Tomáš Oberhuber

Faculty of Nuclear Sciences and Physical Engineering
Czech Technical University in Prague

Video na Youtube

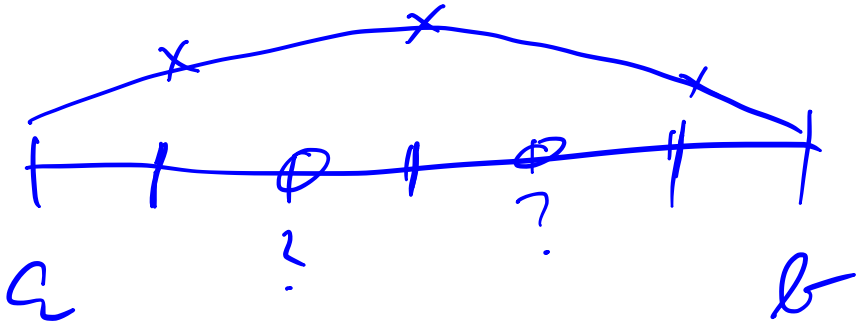
Polynomiální aproximace

$f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$ $\quad a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

- v numerické matematice často pracujeme s funkcemi, které nelze vyjádřit analyticky
- nelze je tedy vyjádřit přesně, ale lze je alespoň aproximovat
- někdy zase známe některou závislost jen z experimentu tj. známe funkční hodnoty jen v několika bodech
- pro svou jednoduchost se nejčastěji volí polynomiální aproximace

MKP, FEM

MKO, FVM



Lagrangeův polynom

- jednou možností by byl Taylorův polynom
- problém je v tom, že ten potřebuje znát derivace poměrně vysokých řádů
- měření derivací experimentálně je ale velmi složité až nemožné
- většinou naměříme pouze funkční hodnoty, ale zato v několika různých bodech
- místo Taylorova polynomu proto použijeme **Lagrangeův polynom**

Lagrangeův polynom

Matematická formulace problému

Remark 1

Buď $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkce jejíž hodnoty známe ve vzájemně různých bodech $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. Hledáme polynom $L_n(x)$ co nejnižšího stupně tak, aby platilo

$$L_n(x_i) = f(x_i) \quad \text{pro} \quad i = 0, \ldots, n.$$

Za **vhodných podmínek** *by mohlo platit, že $L_n(x)$ bude blízko $f(x)$ i v ostatních bodech. Odhadujeme-li hodnotu f mezi body $x_0, \ldots, x_n$, jde o* **interpolaci** *jinak jde o* **extrapolaci**.

Lagrangeův polynom

Je-li

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i,$$

pak lze podmínku $L_n(x_i) = f(x_i)$ pro $i = 0, \ldots, n$ přepsat jako

$$\begin{array}{c} L_n(x_0) = f(x_0) \\ L_n(x_1) = f(x_1) \\ L_n(x_2) = f(x_2) \\ \vdots \\ L_n(x_n) = f(x_n) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

resp.

$$\mathbb{V}^{(n)}_{x_0,\ldots,x_n} \vec{a} = \vec{f}.$$

Lagrangeův polynom

Koeficienty $a_0, \ldots, a_n$ lze tedy získat vyřešením soustavy lineárních rovnic

$$\mathbb{V}^{(n)}_{x_0,\ldots,x_n}\vec{a} = \vec{f}.$$

Definition 2

Nechť $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Matice $\mathbb{V}^{(m)}_{x_0,\ldots,x_n} \in \mathbb{R}^{n+1,m+1}$ definovaná jako

$$\mathbb{V}^{(m)}_{x_0,\ldots,x_n} = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^m \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^m \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^m \end{pmatrix}$$

se nazývá Vandermondova matice.

Lagrangeův polynom

Theorem 3

Nechť $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ jsou navzájem různé. Pak příslušná Vandermondova matice $\mathbb{V}^{(n)}_{x_0,\ldots,x_n} \in \mathbb{R}^{n+1,n+1}$

$$\mathbb{V}^{(n)}_{x_0,\ldots,x_n} = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{pmatrix}$$

je regulární.

Důkaz.

Video na Youtube

$\square$

$$\mathbb{V}^{n}_{x_0, x_1, \dots, x_n} = \mathbb{V} \; ; \; \mathbb{V}_{ij} = x_{i-1}^{j-1} \quad i, j = 1, \dots, n+1$$

$$\det(\mathbb{V}) = \sum_{\pi \in S_{n+1}} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{i=1}^{n+1} v_{i, \pi(i)} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_{n+1}} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^{n+1} v_{\sigma(j), j} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_{n+1}} \operatorname{sgn}(\sigma) \boxed{\prod_{j=1}^{n+1} x_{\sigma(j)-1}^{j-1}}$$

$$= P(x_0, x_1, \dots, x_n)$$

$$\bullet = \sum_{j=0}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$$

- V MATICI $\mathbb{V}$ UDĚLÁME SUBSTITUCI $x_i = x_j$; $i \neq j \longrightarrow \mathbb{V}(i, j) \Longrightarrow$ $\det(\mathbb{V}(i, j)) = 0 \Longrightarrow (x_i - x_j)$ JE KOŘEN $\det(\mathbb{V})$

- PLATÍ PRO LIBOVOLNÉ $i \neq j \Longrightarrow$ $(x_i - x_j)$ $i \neq j$ JSOU KOŘENY $\det(\mathbb{V})$

$$\det \mathbb{V} = \mathbb{P}(x_0, x_1, \dots, x_n) \prod_{i=0}^{n} \prod_{j=0}^{i-1} (x_j - x_i)$$

$$\det V = Q(x_0, x_1, \dots, x_n) \prod_{i=0}^{n} \prod_{j=0}^{i-1} (x_j - x_i)$$

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$\Rightarrow$ VŠECHNY ČLENY JSOU TVARU $\frac{n(n+1)}{2}$

$\Rightarrow Q(x_0, x_1, \dots, x_n) = C$

$$\Rightarrow \det V = C \prod_{i=0}^{n} \prod_{j=0}^{n-1} (x_j - x_i) \neq 0$$ POKUD

$x_j \neq x_i$ PRO $\forall i, j = 0, \dots, n$, $i \neq j$

$\square$

Lagrangeův polynom

Theorem 4

Buď $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a body $x_0, \ldots, x_n \in D_f$. Pak existuje právě jeden ~~interpolační~~ polynom P stupně n splňující

$$P(x_i) = f(x_i) \quad \text{pro} \quad \forall i = 0, \ldots, n.$$

Důkaz.

Důkaz plyne z regularity matice $\mathbb{V}^{(n)}_{x_0,\ldots,x_n}$.
Alternativní důkaz: Video na Youtube $\square$

$P_1(x), P_2(x)$ OBA STUPNĚ n

$P_1(x_i) = P_2(x_i) = f(x_i) \quad i = 0, 1, \dots, n$

$(P_1 - P_2)(x_i) = 0 \quad i = 0, 1, \dots, n$

$\Rightarrow$ POLYNOM $P_1 - P_2$ JE STUPNĚ n

A MÁ KOŘENY $x_0, x_1, \dots, x_n$ TJ.

$n+1$ KOŘENŮ $\Rightarrow P_1 - P_2$ JE NULOVÝ POLYNOM

$\Rightarrow P_1(x) = P_2(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ $\square$

Lagrangeův polynom

Co kdybychom zkoušeli interpolaci **polynomem nižšího stupně**?

- jednodušší polynom by byl praktičtější
- museli bychom řešit soustavu rovnic tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^m \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^m \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

  pro $n > m$, která obecně nemá řešení.
- tj. polynom nižšího stupně obecně nemůže nabývat všech předepsaných hodnot

Lagrangeův polynom

Co kdybychom zkoušeli interpolaci **polynomem vyššího stupně**?

- polynom vyššího stupně by mohl možná dát lepší interpolaci
- museli bychom řešit soustavu rovnic tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \dots & x_0^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \dots & x_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

  pro $n < m$, která má nekonečně mnoho řešení
- tj. polynom vyššího stupně není určen jednoznačně

Lagrangeův polynom

- matice $\mathbb{V}^{(n)}_{x_0,\ldots,x_n}$ může být špatně podmíněná
- konstrukce Lagrangeova polynomu řešením soustavy

$$\mathbb{V}^{(n)}_{x_0,\ldots,x_n}\vec{a} = \vec{f}$$

  může být tedy numericky nestabilní
- proto se raději používají jiné postupy pro konstrukci
  - **Lagrangeův tvar**
  - **Newtonova formule (Newtonův tvar)**

Lagrangeův tvar

$n \cdot n \Rightarrow O(n^2)$

- pro $i = 0, \ldots, n$ definujeme polynomy

$$l_i = \prod_{j=0, j \neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j},$$

- pro ně platí

$$l_i(x_j) = \delta_{ij}.$$

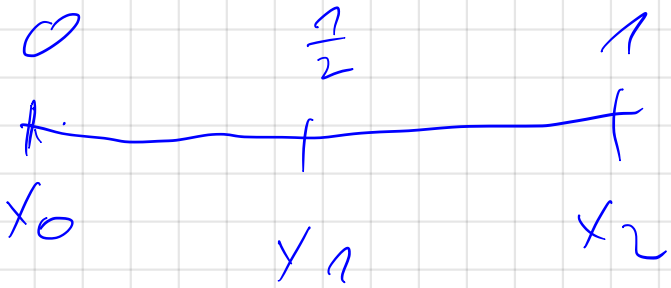
- Lagrangeův interpolační polynom je pak definován jako

$O(n)$

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x).$$

$l_i(x_j)$

$$\Rightarrow L_n(x_j) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, \delta_{ij} = f(x_j)$$



$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} =$$

$$\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

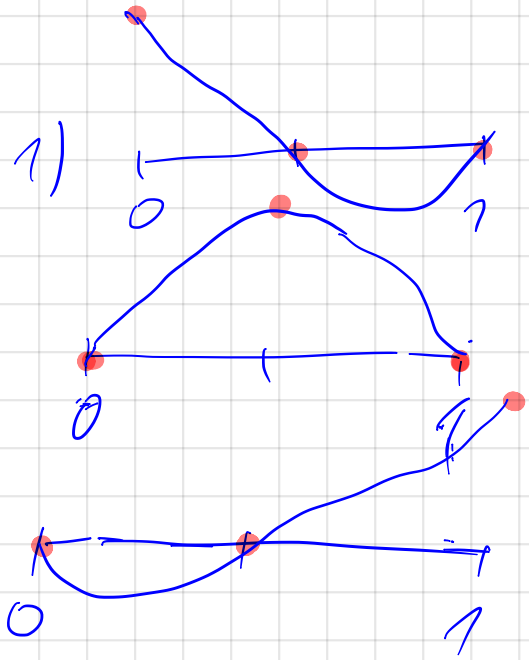
$$l_i(x_j)=0 \quad j\neq i$$

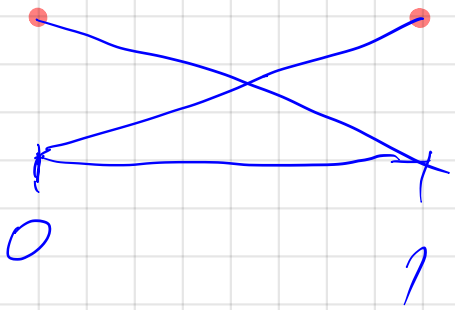
$$l_i(x_i)=1$$

$$l_0 = \frac{(x-\frac{1}{2})(x-1)}{(0-\frac{1}{2})(0-1)} = 2(x-\tfrac{1}{2})(x-1)$$

$$l_1 = \frac{(x-0)(x-1)}{(\frac{1}{2}-0)(\frac{1}{2}-1)} = 4x(x-1)$$

$$l_2 = \frac{(x-0)(x-\frac{1}{2})}{(1-0)(1-\frac{1}{2})} = 2x(x-\tfrac{1}{2})$$

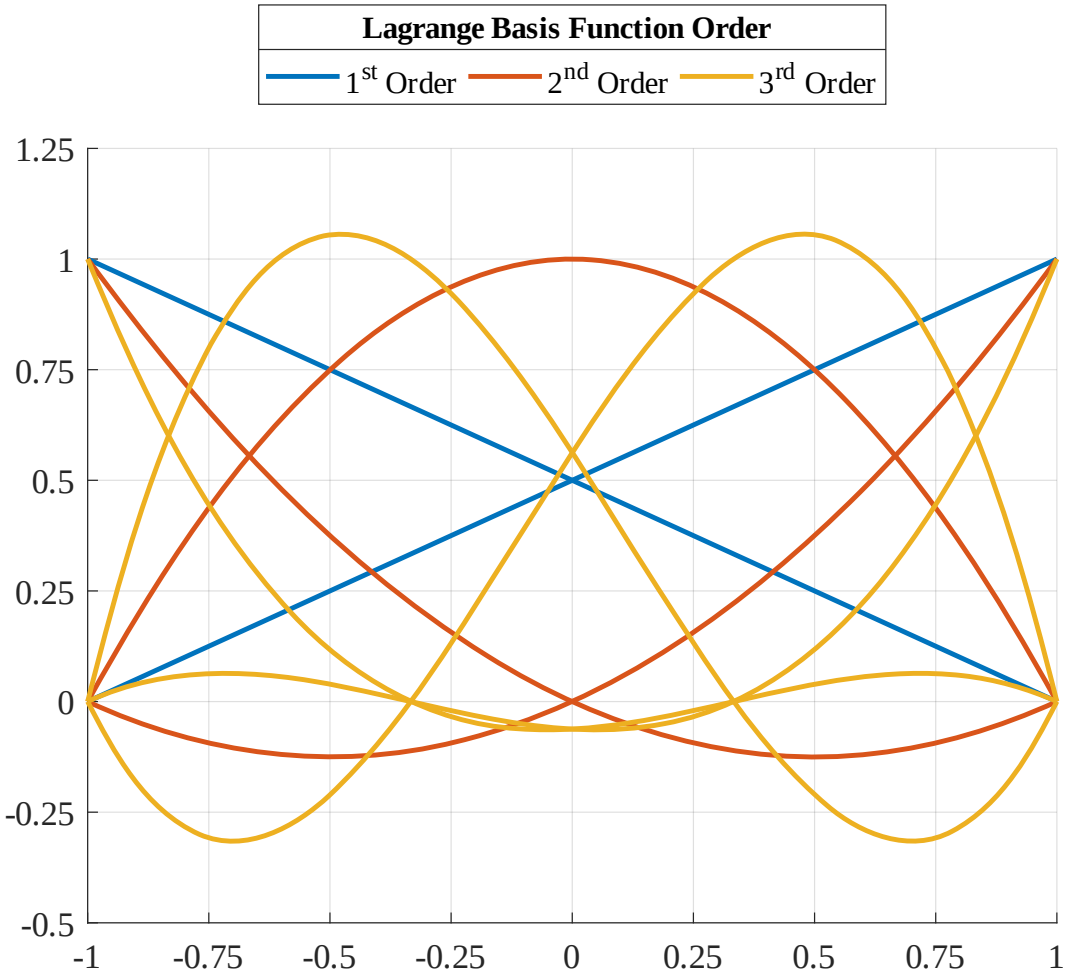




$$l_0(x) = x$$

$$l_1(x) = 1-x$$

Lagrangeův tvar

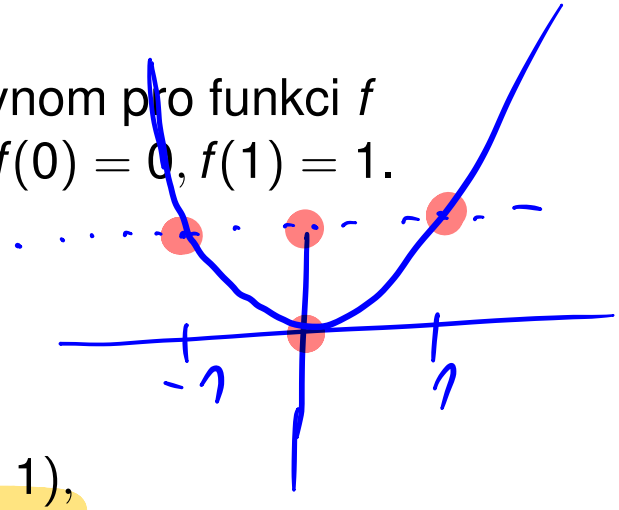


Zdroj: Wikipedie

Lagrangeův tvar

Example 5

Napočítejte Lagrangeův interpolační polynom pro funkci f se znalostí funkčních hodnot $f(-1) = 1, f(0) = 0, f(1) = 1$.



Řešení:

Je tedy $n = 2$ a $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$.
Dále platí

$$
\begin{aligned}
1 \quad l_0(x) &= \frac{x-x_1}{x_0-x_1}\frac{x-x_2}{x_0-x_2} &&= \frac{1}{2}x(x-1),\\
0 \quad l_1(x) &= \frac{x-x_0}{x_1-x_0}\frac{x-x_2}{x_1-x_2} &&= -(x+1)(x-1),\\
1 \quad l_2(x) &= \frac{x-x_0}{x_2-x_0}\frac{x-x_1}{x_2-x_1} &&= \frac{1}{2}x(x+1).
\end{aligned}
$$

a

$$
L_2(x) = \overset{1}{\frac{1}{2}x(x-1)} + \overset{0}{0[-(x+1)(x-1)]} + \overset{1}{\frac{1}{2}x(x+1)} = x^2.
$$

$$\overset{1}{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x} + \overset{1}{(-x^2+1)} + \overset{1}{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x} = 1$$

Example 6

Napočítejte Lagrangeův interpolační polynom pro funkci f se znalostí funkčních hodnot $f(-1) = 1, f(0) = 1, f(1) = 1$.

Lagrangeův tvar

- definice Lagrangeova polynomu není pro výpočet příliš vhodná
- pro každé nové x potřebujeme znovu napočítat $l_i(x)$ pro $i = 0, 1, \ldots n$
- jmenovatele na x nezávisí, ale čitatele ano tj. musíme přepočítat celkem n^2 členů
- ukážeme si, jak tento polynom napočítat efektivněji
- použijeme **Newtonovu formuli**.

Newtonova formule

- víme, že existuje právě jeden interpolační polynom $L_{k-1}(x)$ stupně nejvýše $k-1$, pro který platí

$$L_{k-1}(x_i) = f(x_i) \text{ pro } i = 0, 1, \ldots k-1$$

- pro polynom tvaru

$$L_k(x) = L_{k-1}(x) + c_k(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1})$$

tedy také platí

$$L_k(x_i) = f(x_i) \text{ pro } i = 0, 1, \ldots k-1$$

- vhodnou volbou c_k dosáhneme i rovnosti $L_k(x_k) = f(x_k)$

Newtonova formule

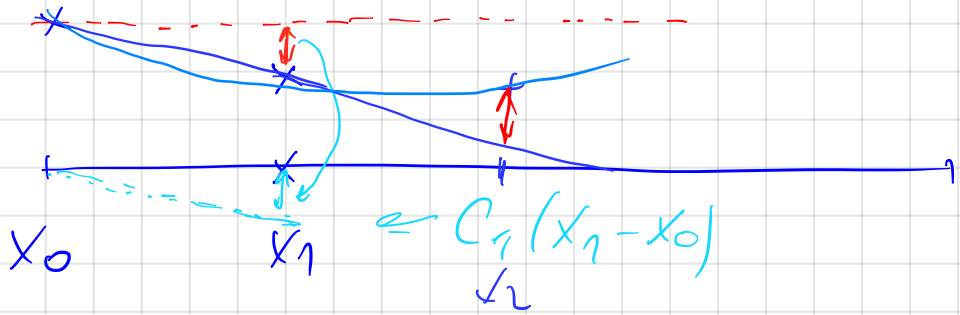
- musí platit

$$f(x_k) = L_k(x_k) = L_{k-1}(x_k) + c_k(x_k - x_0)(x_k - x_1)\dots(x_k - x_{k-1})$$

- odkud jen vyjádříme c_k

$$c_k = \frac{f(x_k) - L_{k-1}(x_k)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\dots(x_k - x_{k-1})}$$

- koeficienty $c_0, \dots, c_n$ lze tedy napočítat rekurentně podle předchozího vztahu
- ukážeme si jednodušší způsob s pomocí **poměrných diferencí**



$$L_0(x) = f(x_0)$$

$$L_1(x) = \underbrace{L_0(x)}_{= f(x_0)} + c_1(x - x_0)$$

$$L_1(x_1) = f(x_1) = L_0(x_1) + c_1(x_1 - x_0)$$

$$L_0(x_1) = f(x_0)$$

$$c_1(x_1 - x_0) = f(x_1) - f(x_0)$$

$$c_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$L_2(x) = L_1(x) + c_2(x - x_0)(x - x_1)$$

Newtonova formule

Obecně lze psát

$$
\begin{aligned}
L_n(x) =& L_{n-1}(x) + c_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}) \\
=& L_{n-2}(x) + c_{n-1}(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-2}) \\
&+ c_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}) \\
\dots \\
=& c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots \\
&+ c_n(x - x_0)\dots(x - x_{n-1})
\end{aligned}
$$

nebo také

$$
L_n(x_i) = \sum_{i=0}^{n} c_i \underbrace{\prod_{j=0}^{i-1}(x_i - x_j)}_{b_{ij}}.
$$

Newtonova formule

- definujeme

$$\mathbb{B}_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad j > i \\ \prod_{j=0}^{i-1}(x_i - x_j) & \text{pro} \quad j \le i \end{cases}$$

- pak lze vztahy

$$L_i(x_i) = f(x_i) \text{ pro } i = 0, \dots, n$$

psát jako $\mathbb{B}\vec{c} = \vec{f}$ nebo také

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_1 - x_0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_2 - x_0 & (x_2 - x_0)(x_2 - x_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 1 & x_n - x_0 & (x_n - x_0)(x_n - x_1) & \dots & \prod_{k=0}^{n-1}(x_n - x_k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

$c_0 = f(x_0)$

$c_1 = f[x_0, x_1]$

$c_2 = f[x_0, x_1, x_2]$

$\vdots$

$c_n = f[x_0, \dots, x_n]$

$L_0(x_0) = f(x_0)$

$L_1(x_1) = f(x_1)$

$L_2(x_2) = f(x_2)$

$\vdots$

$L_n(x_n) = f(x_n)$

$L_0(x_0) = c_0 = f(x_0)$

$L_1(x_1) = c_0 + c_1(x_1 - x_0) = f(x_1)$

$L_2(x_2) = c_0 + c_1(x_2 - x_0) + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = f(x_2)$

$\vdots$

Newtonova formule

- z tvaru matice $\mathbb{B}$ vidíme, že
  - c_0 zavisí jen na $f(x_0)$ tj.

$$c_0 = f[x_0] = f(x_0)$$

  - c_1 zavisí jen na $f(x_0), f(x_1)$ tj.

$$c_1 = f[x_0, x_1]$$

  - obecně c_k závisí na $f(x_0), \ldots, f(x_k)$ tj.

$$c_k = f[x_0, \ldots, x_k]$$

- lze pak tedy psát

$$\begin{aligned} L_n(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \\ &\quad f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \ldots + \\ &\quad f[x_0, \ldots, x_n](x - x_0) \ldots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

Newtonova formule

Theorem 7

Pro koeficienty v Newtonově formuli platí vztah

$$f[x_i, \ldots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}. \qquad (1)$$

Důkaz.

Video na Youtube □

Definition 8

Výrazy tvaru $f[x_i, \ldots, x_i + k]$ splňující vztah (1) nazývámě **poměrná diference** (*divided differences*) k-tého řádu. Poměrnou diferenci nultého řádu definujeme jako $f[x_i] = f(x_i)$.

Dk.:

$$f[x_0,\dots,x_k] = \frac{f[x_1,\dots,x_k] - f[x_0,\dots,x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

$$\exists_1 L_k(x_0,\dots,x_k)(x) =$$

$$f[x_0,\dots,x_k](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1}) + P_{k-1}(x) =$$

$$= \underline{f[x_0,\dots,x_k]}\,x^k + P'_{k-1}(x)$$

$$\exists_1 L_{k-1}(x_0,\dots,x_{k-1})(x) = f[x_0,\dots,x_{k-1}]\,x^{k-1} + P'_{k-2}(x)$$

$$\exists_1 L_{k-1}(x_1,\dots,x_k)(x) = f[x_1,\dots,x_k]\,x^{k-1} + P''_{k-2}(x)$$

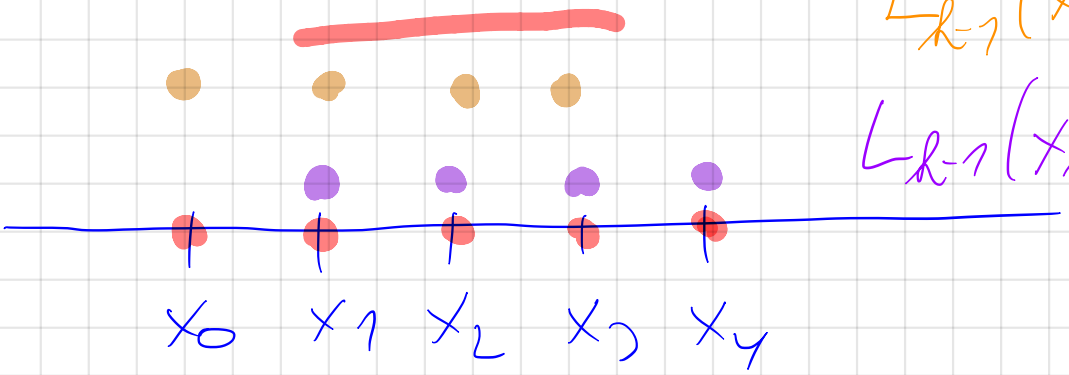
$$L_k(x_0,\dots,x_k)(x_i) = f(x_i);\ i=0,\dots,k$$

$$L_{k-1}(x_0,\dots,x_{k-1})(x_i) = f(x_i);\ i=0,\dots,k-1$$

$$L_{k-1}(x_1,\dots,x_k)(x_i) = f(x_i);\ i=1,\dots,k$$

- $L_k(x_0,\dots,x_k)$ VYJÁDŘÍME POMOCÍ $L_{k-1}(x_0,\dots,x_{k-1})$ A $L_{k-1}(x_1,\dots,x_k)$ A POROVNÁME VÝRAZY U x^k

$k=4$



$L_{k-1}(x_0, x_1, \dots x_3)$

$L_{k-1}(x_1, x_2, x_3, x_4)$

$$L_{k-1}(x_0, x_1, x_2, x_3)(x_i) = L_{k-1}(x_1, x_2, x_3, x_4)(x_i)$$

$$i = 1, 2, 3$$

$$\| \qquad\qquad \|$$

$$Q_1 \qquad\qquad Q_2$$

$$\left[\alpha Q_1 + (1-\alpha) Q_2\right](x_i) = f(x_i)$$

$$i = 1, 2, 3$$

$\alpha = \alpha(x)$

$\alpha(x_0) = 1 \; ; \; \alpha(x_4) = 0$

$$\alpha(x) = \frac{x - x_4}{x_0 - x_4}$$

$$\alpha Q_1 + (1-\alpha) Q_2 = Q_2 + \alpha (Q_1 - Q_2)$$

$$P_k^*(x) = L_{k-1}(x_1, \dots x_k)(x) + \frac{x - x_k}{x_0 - x_k}\left[L_{k-1}(x_0, \dots, x_{k-1})(x) - L_{k-1}(x_1, \dots, x_k)(x)\right]$$

$$P_k^*(x) = L_{k-1}(x_1, \dots, x_k)(x) +$$

$$\frac{x - x_k}{x_0 - x_k}\left[L_{k-1}(x_0, \dots, x_{k-1})(x) - \underline{L_{k-1}(x_1, \dots, x_k)(x)}\right]$$

$$= L_{k-1}(x_1, \dots x_k)(x) +$$

$$\frac{x - x_k}{x_0 - x_k}\Big[f[x_0, \dots, x_{k-1}]x^{k-1} + P'_{k-2}(x) -$$

$$f[x_1, \dots, x_k]x^{k-1} - P''_{k-2}(x)\Big]$$

$$= \frac{f[x_0, \dots, x_{k-1}] - f[x_1, \dots, x_k]}{x_0 - x_k} x^k + P''_{k-2}(x)$$

$$= \underbrace{\frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}}_{= f[x_0, x_1, \dots, x_k]} x^k + P'''_{k-2}(x)$$

$\square$

Poměrné diference

Příklady konkrétních poměrných diferencí:

$$
\begin{aligned}
f[x_0, x_1] &= \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}, \\
f[x_1, x_2] &= \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}, \\
f[x_2, x_3] &= \frac{f[x_3] - f[x_2]}{x_3 - x_2}, \\
f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}, \\
f[x_1, x_2, x_3] &= \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}, \\
f[x_0, x_1, x_2, x_3] &= \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0}.
\end{aligned}
$$

Lagrangeův polynom - Newtonova formule

Poměrné diference napočítáváme po sloupcích v následující tabulce:

$O(n^2) \times O(n^2)$

VANDERMOND

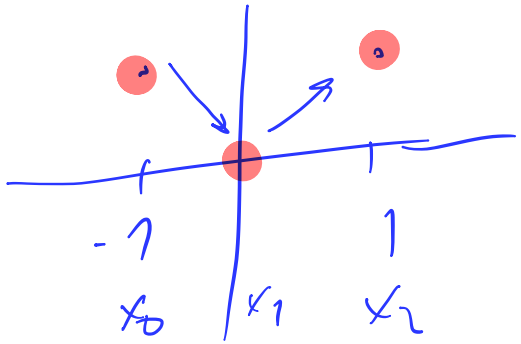
$$
\begin{array}{llllll}
x_0 & f(x_0) & & & & \\
x_1 & f(x_1) & f[x_0, x_1] & & & \\
x_2 & f(x_2) & f[x_1, x_2] & f[x_0, x_1, x_2] & & \\
x_3 & f(x_3) & f[x_2, x_3] & f[x_1, x_2, x_3] & \ddots & \\
x_4 & f(x_4) & f[x_3, x_4] & f[x_2, x_3, x_4] & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots \\
x_{n-4} & f(x_{n-4}) & f[x_{n-5}, x_{n-4}] & f[x_{n-6}, x_{n-5}, x_{n-4}] & & \\
x_{n-3} & f(x_{n-3}) & f[x_{n-4}, x_{n-3}] & f[x_{n-5}, x_{n-4}, x_{n-3}] & & \\
x_{n-2} & f(x_{n-2}) & f[x_{n-3}, x_{n-2}] & f[x_{n-4}, x_{n-3}, x_{n-2}] & & \\
x_{n-1} & f(x_{n-1}) & f[x_{n-2}, x_{n-1}] & f[x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}] & & \\
x_n & f(x_n) & f[x_{n-1}, x_n] & f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] & \dots \quad \dots & f[x_0, x_1, \dots, x_n]
\end{array}
$$

Lagrangeův polynom - Newtonova formule

Example 9

Pomocí Newtonovy formule napočítejte Lagrangeův interpolační polynom pro funkci f se znalostí funkčních hodnot $f(-1) = 1, f(0) = 0, f(1) = 1$ za předpokladu, že f je dostatečně hladká.

Řešení:



$$
\begin{aligned}
f[x_0, x_1] &= \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = -1, \\
f[x_1, x_2] &= \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = 1, \\
f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f[x_1,x_2]-f[x_1,x_0]}{x_2-x_0} = 1.
\end{aligned}
$$

$$\frac{1-(-1)}{2} = 1$$

A tedy

$$
\begin{aligned}
L_2(x) &= f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\
&= 1 - 1(x - x_0) + 1(x - x_0)(x - x_1) \\
&= 1 - (x + 1) + 1(x + 1)x \\
&= x^2.
\end{aligned}
$$

$$L_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) +$$

$$c_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \dots$$

$$O(n) \qquad c_0 + c_1 t + c_2 t + c_3 t \dots$$

$$t = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

Lagrangeův polynom - Newtonova formule

```
void dividedDifferences( const double nodes[ n+1 ],
                         const double fx[ n+1 ],
                         double differences[ n+1][ n+1 ] )
{
   for( int i = 0; i <= n; i++ )
      differences[ i ][ 0 ] = fx[ i ];
   for( int j = 1; j <= n; j++ )
   {
      for( int i = j; i <= n; i++ )
         differences[ i ][ j ] =
           ( differences[ i ][ j-1 ] -
             differences[ i-1 ][ j-1 ] ) /
           ( nodes[ i ] - nodes[ i-j ] );
   }
}

double newtonFormula( const double nodes[ n+1 ],
                      const double differences[ n+1 ][ n+1 ],
                      double x )
{
   double value = 0.0, product = 1.0;
   for( int i = 0; i <= n; i++ )
   {
      value = value + differences[ i ][ i ] * product;
      product = product * ( x - nodes[ i ] );
   }
}
```