Chyba aproximace

Rungův jev

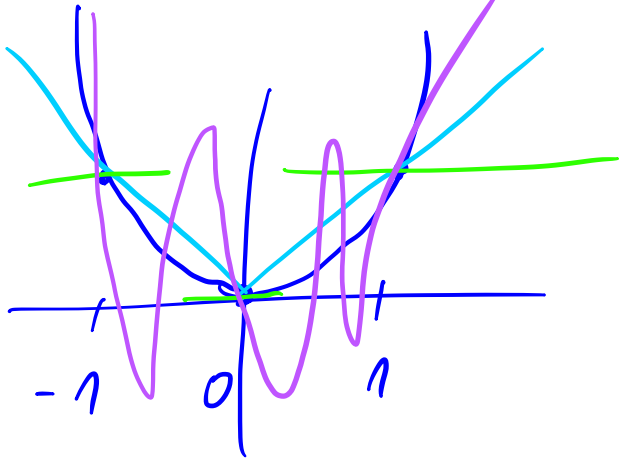
Interpolace po částech

Hermitova-Birkoffova interpolace

Interpolace v $\mathbb{R}^n$

Tomáš Oberhuber

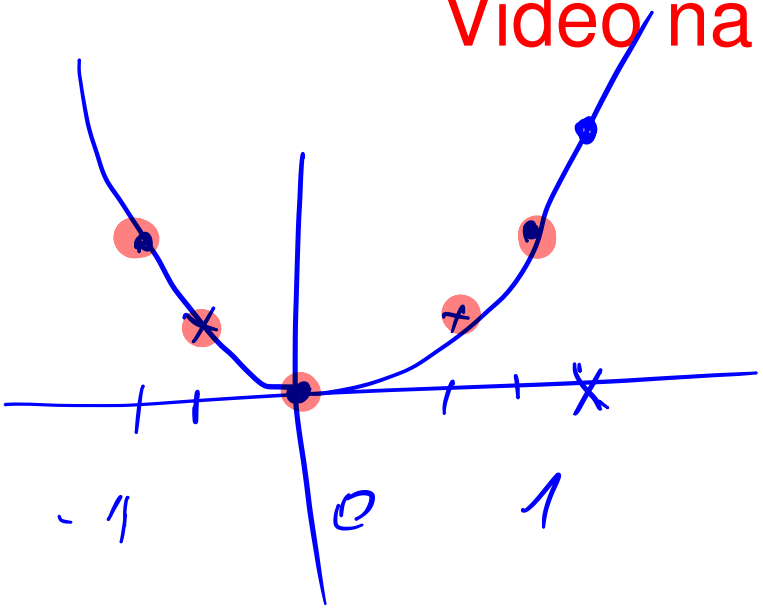
Faculty of Nuclear Sciences and Physical Engineering
Czech Technical University in Prague

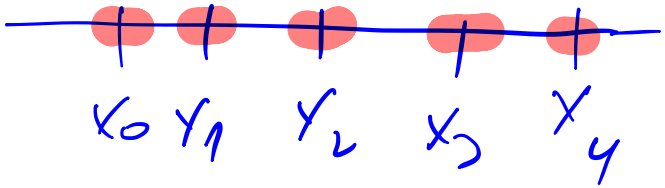


$L_2(x) = x^2$

$f \in C^{(3)}(I_x)$

Video na Youtube





Lagrangeův polynom - chyba aproximace

Theorem 1

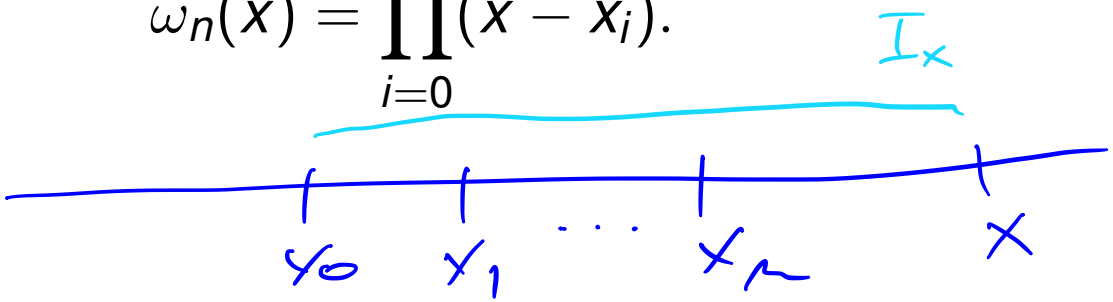
Buď $I_x \subset D_f$ nejmenší interval takový, že $x, x_0, x_1, \ldots, x_n \in I_x$ a f má na I_x derivaci řádu $n+1$. Buď L_n Lagrangeův interpolační polynom příslušný k funkci f a bodům $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Pak existuje $\xi \in I_x$ takové, že

$\xi = \xi(x)$

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_n(x),$$

kde

$$\omega_n(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i).$$



Důkaz.

Video na Youtube

Dk: $x_0, x_1, \dots, x_n, x, I_x; f$

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x)$$

$$Q(t) = \omega_n(x) R_n(t) - \omega_n(t) R_n(x)$$

$$R_n(x_i) = f(x_i) - L_n(x_i) = 0 \; ; i = 0, 1, \dots, n$$

$$f(x_i) = L_n(x_i)$$

$$\omega_n(x_i) = (x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_n) = 0;$$

$$i = 0, 1, \dots, n$$

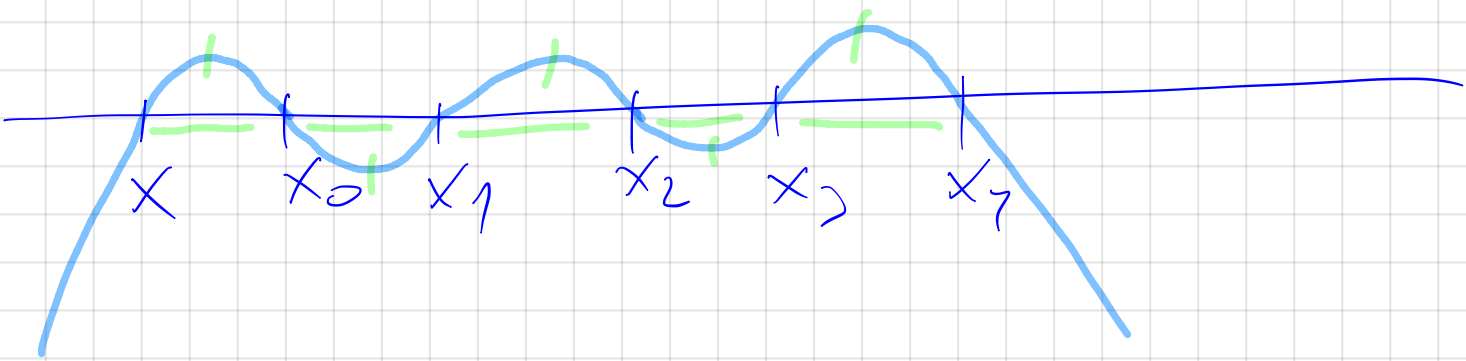
$$\Rightarrow Q(x_i) = \omega_n(x) \underbrace{R_n(x_i)}_{=0} - \underbrace{\omega_n(x_i)}_{=0} R_n(x) = 0$$

$$i = 0, 1, \dots, n$$

$$Q(x) = \omega_n(x) R_n(x) - \omega_n(x) R_n(x) = 0$$

$$Q(t) = 0; \; t \in \{x, x_0, x_1, \dots, x_n\}$$

$\Rightarrow$ $n+2$ KOŘENŮ

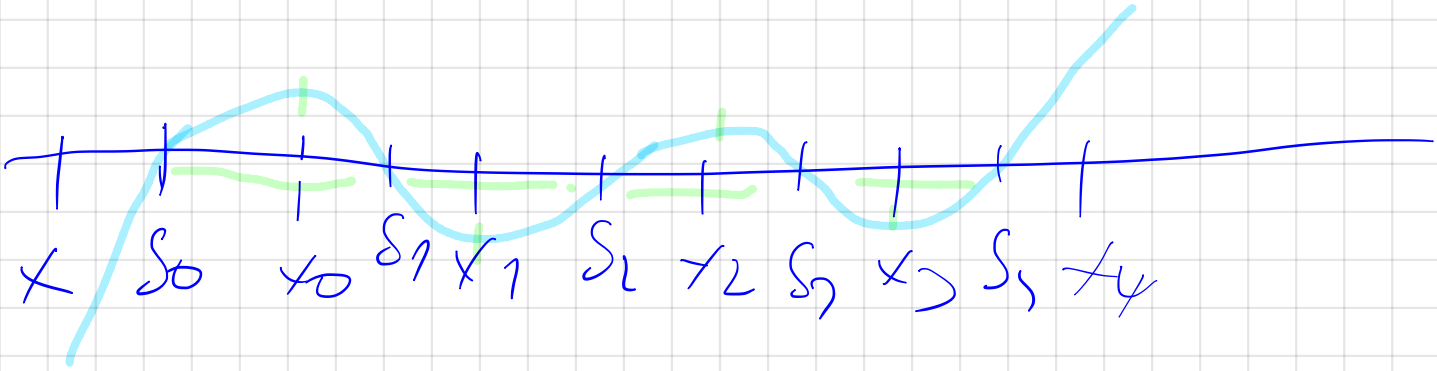


ROLLEOVA VĚTA: $f \in C^{(1)}\langle a, b\rangle$,

$f(a) = f(b) \Rightarrow \exists \xi \in \langle a, b\rangle ;\ f'(\xi) = 0$

$\Rightarrow \exists\ \xi_0^1, \dots, \xi_{n+1}^1 ;\ Q'(\xi_i^1) = 0 ;\ i = 0, \dots, n+1$

$\in I_x$



$\Rightarrow \exists\ \xi_0^2, \dots, \xi_n^2 ;\ Q''(\xi_i^2) = 0 ;\ i = 0, 1, \dots, n$

$\xi_i^2 \in \langle \xi_i^1, \xi_{i+1}^1 \rangle$

$\dots \Rightarrow \exists\ \xi_0^{n+1} ;\ Q^{(n+1)}(\xi_0^{n+1}) = 0$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\ \xi \in I_x ;\ Q^{(n+1)}(\xi) = 0$

$Q(t) = \omega_n(x)\, \underline{R_n(t)} - \underline{\omega_n(t)}\, R_n(x)$

$R_n^{(n+1)}(t) = (f(t) - L_n(t))^{(n+1)} = f^{(n+1)}(t)$

$$\omega_n(t) = (t-x_0)(t-x_1)\cdots(t-x_n) =$$
$$= t^{n+1} + P_n(t)$$

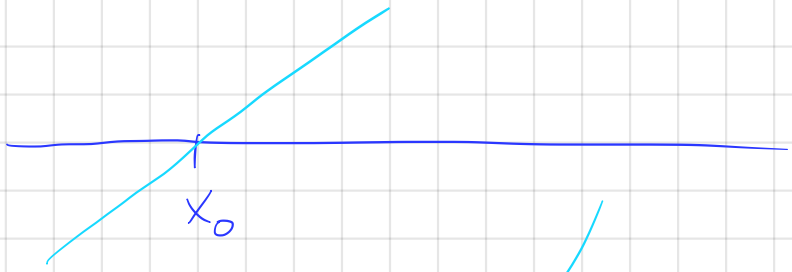
$$\omega_n^{(n+1)}(t) = \left(t^{n+1}\right)^{(n+1)} = (n+1)\left(t^n\right)^{(n)} =$$
$$= (n+1)\,n\left(t^{n-1}\right)^{(n-1)} \cdots (n+1)!$$

$$Q^{(n+1)}(t) = \omega_n(x)\,R_n^{(n+1)}(t) - \omega_n^{(n+1)}(t)\,R_n(x)$$
$$= \omega_n(x)\,f^{(n+1)}(t) - (n+1)!\,R_n(x)$$

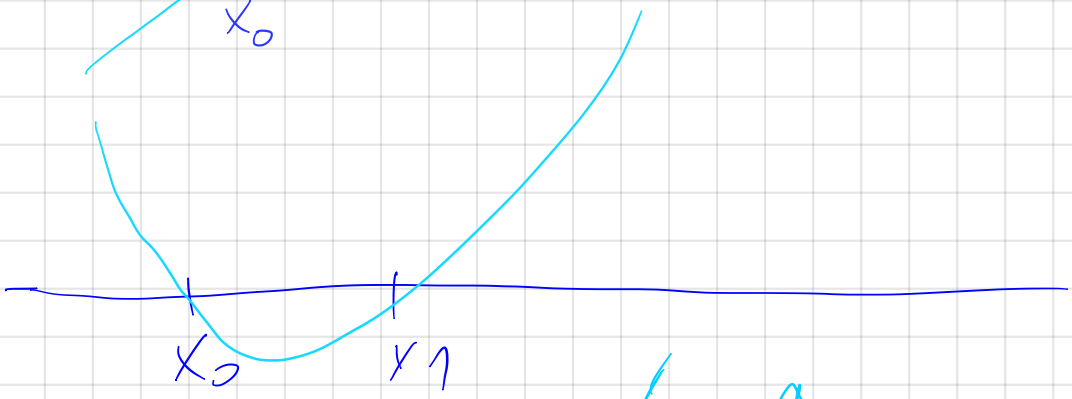
$$Q^{(n+1)}(\xi) = 0 = \omega_n(x)\,f^{(n+1)}(\xi) - (n+1)!\,R_n(x)$$
$$\Rightarrow R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,\omega_n(x)$$

$\square$

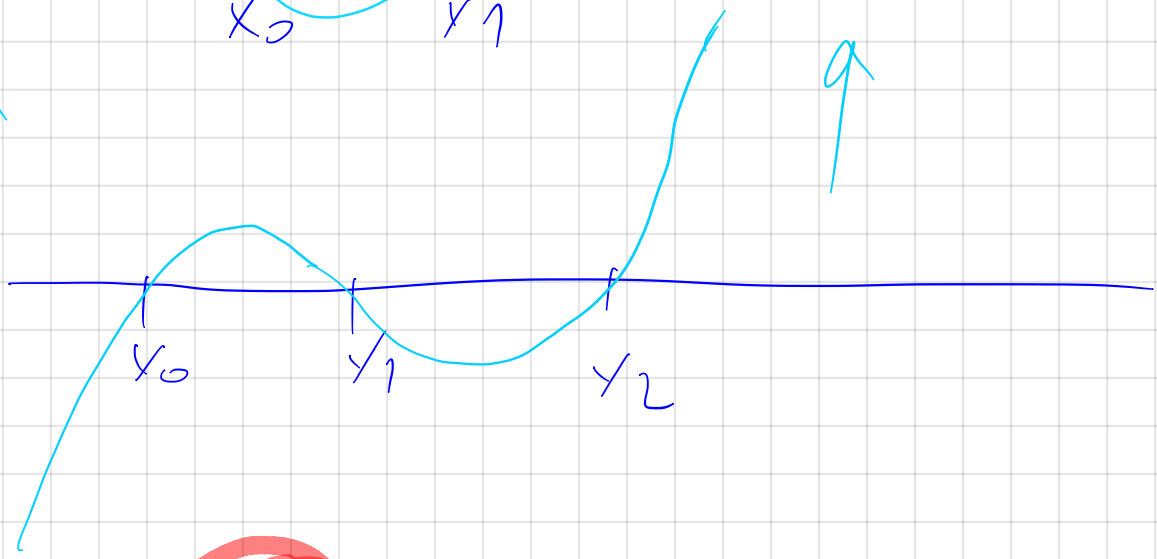
$\omega_0(x)$



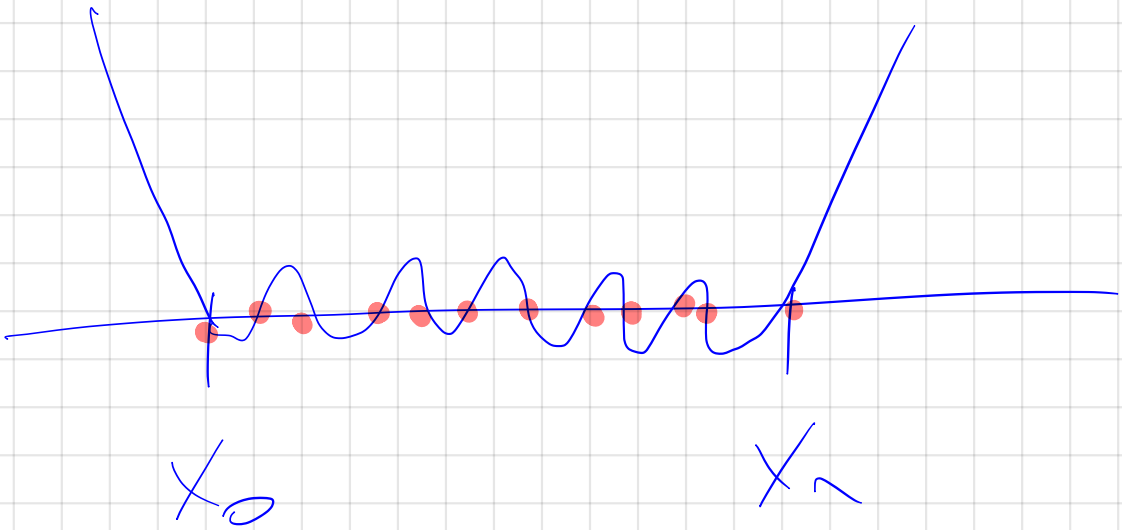
$\omega_1(x)$



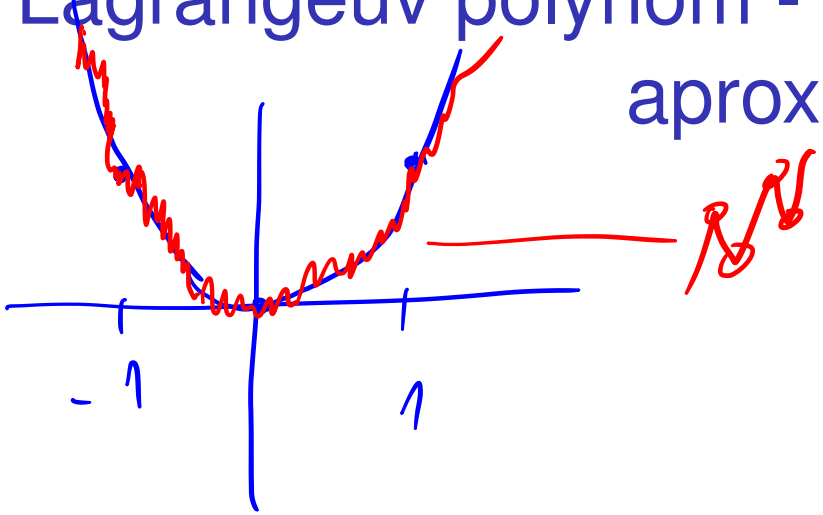
$\omega_2(x)$



$$\omega_n(x) = x^{n+1} + P_{n-1}(x)$$



Lagrangeův polynom - chyba aproximace



Remark 2

K výpočtu Lagrangeova polynomu nepotřebujeme znát žádnou derivaci funkce f. Pokud ale neexistuje $n+1$ derivace funkce f, pak $L_n(x)$ vůbec nelze považovat za její aproximaci.

Lagrangeův polynom - chyba aproximace

Theorem 3

Nechť $x_0, x_1, \ldots, x_n$ jsou různé body a $L_n(x)$ je jednoznačný Lagrangeův polynom, který aproximuje funkci f s pomocí funkčních hodnot v těchto uzlech, tj. f splňuje předpoklady předchozí věty. Nechť $x \in I_x$ intervalu definovaného v předchozí větě, pak platí

$f(x)$

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x]\omega_n(x)$$

a tedy platí

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

$x_{n+1} \Rightarrow \xi \in \langle x_0, x_{n+1} \rangle$

pro $\xi \in I_x$.

Důkaz.

Video na Youtube

Dk.:

$L_{k-1}(x)$; $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k$

$$L_k(x) = \underbrace{L_{k-1}(x)}_{\substack{= f(x_i) \text{ PRO} \\ x \in \{x_0, x_1, \dots, x_{k-1}\}}} + c_k \underbrace{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})}_{= 0 \text{ PRO } x \in \{x_0, x_1, \dots, x_{k-1}\}}$$

$$\underset{\substack{\| \\ f(x_k)}}{L_k(x_k)} = L_{k-1}(x_k) + c_k(x_k - x_0)(x_k - x_1)\dots(x_k - x_{k-1})$$

$$\Rightarrow c_k(x_k - x_0)(x_k - x_1)\dots(x_k - x_{k-1}) = f(x_k) - L_k(x_k) = R_k(x_k)$$

$k-1 \to n$; $x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1} = x$

$$f(x_{n+1}) - L_n(x_{n+1}) = c_{n+1}(x_{n+1} - x_0)\dots(x_{n+1} - x_n)$$

$$f(x) - L_n(x) = c_{n+1}(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)$$

$$c_{n+1} = f[x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}] = f[x_0, x_1, \dots, x_n, x]$$

$\square$

Lagrangeův polynom - chyba aproximace

Remark 4

Lagrangeův polynom lze tedy také zapsat ve tvaru

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(\xi_i)}{i!} \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j),$$

kde $\xi_i \in \langle x_0, x_i \rangle$*. Tento tvar je velmi podobný Taylorovu polynomu*

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i,$$

kde definujeme $0! = 1$*.*

Lagrangeův polynom - řád aproximace

Definition 5

Buď H_{x_0} okolí bodu x_0 a funkce $f, g : H_{x_0} \to \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f aproximuje funkci g na okolí H_{x_0} s přesností řádu r, právě když platí

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x) - g(x)|}{|x - x_0|^r} = C,$$

kde C je kladná nenulová konstanta.

$\lim_{x \to x_0} |x - x_0|^r = 0$ $\quad |f(x) - g(x)| \simeq C|x - x_0|^r$ na H_{x_0}

Lagrangeův polynom - chyba aproximace

Remark 6

Zapíšeme-li chybu ve tvaru

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n),$$

vidíme, že

$R_n(x)$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)\right|}{|x-x_0|} =$$

$$\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi(x_0))}{(n+1)!}(x_0-x_1)\dots(x_0-x_n)\right| = C,$$

a podobně pro $x_1, \dots, x_n$.

Lagrangeův polynom - řád aproximace

To znamená, že:

- Lagrangeův polynom je **dobrou aproximací funkce** f **jen na určitých okolích bodů** x_i.
- Lagrangeův polynom na těchto okolích aproximuje fci. f **s přesností prvního řádu nezávisle na volbě** n.
- Volba **vyššího** n má smysl jen tehdy, pokud je $\left|f^{(n+1)}(x)\right| = 0$ nebo alespoň velmi malé na I_x. Pak je f **buď polynom nebo funkce blízká polynomu**. Pokud ne, dochází k tzv. **Rungovu jevu**.

? $\cancel{\lim_{n\to\infty} L_n \to f}$?

Lagrangeův polynom - Rungův jev

Remark 7

Rungův jev popisuje situaci, kdy při konstrukci Lagrangeova polynomu volíme stále více uzlových bodů a tím pádem i vyšší n. Očekávali bychom, že chyba interpolace se bude zmenšovat, ale může tomu být právě naopak. Tento jev je způsoben členem $\omega_n(x)$ ve výrazu pro chybu interpolace a jde o výrazné oscilace Lagrangeova polynomu blízko krajních uzlů x_0 a x_n.

Lagrangeův polynom - Rungův jev

Example 8

Mějme funkci

$$f = \frac{1}{1 + 25x^2}$$

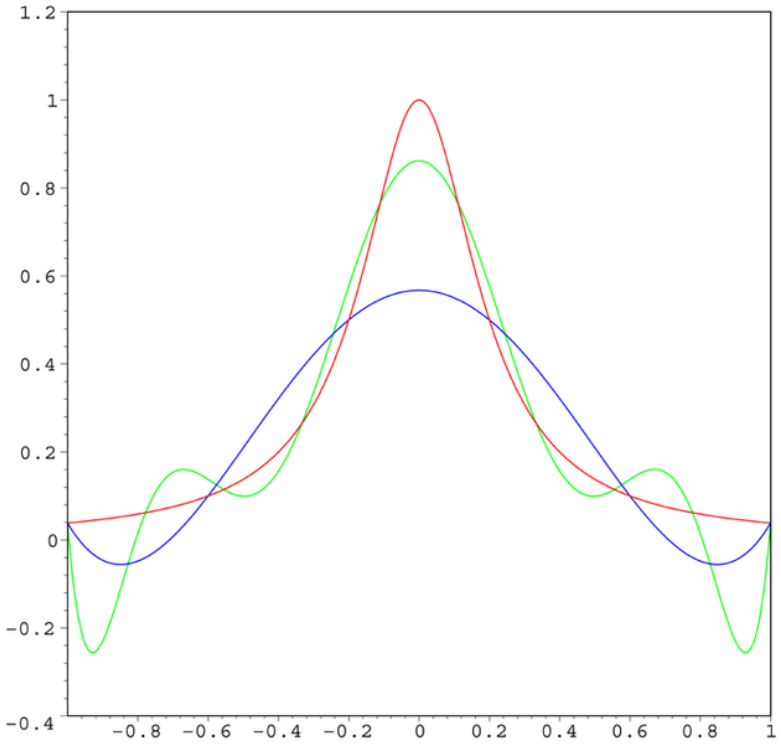
na intervalu $< -1, 1 >$ a ekvidistantně rozložené uzly $x_0, x_1, \ldots x_n$

$$x_i = \frac{2i}{n} - 1,$$

pro $i = 0, \ldots, n$. Lze ukázat, že platí

$$\lim_{n \to \infty} \left(\max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x) - L_n(x)| \right) = +\infty$$

Lagrangeův polynom - Rungův jev



- červeně je zobrazena původní funkce f
- modře je zobrazen polynom $L_5(x)$
- zeleně je zobrazen polynom $L_9(x)$

Lagrangeův polynom

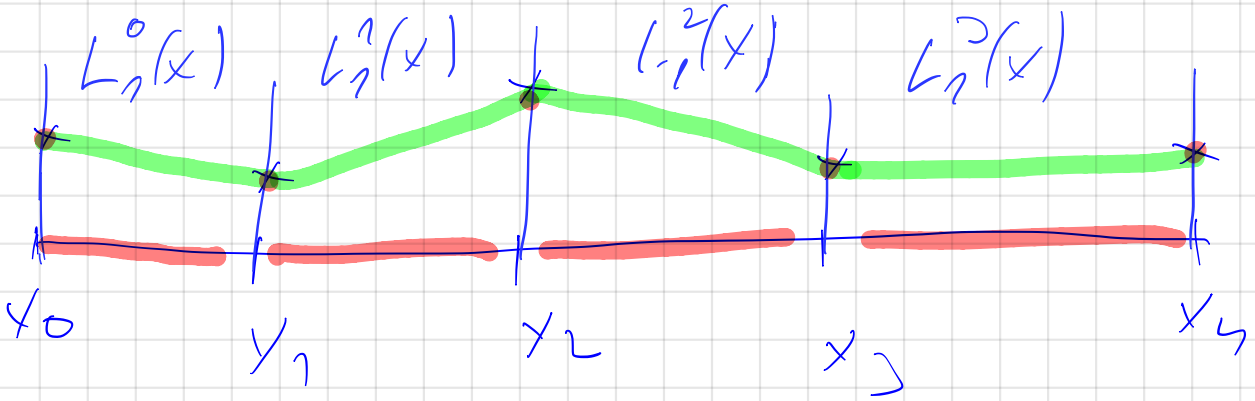
Jsme ve sporné situaci:

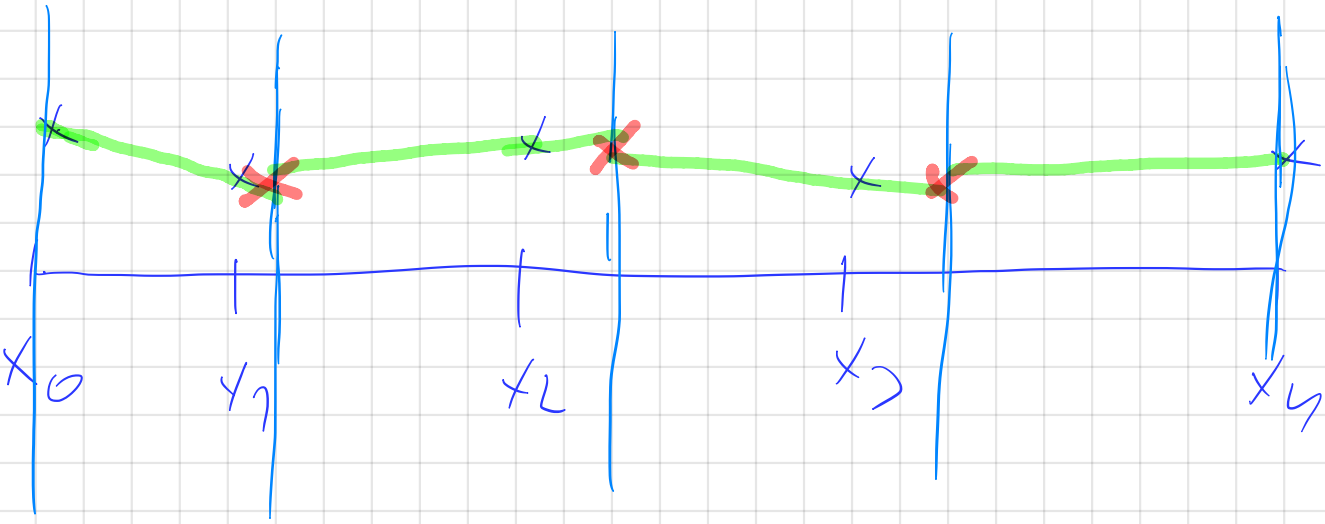
- Lagrangeův polynom je obecně dobrou aproximací pouze na okolích zadaných uzlů $x_0, \dots x_n$.
- Přidáním dodatečných uzlů se ale zvýší n a díky Rungovu jevu se celková chyba aproximace může zvýšit.

Řešením je **interpolace po částech**, kdy fci. f na daném intervalu aproximujeme několika Lagrangeovy polynomy nižších stupňů než n.

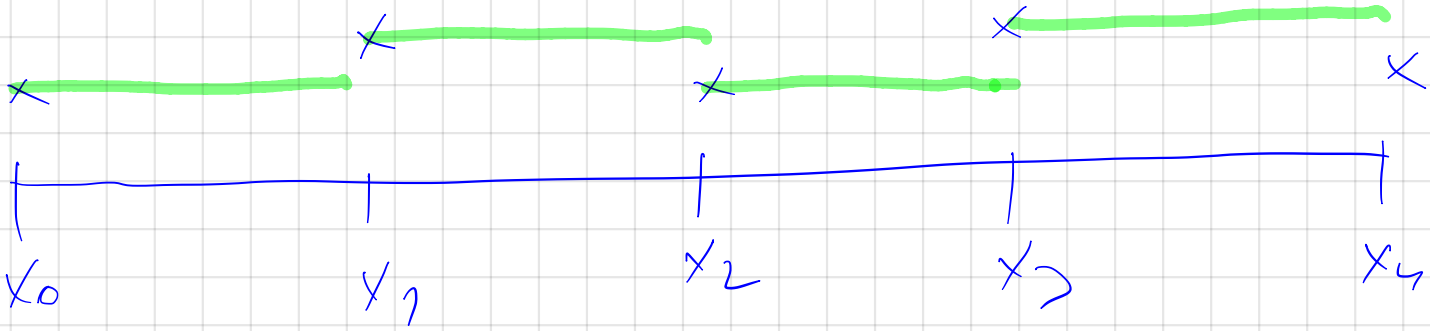
$n = 10^3 \quad f \in C^{(2)} \Rightarrow L_1(x)$

$$f \in C^2(\mathbb{R}) \Rightarrow L_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x-x_0)$$





$$L_0(x) = f(x_0)$$



Lagrangeův polynom - interpolace po částech

- interval $\langle x_0, x_n \rangle$ rozdělíme na několik podintervalů
- na každém podintervalu konstruujeme Lagrangeův polynom jen s pomocí uzlů x_i, které se nachází v daném podintervalu
- pokud jsou krajní body podintervalů tvořeny některými ze zadaných uzlů a pokud na podintervalech konstruujeme polynom alespoň prvního řádu, je výsledkem aproximace spojitou funkcí, obecně však ne diferencovatelnou

Chceme-li provádět hladší navazování, je potřeba použít tzv. **Hermitovy polynomy**.

Hermitova-Birkoffova interpolace

Definition 9

Mějme funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která má na intervalu $I \subset D_f$ alespoň M derivací. Mějme vzájemně různé uzly $x_0, \ldots, x_n \in I$ a mějme dány

$$f^{(k)}(x_i),$$

pro $i = 0, \ldots n$, $k = 0, \ldots, m_i$, kde $m_i \in \mathbb{N}$ a $m_i \leq M$. Definujme číslo $N = \sum_{i=1}^{n}(m_i + 1)$. Pak existuje právě jeden polynom stupně $N - 1$ zvaný **Hermitův interpolační polynom**, který splňuje

$$H_{N-1}^{(k)}(x_i) = f^{(k)}(x_i),$$

pro $i = 0, \ldots, n$ a $k = 0, \ldots, m_i$.

Hermitova-Birkoffova interpolace

Remark 10

Polynom $H_{N-1}^{(k)}$ je definován jako

$$H_{N-1}(x) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{m_i} f^{(k)}(x_i) L_{ik}(x),$$

kde L_{ik} je **Hermitův charakteristický polynom** *stupně $N-1$, pro který platí*

$$\frac{d^p}{dx^p} L_{ik}(x_j) = \begin{cases} 1 & i = j \wedge k = p \\ 0 & jinak \end{cases},$$

a je definován jako

$$L_{ij}(x) = l_{ij}(x) - \sum_{k=j+1}^{m_i} l_{ij}^{(k)}(x_i) L_{ik}(x),$$

a

$$l_{ij}(x) = \frac{(x - x_j)^j}{j!} \prod_{k=0, k \neq i}^{n} \left(\frac{x - x_k}{x_i - x_k} \right)^{m_k + 1}.$$

Hermitova-Birkoffova interpolace

Theorem 11

Buď $x \in \mathbb{R}$, I_x buď nejmenší interval obsahující uzly $x_0, \ldots, x_n$ a bod x. Nechť f má na intervalu I_x derivace do řádu N. Pak pro chybu interpolace platí,

$$f(x) - H_{N-1}(x) = \frac{f^{(N)}(\xi)}{N!}\Omega_N(x),$$

kde $\xi \in I_x$, $\Omega_N(x) = (x - x_0)^{m_0+1} \ldots (x - x_n)^{m_n+1}$.

Interpolace v $\mathbb{R}^n$

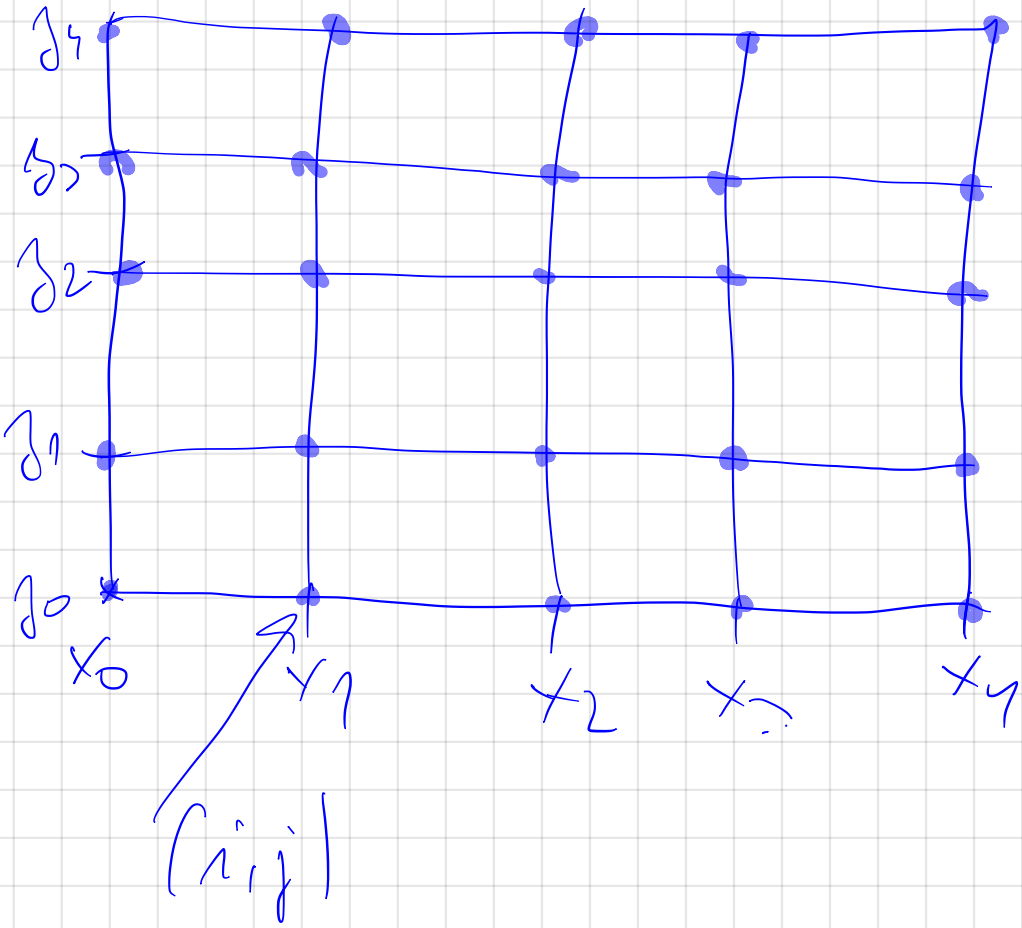
Remark 12

Mějme body $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ a předpokládejme, že všechna x_i a y_i pro $i = 0, 1, \ldots, n$ jsou různá. Pak můžeme definovat bazické polynomy

$$
\begin{aligned}
l_i^x(x) &= \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \\
l_i^y(y) &= \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{y - y_j}{y_i - y_j}.
\end{aligned}
$$

Lagrangeův interpolační polynom pak má tvar

$$
L_n(x) = \sum_{i=0, j=0}^{n} f(x_i, y_j) l_i^x(x) l_j^y(y).
$$



$$\underbrace{l_k^x(x_i)\, l_m^y(y_j)}_{\substack{1 \text{ PRO UZEL } (k,m) \\ 0 \text{ PRO JINÉ UZLY}}} = \delta_{ki}\,\delta_{mj} = \begin{cases} 1 & i=k \wedge m=j \\ 0 & \end{cases}$$

Shrnutí a otázky

- Lagrangeův polynom - konstrukce, existence a jednoznačnost
- Newtonova formule
- Chyba aproximace
- **Pokud sestrojím polynom $L_4(x)$ k funkci f, která není diferencovatelná, co lze říci o tom, jak $L_4(x)$ aproximuje f?**
- Jaký je řád aproximace funkce f Lagrangeovým polynomem?
- **podle čeho volit stupeň Lagrangeova polynomu**
- **interpolace funkce po částech a navazování Lagrangeových polynomů**
- Interpolace s vyšším řádem přesnosti

MKO, EMO, WENO