \Rightarrow |\varphi'(x)| \le K < 1 \text{ na } U_\alpha \Rightarrow x_k \to \alpha$$

$\cdot\ x_k \in U_\alpha$ $\qquad f(\alpha) = 0$

$$|x_{k+1} - \alpha| = \left| x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} - \alpha \right| = \left| x_k - \alpha - \frac{f(x_k) - f(\alpha)}{f'(x_k)} \right| =$$

$$= \left| x_k - \alpha - \frac{f'(S)(x_k - \alpha)}{f'(x_k)} \right| = \left| 1 - \frac{f'(S)}{f'(x_k)} \right| |x_k - \alpha|$$

$$\underset{x_k < \alpha}{S \in (x_k, \alpha)} \cup \underset{\alpha < x_k}{S \in (\alpha, x_k)} \Rightarrow S \in U_\alpha$$

f' JE SPOJITÁ

$$\left| 1 - \frac{f'(S)}{f'(x_k)} \right| = \left| \frac{f'(x_k) - f'(S)}{f'(x_k)} \right| \le \frac{1}{C} \left| f'(x_k) - f'(S) \right|$$

$$f'(\alpha) \neq 0 \ ; \ |f'(x_k)| > C$$

$$\le \frac{\varepsilon}{C} \le K < 1$$

$$x_k \in U_\alpha \Rightarrow |x_{k+1} - \alpha| \leq \underset{<1}{K} |x_k - \alpha| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{k+1} \in U_\alpha \Rightarrow x_0 \in U_\alpha \Rightarrow x_k \in U_\alpha \; ; \forall k$$

- $$|x_k - \alpha| \leq K |x_{k-1} - \alpha| \leq K^2 |x_{k-2} - \alpha| \leq \dots$$
$$\leq \underset{<1}{K^k} |x_0 - \alpha| \xrightarrow{k \to \infty} 0 \Rightarrow x_k \to \alpha$$

$\square$

Newtonova metoda

Theorem 12

Nechť platí

- *existuje otevřené okolí H_α bodu α takové, že $f \in C^{(2)}(H_\alpha)$ tj. na H_α existuje první a druhá derivace f' a f'' a jsou zde spojité,*
- $f'(\alpha) \neq 0$.

Pak existuje r takové, že

$$V_\alpha \equiv \{x \in \mathbb{R} \mid |x - \alpha| < r\} \subset H_\alpha.$$

a Newtonova metoda konverguje, pro libovolné $x_0 \in V_\alpha$ s rychlostí druhého řádu.

Důkaz.

Video na Youtube

□

$\cdot\ x_0 \in U_\alpha \Rightarrow x_k \in U_\alpha;\ \forall k$

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq \frac{1}{c} \underbrace{|f'(x_k) - f'(\overset{S \in U_\alpha}{S})|}\, |x_k - \alpha|$$

$$? \ |x_{k+1} - \alpha| \leq C' |x_k - \alpha|^2 \ ?$$

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq \frac{1}{c} |f''(S')|\, |x_k - S|\, |x_k - \alpha|$$

$$|x_k - S| \leq |x_k - \alpha|$$

$$\Rightarrow |x_{k+1} - \alpha| \leq \frac{|f''(S')|}{c} |x_k - \alpha|^2 \leq C' |x_k - \alpha|^2 \quad \square$$

Newtonova metoda

Remark 13

Newtonova metoda tedy za vhodných podmínek konverguje rychleji, než metoda Regula falsi nebo metoda bisekcí. Vyžaduje ale přesnější počáteční odhad řešení x_0, tj. V_α může být výrazně menší než u metody Regula falsi.

Newtonova metoda

$f(x) = x^3 ; f'(x) = 3x^2$

$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^3}{3x_k^2} =$

Example 14

Bude Newtonova metoda konvergovat v případě těchto dvou úloh?

1. $x^3 = 0$
2. $x^2 = 0 \rightarrow x_{k+1} = \frac{1}{2} x_k$

$= x_k - \frac{1}{3} x_k = \frac{2}{3} x_k$

$x_{k+1} = \frac{2}{3} x_k$

$\alpha = 0$

$x_k \rightarrow 0 = \alpha$

Čebyševova metoda

Remark 15

Pomocí Čebyševovy metody lze odvodit metody ještě vyšších řádů. Ty ale v praxi nejsou příliš užitečné, neboť vyžadují ještě přesnější odhad kořene rovnice a navíc se v něm vyskytují vyšší derivace funkce f. Kvadratická konvergence Newtonovy metody je v praxi naprosto postačující.

Globálně konvergující metody

Definition 16

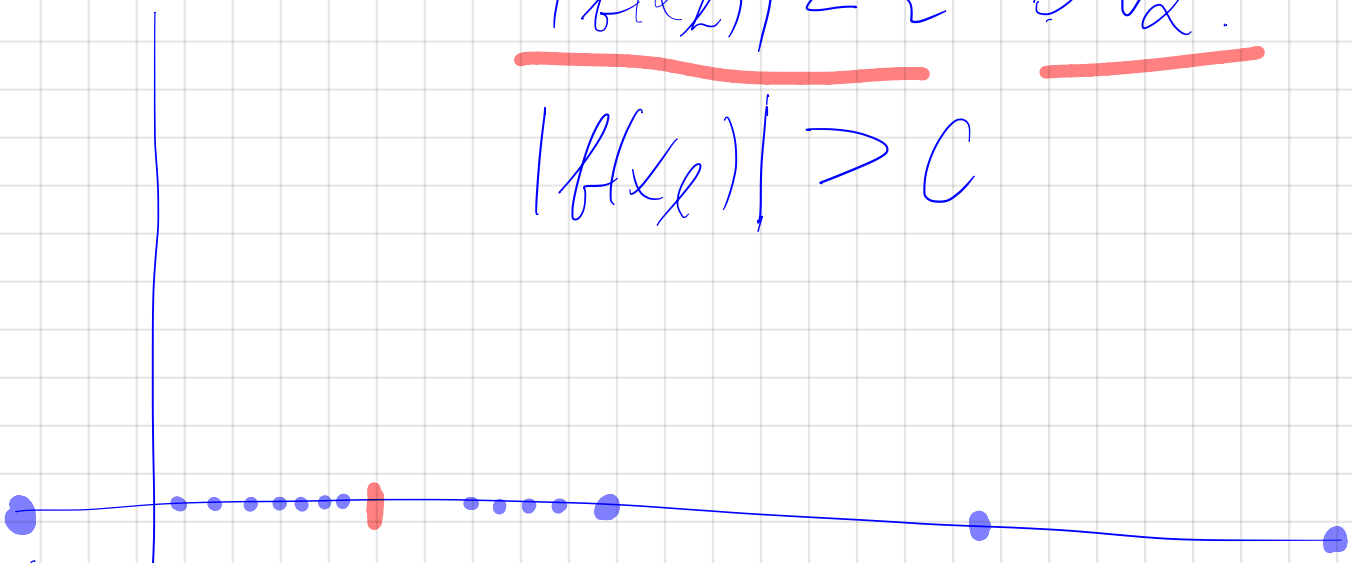
Pod pojmem *globálně konvergující metody* pro řešení nelineárních rovnic budeme rozumět metody, které pro libovolnou volbu počátečního odhadu kořene x_0 buď konvergují nebo algoritmicky selžou.

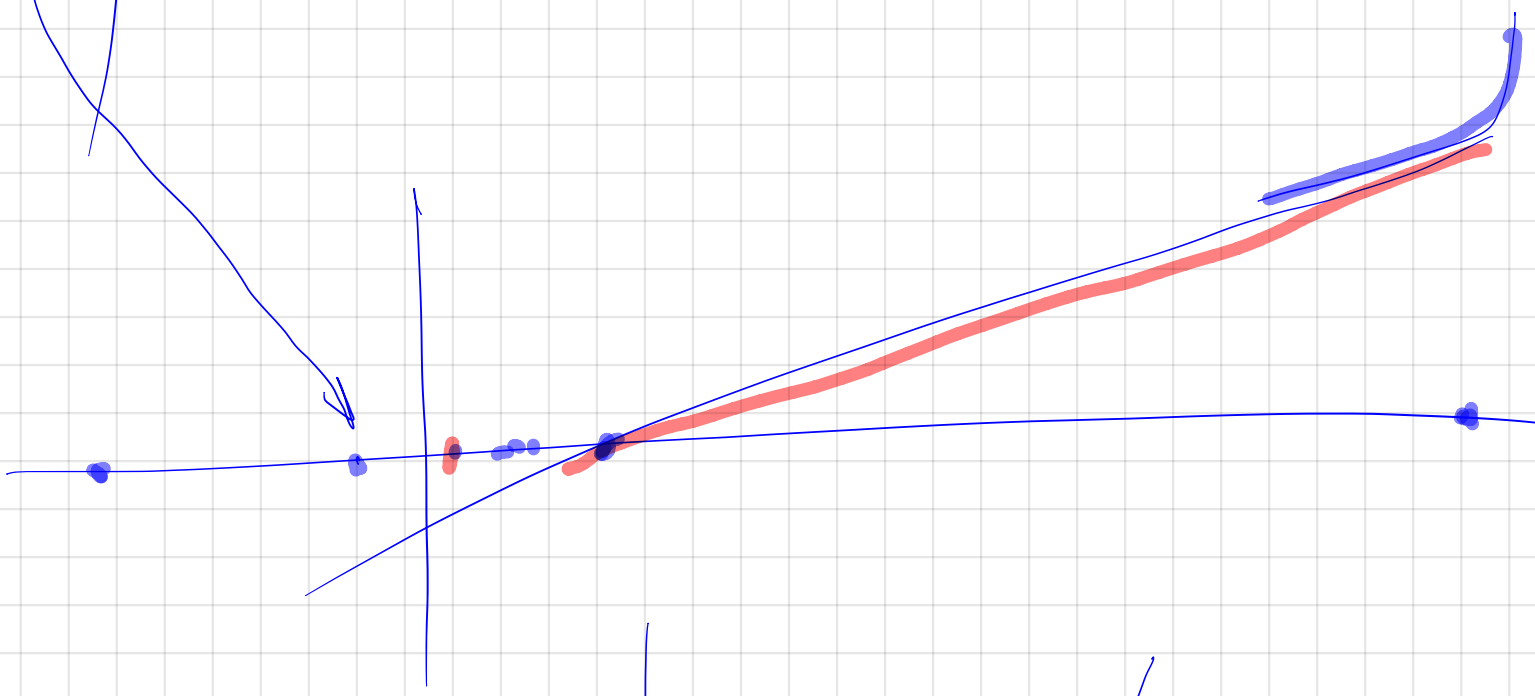
Remark 17

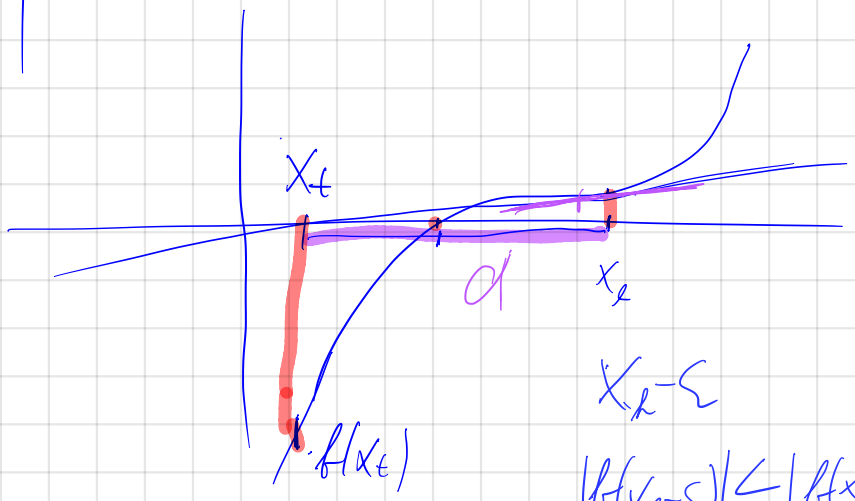
Metody, které jsme si ukázaly, často nekonvergují z jednoho důvodu. Pohybují se sice ve správném směru, ale dělají příliš veliký skok. Tím pádem kořen α přeskočí a získají nový odhad, který je horší, než ten předchozí. Řešením je, zamyslet se lépe nad velikostí kroku mezi x_k a x_{k+1}.

$|f(x_k)| < \varepsilon$? V_α?

$|f(x_k)| > C$







$x_k - \varepsilon$

$|f(x_k - \varepsilon)| < |f(x_k)|$

Globálně konvergující metody

Line search algoritmus

$x_{k+1} = x_k + d$

Algorithm 1 Line search

```
r_0 = |f(x)|
while r_0 > ε do
    if f'(x) = 0 then
        return EXIT_FAILURE;
    end if
    d = −f(x)/f'(x)
    x_t = x + d
    while |f(x_t)| ≥ |f(x)| do
        d = d/2
        x_t = x + d
    end while
    x = x_t
    r_0 = |f(x)|
end while
```

Metody pro řešení soustav nelineárních rovnic

Iterativní metody pro řešení soustav nelineárních algebraických a transcendentních rovnic

Remark 18

Mějme reálné funkce reálných proměnných $f_1, \ldots, f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Hledáme řešení soustavy rovnic:

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_n(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \ldots, x_n) &= 0, \\ f_2(x_1, \ldots, x_n) &= 0, \\ &\vdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n) &= 0. \end{aligned}$$

Řešení budeme značit $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)^T$. Jeho separace je v tomto případě často ještě obtížnější. Přesto pro naše úvahy budeme předpokládat existenci oblasti $H \subset \mathbb{R}^n$ (=otevřená souvislá množina) takové, že $\vec{a} \in H$.

Metody pro řešení soustav nelineárních rovnic

Remark 19

Provedeme formální zobecnění Newtonovy metody:

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} - \left[\mathbb{J}_{\vec{f}}\left(\vec{x}^{(k)}\right)\right]^{-1} \vec{f}\left(\vec{x}^{(k)}\right),$$

kde $\mathbb{J}_{\vec{f}}\left(\vec{x}^{(k)}\right)$ *je Jacobiho matice tj.*

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$\left(\mathbb{J}_{\vec{f}}\left(\vec{x}^{(k)}\right)\right)_{ij} = \frac{\partial f_i\left(\vec{x}^{(k)}\right)}{\partial x_j}.$$

resp.

$$\mathbb{J}_{\vec{f}}\left(\vec{x}^{(k)}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1\left(\vec{x}^{(k)}\right)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1\left(\vec{x}^{(k)}\right)}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n\left(\vec{x}^{(k)}\right)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n\left(\vec{x}^{(k)}\right)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Metody pro řešení soustav nelineárních rovnic

Remark 20

Pro praktické počítání je výhodnější následující tvar

$$\mathbb{J}_{\vec{f}}\left(\vec{x}^{(k)}\right)\overbrace{\left(\vec{x}^{(k+1)}-\vec{x}^{(k)}\right)}^{\Delta\vec{x}^{(k)}}=-\vec{f}\left(\vec{x}^{(k)}\right).$$

Označíme-li $\Delta\vec{x}^{(k)}=\vec{x}^{(k+1)}-\vec{x}^{(k)}$*, lze přepsat metodu do dvou kroků:*

$\Delta\vec{x}^{(k)}\to\vec{0}$

Algorithm 2 Newtonova metoda pro systémy

1: Vyřeš lineární systém: $\mathbb{J}_{\vec{f}}\left(\vec{x}^{(k)}\right)\Delta\vec{x}^{(k)}=-\vec{f}\left(\vec{x}^{(k)}\right)$
2: Iteruj: $\vec{x}^{(k+1)}=\vec{x}^{(k)}+\Delta\vec{x}^{(k)}$

Metody pro řešení soustav nelineárních rovnic

Remark 21

Výhodou je, že jsme výpočet inverzní matice převedli na řešení lineárního systému. K tomu lze použít i některou z iteračních metod. Jelikož systém v prvním kroku nemusí být nutně řešený s maximální přesností, stačí často udělat jen pár iterací a výpočet metody se tím značně urychlí oproti výpočtu inverze matice pomocí Gaussovy eliminace.

Metody pro řešení soustav nelineárních rovnic

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Theorem 22

Buď funkce $f \in C^{(1)}(H)$, kde H je konvexní oblast. Pak pro každé $\vec{u}, \vec{v} \in H$ existuje $\vec{\xi} \in H$ takové, že

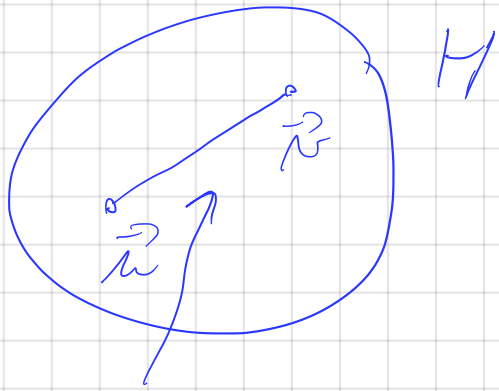
$$f(\vec{u}) - f(\vec{v}) = \nabla f(\vec{\xi})(\vec{u} - \vec{v}).$$

$f(u) - f(v) = f'(\xi)(u - v)$

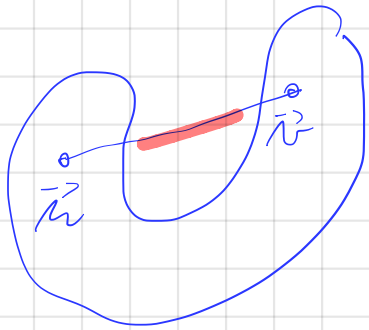
Důkaz.

Video na Youtube

□



M



$$\theta\vec{u} + (1-\theta)\vec{v}$$

$$g(\theta) = f(\theta\vec{u} + (1-\theta)\vec{v}) \Rightarrow g(0) = f(\vec{v}) ; g(1) = f(\vec{u})$$

$$f(\vec{u}) - f(\vec{v}) = g(1) - g(0) \quad ; \quad g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$g: \langle 0,1 \rangle \to \mathbb{R}$$

?

$$g(1) - g(0) = g'(\delta)(1-0) = g'(\delta) = f(\vec{u}) - f(\vec{v})$$

$$g(\theta) = f(\theta u_1 + (1-\theta)v_1, \dots, \theta u_n + (1-\theta)v_n)$$

$$g'(\theta) = \frac{\partial f(\theta\vec{u} + (1-\theta)\vec{v})}{\partial x_1}(u_1 - v_1) +$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(\theta u_1 + (1-\theta)v_1)$$

$$+ \frac{\partial f(\theta\vec{u} + (1-\theta)\vec{v})}{\partial x_2}(u_2 - v_2) + \dots +$$

$$+ \frac{\partial f(\theta\vec{u} + (1-\theta)\vec{v})}{\partial x_n}(u_n - v_n) =$$

$$= \nabla f(\theta\vec{u} + (1-\theta)\vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$$

$$f(\vec{u}) - f(\vec{v}) = g'(s) \; ; \; s \in (0,1)$$

$$\vec{s} = s\,\vec{u} + (1-s)\,\vec{v} \Rightarrow \vec{s} \in \text{ÚSEČKA}(\vec{u}, \vec{v})$$

$$f(\vec{u}) - f(\vec{v}) = g'(s) = \nabla f(\vec{s}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$$

$\square$

Metody pro řešení soustav nelineárních rovnic

Theorem 23

Nechť platí

- *existuje otevřené okolí $H_{\vec{a}}$ bodu $\vec{a}$ takové, že $\vec{f} \in C^{(1)}(H_{\vec{a}})$ tj. na $H_{\vec{a}}$ existují všechny parciální derivace prvního řádu a jsou zde spojité,*
- $\mathbb{J}_{\vec{f}}(\vec{a})$ *je regulární.*

Pak existuje r takové, že

$$V_{\vec{a}} \equiv \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \left| \vec{x} - \vec{a} \right| < r \right\} \subset H_{\vec{a}},$$

a Newtonova metoda konverguje, pro libovolné $\vec{x}^{(0)} \in V_{\vec{a}}$ s rychlostí prvního řádu.

Důkaz.

Video na Youtube

$$\vec{x}^{(k)} \in V_\alpha \quad ; \quad \vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} - J_{\vec{f}}^{-1}(\vec{x}^{(k)})\, \vec{f}(\vec{x}^{(k)})$$

$$\|\vec{x}^{(k+1)} - \vec{a}\| = \|\vec{x}^{(k)} - J_{\vec{f}}^{-1}(\vec{x}^{(k)})\big(\vec{f}(\vec{x}^{(k)}) - \underbrace{\vec{f}(\vec{a})}_{=\vec{0}}\big) - \vec{a}\|$$

$$= \|\vec{x}^{(k)} - \vec{a} - J_{\vec{f}}^{-1}(\vec{x}^{(k)})\big(\underline{\vec{f}(\vec{x}^{(k)}) - \vec{f}(\vec{a})}\big)\|$$

$$\vec{f}(\vec{x}^{(k)}) - \vec{f}(\vec{a}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}^{(k)}) - f_1(\vec{a}) \\ \vdots \\ f_n(\vec{x}^{(k)}) - f_n(\vec{a}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\nabla f_1(\vec{\xi}_1)}\,(\vec{x}^{(k)} - \vec{a}) \\ \vdots \\ \underline{\nabla f_n(\vec{\xi}_n)}\,(\vec{x}^{(k)} - a) \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\begin{pmatrix} \nabla f_1(\vec{\xi}_1) \\ \vdots \\ \nabla f_n(\vec{\xi}_n) \end{pmatrix}}\,(\vec{x}^{(k)} - \vec{a}) = J_{\vec{f}}(\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_n)\,(\vec{x}^{(k)} - \vec{a})$$

$$\vec{f} \in C^{(1)}(H_{\vec{a}}) \Rightarrow \lim_{\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_n \to \vec{\xi}} J_{\vec{f}}(\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_n) \to J_{\vec{f}}(\vec{\xi})$$

$$\|\vec{x}^{(k+1)} - \vec{a}\| = \|\vec{x}^{(k)} - \vec{a} - J_{\vec{f}}^{-1}(\vec{x}^{(k)})\, J_{\vec{f}}(\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_n) \cdot (\vec{x}^{(k)} - \vec{a})\|$$

$$\|\vec{x}^{(k+1)} - \vec{a}\| = \left\| \left[\underline{\mathbb{I} - J_{\vec{f}}^{-1}(\vec{x}^{(k)})\, J_{\vec{f}}(\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_n)} \right] (\vec{x}^{(k)} - \vec{a}) \right\|$$

$$\leq \underbrace{\left\| \left[\mathbb{I} - J^{-1} \cdot J \right] \right\|}_{<1} \|\vec{x}^{(k)} - \vec{a}\|$$

$$\mathbb{I} - \underline{J_{\vec{f}}^{-1}(\vec{x}^{(k)})\, J_{\vec{f}}(\vec{x}^{(k)}, \dots, \vec{x}^{(k)})} = \mathbb{I} - \mathbb{I} = \underline{0}$$

$\mathbb{I} = J_{\vec{f}}^{-1}(\vec{a})\, J_{\vec{f}}(\vec{a})$; $J_{\vec{f}}(\vec{a})$ JE REGULÁRNÍ

$$\left\| J_{\vec{f}}^{-1}(\vec{a}) \cdot J_{\vec{f}}(\vec{a}) - J_{\vec{f}}^{-1}(\vec{x}^{(k)})\, J_{\vec{f}}(\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_n) \right\| =$$

$$\left\| \underbrace{\left[J_{\vec{f}}^{-1}(\vec{a}) - J_{\vec{f}}^{-1}(\vec{x}^{(k)}) \right]}_{A_1} \cdot \underline{J_{\vec{f}}(\vec{a})} - \underline{J_{\vec{f}}^{-1}(\vec{x}^{(k)})} \underbrace{\left[J_{\vec{f}}(\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_n) - \underline{J_{\vec{f}}(\vec{a})} \right]}_{A_2} \right\|$$

$$\vec{f} \in C^{(1)}(H(\vec{a})) \Rightarrow \underline{J_{\vec{f}}^{-1}(\vec{x}^{(k)}) \xrightarrow[\vec{x}^{(k)} \to \vec{a}]{} J_{\vec{f}}^{-1}(\vec{a})}$$

$$\Rightarrow \underline{J_{\vec{f}}(\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_n) \xrightarrow[\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_n \to \vec{a}]{} J_{\vec{f}}(\vec{a})}$$

$A_1 < \varepsilon_1$ $\quad A_2 < \varepsilon_2$ PRO $\vec{x}^{(k)}$ DOSTATEČNĚ BLÍZKO $\vec{a}$

($\Rightarrow \vec{s}_1, \dots, \vec{s}_n$ JSOU BLÍZKO $\vec{a}$)

$$\Rightarrow \|\vec{x}^{(k+1)} - \vec{a}\| \leq \underbrace{c}_{<1} \|\vec{x}^{(k)} - \vec{a}\|$$

$$\vec{x}^{(0)} \in V_{\vec{a}} \Longrightarrow \vec{x}^{(k)} \in V_{\vec{a}}$$

$$\|\vec{x}^{(k)} - \vec{a}\| \leq C\|\vec{x}^{(k-1)} - \vec{a}\| \leq C^2\|\vec{x}^{(k-2)} - \vec{a}\| \leq \dots \leq$$

$$\leq \underbrace{C^k}_{<1}\|\vec{x}^{(0)} - \vec{a}\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \Rightarrow \vec{x}^{(k)} \to \vec{a} \qquad \square$$

Metody pro řešení soustav nelineárních rovnic

Theorem 24

Nechť platí

- *existuje otevřené okolí $H_{\vec{a}}$ bodu $\vec{a}$ takové, že $\vec{f} \in C^{(2)}\left(H_{\vec{a}}\right)$ tj. na $H_{\vec{a}}$ existují všechny parciální derivace prvního a druhého řádu a jsou zde spojité,*
- *$\mathbb{J}_{\vec{f}}\left(\vec{a}\right)$ je regulární.*

Pak existuje r takové, že

$$V_{\vec{a}} \equiv \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \left|\vec{x} - \vec{a}\right| < r\right\} \subset H_{\vec{a}},$$

a Newtonova metoda konverguje, pro libovolné $\vec{x}^{(0)} \in V_{\vec{a}}$ s rychlostí druhého řádu.

Důkaz.

~~Video na Youtube~~

Metody pro řešení soustav nelineárních rovnic

Remark 25

I na Newtonovu metodu pro systémy nelineárních rovnic lze aplikovat line search algoritmus. Získáme tak globálně konvergující metodu.

Metody pro řešení soustav nelineárních rovnic

Example 26

Pomocí Newtonovy metody řešte soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} f_1(x,y) = x^3 + 4y^2 + x - y - 4 &= 0, \\ f_2(x,y) = x^4 + 2y^3 - x + y + 2 &= 0, \end{aligned}$$

s počátečním odhadem $\vec{x}^{(0)} = (-1,1)^T$.

Řešení: (napočítáme jen jednu iteraci)

$$\vec{f}(\vec{x}^{(0)}) = (-3,7)^T,$$

$$\mathbb{J}_{\vec{f}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2+1 & 8y-1 \\ 4x^3-1 & 6y+1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{J}_{\vec{f}}(\vec{x}^{(0)}) = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -5 & 7 \end{pmatrix},$$

Řešíme tedy úlohu $\mathbb{J}_{\vec{f}}(\vec{x}^{(0)})\Delta\vec{x}^{(0)} = -\vec{f}(\vec{x}^{(0)})$, tj.:

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x^{(0)} \\ \Delta y^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix},$$

Dostáváme $\Delta\vec{x}^{(0)} = \frac{1}{18}(-2,17)^T$ a tedy $\vec{x}^{(1)} = \vec{x}^{(0)} + \Delta\vec{x}^{(0)} = \frac{5}{18}(-4,7)^T$. Potom je

$$\vec{f}(\vec{x}^{(1)}) = (11.66, 19.06)^T.$$

Metody pro řešení soustav nelineárních rovnic

Shrnutí a otázky:

- metoda bisekcí
- metoda regula falsi
- Newtonova metoda
- jak se při praktických výpočtech liší podmínky konvergence metody regula falsi a Newtonovy metody?
- **jaké jsou výhody a nevýhody metod vyšších řádů?**
- globálně konvergující metody
- Newtonova metoda pro systémy nelineárních rovnic
  - **jak se dá efektivně vyhnout napočítávání inverzní matice?**