Tomáš Oberhuber

Faculty of Nuclear Sciences and Physical Engineering
Czech Technical University in Prague

Video na Youtube

Numerický výpočet integrálu

Mějme integrabilní funkci $f :< a, b > \rightarrow \mathbb{R}$. Bude nás zajímat aproximace

$$I(f) \equiv \int_a^b f(x)dx.$$

Numerické vztahy pro aproximaci $I(f)$ se nazývají:

- vzroce pro numerickou integraci – *numerical integration formulae*
- kvadraturní vzorce – *quadrature formulae*

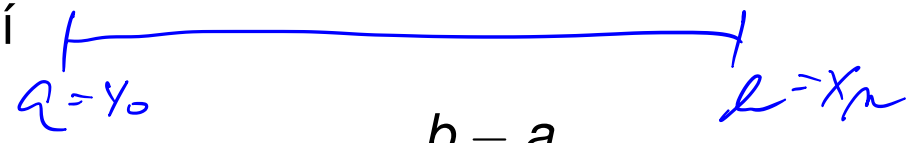
Nejčastěji aproximujeme funkci f funkcí f_n, pro kterou lze integrál spočítat přesně a snadno.

Newtonovy-Cotesovy formule

- opět je možné využít Lagrangeovu interpolaci, tj.

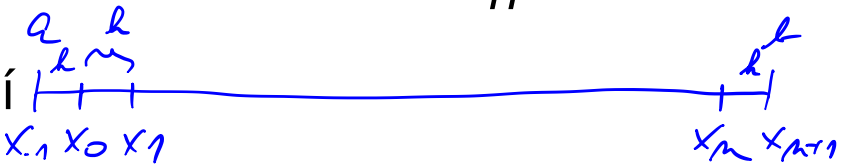
$$\int_a^b f(x)\,dx = I(f) \approx I_n(f) = \int_a^b L_n(x)dx$$

- mluvíme pak o tzv. *Newtonových-Cotesových formulích*
- budeme opět předpokládat ekvidistantní rozložení uzlů $x_0, \ldots, x_n$ s krokem h
- rozlišujeme *uzavřené* a *otevřené* formule
  - pro uzavřené platí



$$x_0 = a, x_n = b, h = \frac{b-a}{n}$$

  - pro otevřené platí



$$x_0 = a + h, x_n = b - h, h = \frac{b-a}{n+2}$$

Newtonovy-Cotesovy formule

- na uzlech $x_0, \ldots, x_n$ zkonstruujeme polynom $L_n(x)$
- pak lze aproximovat integrál jako

$$\int_a^b f(x)dx \approx I_n(f) = \int_a^b L_n(x)dx$$

$$= \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x) dx$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \left(f(x_i) \int_a^b l_i(x) dx \right)$$

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x)$$

- výpočet integrálu $\int_a^b l_i(x)dx$ je již snadný
- nelibí se nám ale závislost na intervalu (a, b)

Newtonovy-Cotesovy formule

- provedem substituci $x = x_0 + th$ a tedy

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{t - j}{i - j} = \varphi(t)$$

- dále zavedeme značení $\pi_n(t) = t(t-1)\dots(t-n)$.

$$\frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{x_0 + th - x_0 - jh}{x_0 + ih - x_0 - jh} = \frac{t - j}{i - j}$$

$$\omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n) = h^{n+1} \underbrace{t(t-1)\dots(t-n)}_{\pi_n(t)}$$

Newtonovy-Cotesovy formule

- pro uzavřené formule dostáváme

$x = x_0 + t h$

$dx = h\,dt$

$$\int_{x_0}^{x_n} l_i(x)dx = h\int_0^n \varphi(t)dt$$

- a tedy

$$I_n(f) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)h\underbrace{\int_0^n \varphi(t)dt}_{w_i} = h\sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$$

Newtonovy-Cotesovy formule

- pro otevřené formule dostáváme

$$\int_a^b l_i(x)dx = h\int_{-1}^{n+1} \varphi(t)dt$$

- a tedy

$$I_n(f) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)h\underbrace{\int_{-1}^{n+1} \varphi(t)dt}_{w_i} = h\sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$$

Newtonovy-Cotesovy formule

$E_n(f) = \int_a^b f(x) - L_n(x)\, dx$; $R_n(x) = f(x) - L_n(x)$

- právě váhy w_i definují jednotlivé formule
- pochopitelně nás zajímá chyba aproximace
- snadno vidíme, že

$$E_n(f) = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b L_n(x)dx = \int_a^b R_n(x)dx$$
$$= \int_a^b f[x_0, \ldots, x_n, x]\omega_n(x)dx$$

kde jsme použili vztah $R_n(x) = f[x_0, \ldots, x_n, x]\omega_n(x)$

Newtonovy-Cotesovy formule

Definition 1

Řád přesnosti kvadraturní formule je maximální r takové, že

$$I_n(f) = \int_a^b f(x)dx \text{ pro } \forall f \in P_r,$$

kde P_r značí množinu všech polynomů stupně r.

Newtonovy-Cotesovy formule

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

- v následující části budeme upravovat právě integrál

$$\int_a^b f[x_0, \ldots, x_n, x]\omega_n(x)dx$$

- je to náročnější než v případě derivace
- nejprve dokážeme několik pomocných vět a tvrzení

Newtonovy-Cotesovy formule

Theorem 2

Věta o střední hodnotě integrálu: *Nechť f je spojitá funkce na $\langle a, b\rangle$, g je integrovatelná na $\langle a, b\rangle$ a je zde nezáporná. Pak existuje $\xi \in \langle a, b\rangle$ takové, že platí*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

Důkaz.

1. ročník. □

Newtonovy-Cotesovy formule

Theorem 3

Diskrétní věta o střední hodnotě integrálu: *Nechť f je spojitá funkce na $\langle a, b\rangle$, $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ jsou nezáporná čísla. Pak pro každou množinu uzlů $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \langle a, b\rangle$ existuje $\xi \in \langle a, b\rangle$ takové, že*

$g(x_i)$

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i) = f(\xi) \sum_{i=0}^{n} \alpha_i.$$

Důkaz.

Video na Youtube

□

Dk: $x_m = \arg\min_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$; $m = f(x_m)$

$x_M = \arg\max_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$; $M = f(x_M)$

$$m\alpha_i \le f(x_i)\alpha_i \le M\alpha_i \; ; \; i=0,1,\dots,n$$

$$m\sum_{i=0}^{n}\alpha_i \le \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\alpha_i \le M\sum_{i=0}^{n}\alpha_i$$

$$F(x) = f(x)\sum_{i=0}^{n}\alpha_i = A f(x) \; ; \; A = \sum_{i=0}^{n}\alpha_i$$

$\Rightarrow F(x)$ JE SPOJITA NA $\langle a,b\rangle$

$$F(x_m) = \underbrace{f(x_m)}_{=m}\sum_{i=0}^{n}\alpha_i = m\sum_{i=0}^{n}\alpha_i \le \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\alpha_i \le$$

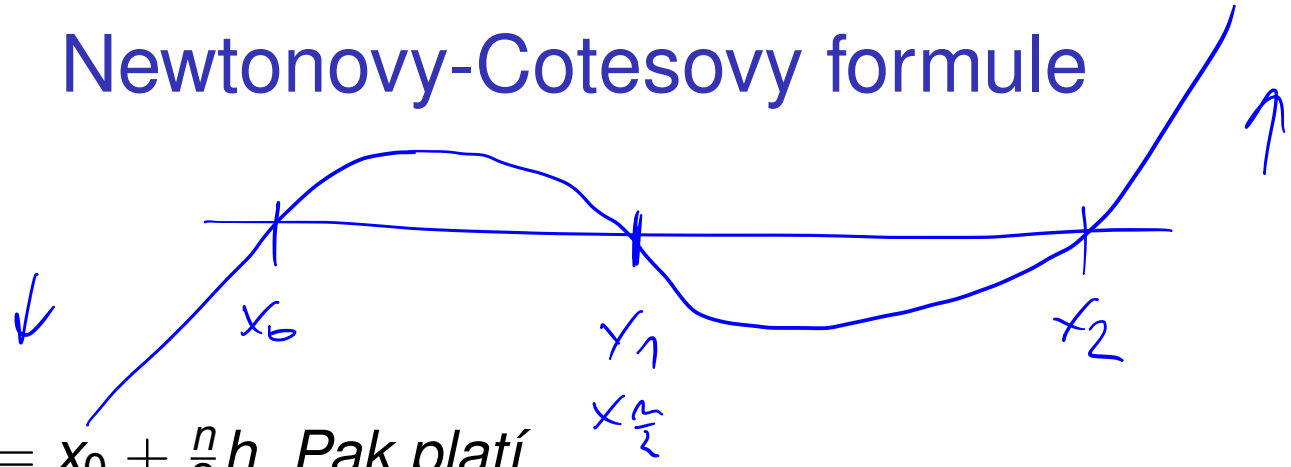
$$\le M\sum_{i=0}^{n}\alpha_i = F(x_M)$$

$$\Rightarrow F(x_m) \le \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\alpha_i \le F(x_M) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists S\in\langle a,b\rangle ; \; F(S) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\alpha_i = f(S)\sum_{i=0}^{n}\alpha_i$$

$\square$

Newtonovy-Cotesovy formule

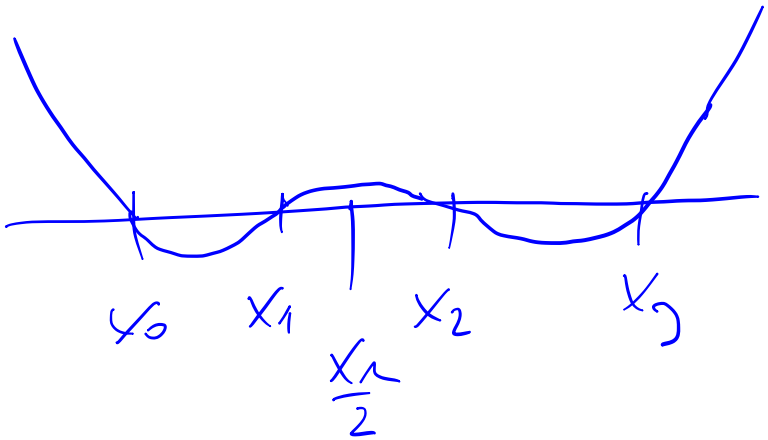


Lemma 4

Nechť $x_{\frac{n}{2}} = x_0 + \frac{n}{2}h$. *Pak platí*

$$\omega_n(x_{\frac{n}{2}} + x) = (-1)^{n+1}\omega(x_{\frac{n}{2}} - x),$$

pro $x > 0$, *tj. funkce* ω_n *je symetrická/antisymetrická kolem středu* $x_{\frac{n}{2}}$ *pro n liché/sudé.*



Důkaz.

Video na Youtube

$\omega_n(x) = x^{n+1} P_n(x)$

□

DK: $P_1(x) = \omega_n(x_{\frac{n}{2}} - x)$ $\quad x \in \mathbb{R}$

$P_2(x) = \omega_n(x_{\frac{n}{2}} + x)$

$P_1(x)$ A $P_2(x)$ MAJÍ STEJNÉ KOŘENY

$P_1(x) = 0 \Leftrightarrow x_{\frac{n}{2}} - x = x_i;\ i = 0, 1, \dots, n$

$x_{\frac{n}{2}} - x = x_i \Leftrightarrow x = x_{\frac{n}{2}} - x_i = x_0 + \frac{n}{2}h - x_0 - ih =$
$= h\left(\frac{n}{2} - i\right) = x$

$P_2(x) = 0 \Leftrightarrow x_{\frac{n}{2}} + x = x_i;\ i = 0, 1, \dots, n$

$x_{\frac{n}{2}} + x = x_i \Leftrightarrow x = x_i - x_{\frac{n}{2}} = x_0 + ih - x_0 - \frac{n}{2}h =$
$h\left(i - \frac{n}{2}\right) = x$

- $\frac{n}{2} - i$ PRO $i = 0, 1, \dots, n \to \left\{-\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}+1, \dots, \frac{n}{2}\right\}$
- $i - \frac{n}{2}$ PRO $i = 0, 1, \dots, n \to \left\{-\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}+1, \dots, \frac{n}{2}\right\}$
- $P_1(x)$ A $P_2(x)$ MAJÍ STEJNÉ KOŘENY $\Rightarrow$

$P_1(x) = c \cdot P_2(x)$

$P_1(x) = \omega_n(x_{\frac{n}{2}} - x) = (x_{\frac{n}{2}} - x - x_0) \cdots (x_{\frac{n}{2}} - x - x_n)$
$= (-x)^{n+1} + Q_n(x)$

$$P_2(x) = \omega_n\left(x_{\frac{n}{2}} + x\right) = \left(x_{\frac{n}{2}} + x - x_0\right) \cdots \left(x_{\frac{n}{2}} + x - x_n\right)$$

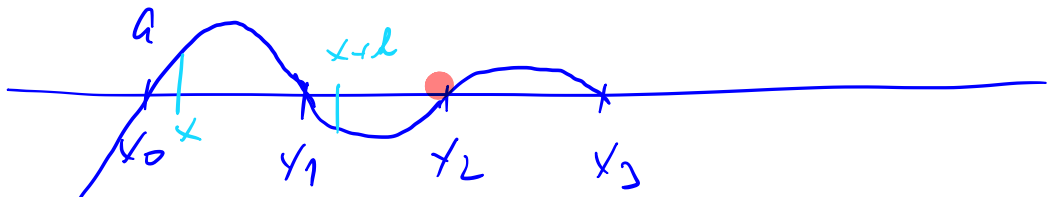
$$= x^{n+1} + Q_n'(x)$$

$$\Rightarrow c = (-1)^{n+1}$$

$$P_2(x) = (-1)^{n+1} P_2(x)$$

$$\omega_n\left(x_{\frac{n}{2}} + x\right) = (-1)^{(n+1)} \omega_n\left(x_{\frac{n}{2}} - x\right) \qquad \square$$

Newtonovy-Cotesovy formule



Lemma 5

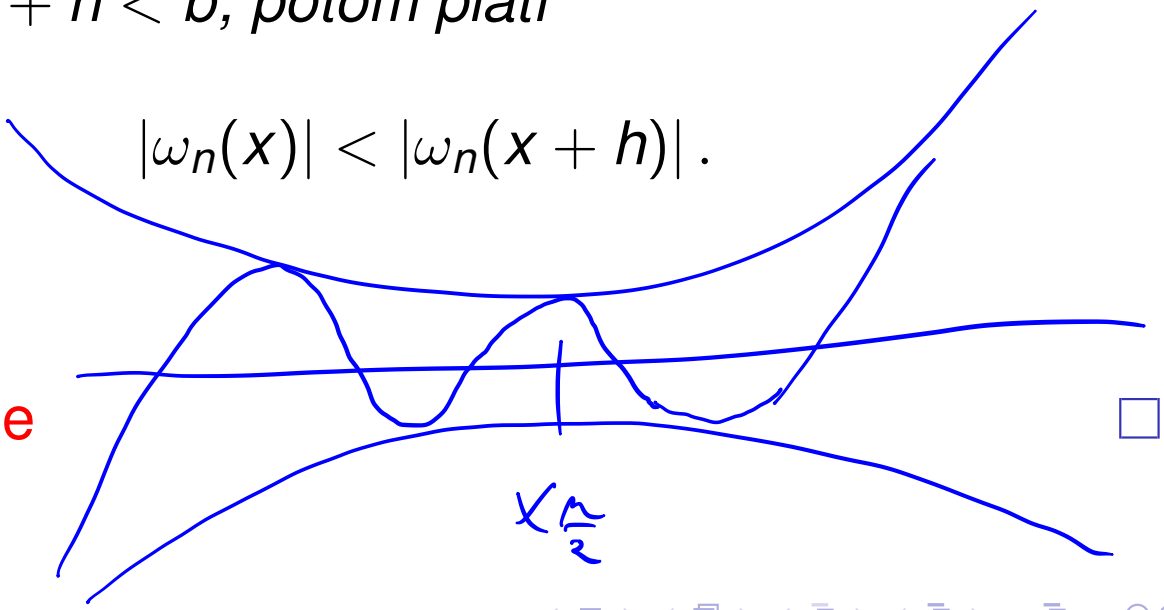
Nechť $x_{\frac{n}{2}} = x_0 + \frac{n}{2}h$ *a buď* x *takové, že* $x \notin \{x_0, \ldots, x_n\}$.

1. *Je-li* $a < x + h \leq x_{\frac{n}{2}}$, *potom platí*

$$|\omega_n(x+h)| < |\omega_n(x)|\,.$$

2. *Je-li* $x_{\frac{n}{2}} < x + h < b$, *potom platí*

$$|\omega_n(x)| < |\omega_n(x+h)|\,.$$



Důkaz.

Video na Youtube

□

Dk.: $x = x_0 + th \quad ; t \in (0, n)$

$$\omega_n(x) = h^{n+1}\, t(t-1)\cdots(t-n) = h^{n+1}\, \pi_n(t)$$

1) $|\omega_n(x+h)| < |\omega_n(x)| \iff |\pi_n(t+1)| < |\pi_n(t)|$,

$$\left|\frac{\pi_n(t+1)}{\pi_n(t)}\right| = \left|\frac{(t+1)t(t-1)\cdots(t-n+1)}{t(t-1)\cdots(t-n)}\right| = \left|\frac{t+1}{t-n}\right| =$$

$$= \left|\frac{t+1}{n-t}\right| = \frac{t+1}{n-t} = \frac{t+1}{(n+1)-(t+1)} < \frac{\frac{n}{2}}{(n+1)-\frac{n}{2}} =$$

$$x+h < x_{\frac{n}{2}} \iff t+1 < \frac{n}{2}$$

$$= \frac{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}+\frac{n}{2}+1-\frac{n}{2}} = \frac{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}+1} < 1 \Rightarrow$$

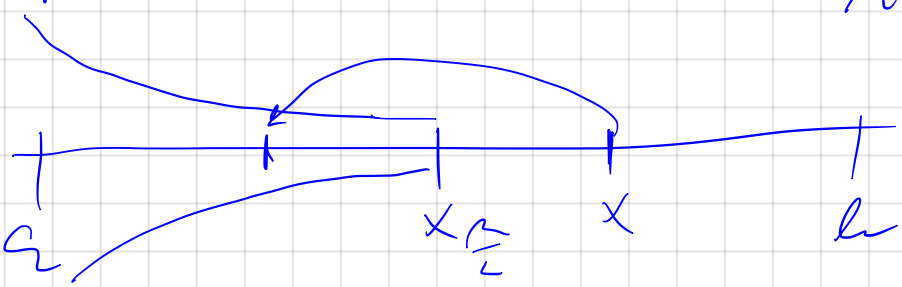
$$\frac{|\pi_n(t+1)|}{|\pi_n(t)|} < 1 \iff |\pi_n(t+1)| < |\pi_n(t)|$$

$$\iff |\omega_n(x+h)| < |\omega_n(x)| \quad ; \quad a < x+h \le x_{\frac{n}{2}}$$

2) $x_{\frac{n}{2}} \le x+h < b$

LEMMA 4.

DŮKAZ PLYNE ZE $\omega_n(x_{\frac{n}{2}}+x) = (-1)^{n+1}\,\omega_n(x_{\frac{n}{2}}-x)$ $\square$



Newtonovy-Cotesovy formule

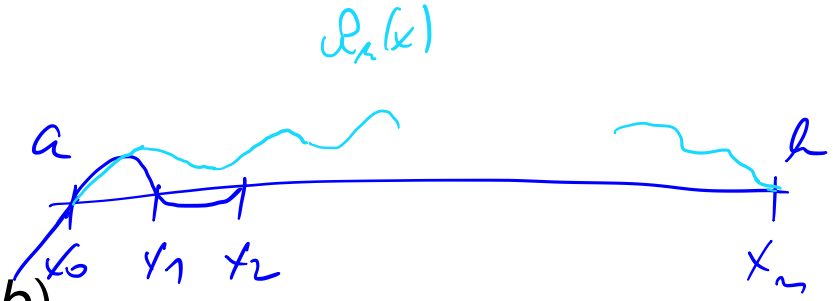
Lemma 6

Definujme funkci $\Omega_n(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$ pro $x_0 = a, x_n = b$ (případ uzavřených formulí) jako

$$\Omega_n(x) = \int_a^x \omega_n(\xi) d\xi.$$

Je-li n sudé, potom platí:

1. $\Omega_n(a) = \Omega_n(b) = 0$,
2. $\Omega_n(x) > 0$ *na intervalu* (a, b).



Důkaz.

Video na Youtube

$\omega_n(x) = x^{n-1}$

□

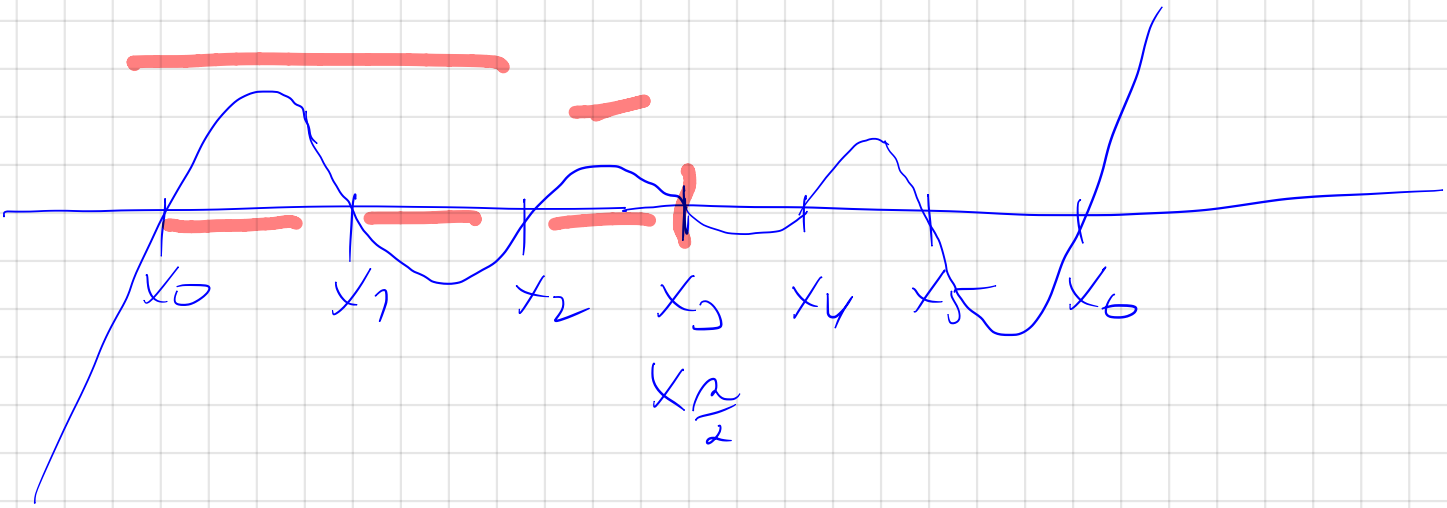
Dk.: n SUDÉ $\Rightarrow \omega_n(x_{\frac{n}{2}}-x) = -\omega_n(x_{\frac{n}{2}}+x)$

1) $\Omega_n(a)=0$

2) $\Omega_n(b) = \int_a^b \omega_n(s)\,ds = 0$ z

ANTISYMETRIE $\omega_n(x)$ KOLEM $x_{\frac{n}{2}}$

$\Omega_n(x) > 0 \; ; \; a < x \leq x_{\frac{n}{2}}$



$\omega_n(x) < 0 \; ; \; x < a = x_0$

$\omega_n(x) > 0 \; ; \; x \in (x_0, x_1)$

$\int_a^x \omega_n(s)\,ds > 0 \; ; \; x \in (x_0, x_1)$

$\Omega_n(x) > 0 \; ; \; x \in (x_0, x_1)$

$|\omega_n(x+h)| < |\omega_n(x)| \quad x \in (x_0, x_1)$

$x+h \in (x_1, x_2)$

$$\left|\int_{x_0}^{x_1} \omega_n(s)\,ds\right| > \left|\int_{x_1}^{x_2} \omega_n(s)\,ds\right| \Rightarrow$$

$$\int_{x_0}^{x_2} \omega_n(s)\,ds > 0 \Rightarrow \Omega_n(x) > 0;$$

$$x \in (x_0, x_2]$$

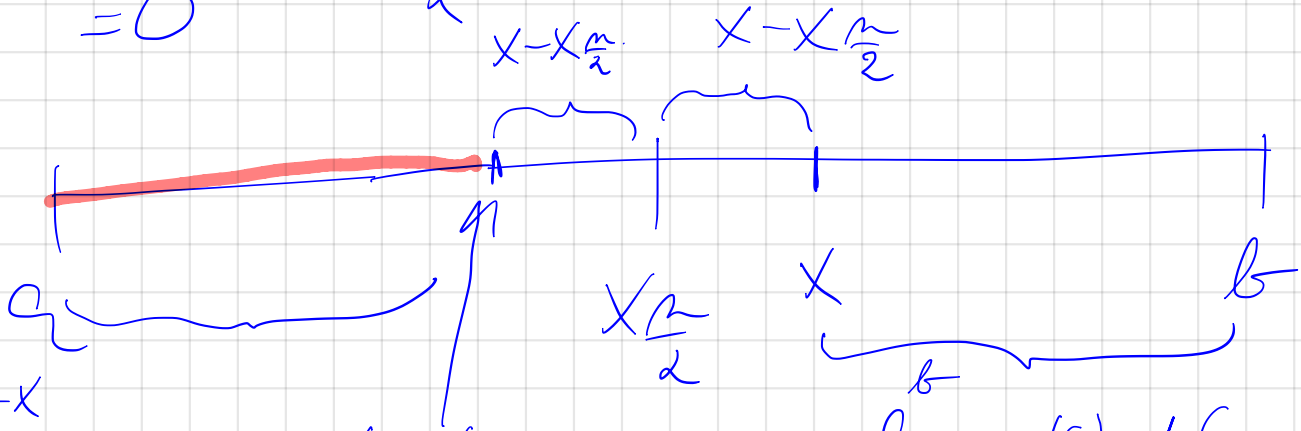
$$\dots \Rightarrow \Omega_n(x) = \int_a^x \omega_n(s)\,ds > 0 \quad x \in (x_0, x_{\frac{n}{2}})$$

- $x \in (x_{\frac{n}{2}}, b)$

$$\Omega_n(x) = \int_a^x \omega_n(s)\,ds = \int_a^b \omega_n(s)\,ds - \int_x^b \omega_n(s)\,ds$$

$$= \underbrace{\left[\Omega_n(x)\right]_a^b}_{=0} - \int_x^b \omega_n(s)\,ds = \int_a^{a+b-x} \omega_n(s)\,ds > 0$$

$a+b-x < x_{\frac{n}{2}}$



$a+b-x$

$$\int_a \omega_n(x)\,dx > 0$$

$$x_{\frac{n}{2}} - (x - x_{\frac{n}{2}}) = x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}} - x = a+b-x$$

$$-\int_x^b \omega_n(s)\,ds$$

$\square$

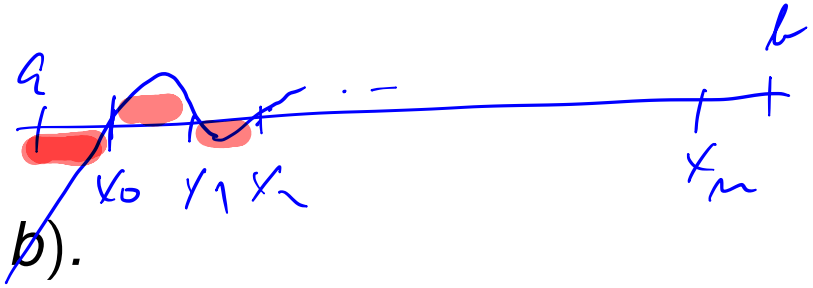
Newtonovy-Cotesovy formule

Lemma 7

Definujme funkci $J_n(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$ pro $x_0 = a + h, x_n = b - h$ (případ otevřených formulí) jako

$$J_n(x) = \int_a^x \omega_n(\xi) d\xi.$$

Je-li n sudé, potom platí:



1. $J_n(a) = J_n(b) = 0$,
2. $J_n(x) < 0$ *na intervalu* (a, b).

Důkaz.

Video na Youtube

□

Dk: 1) $J_n(a)=0$

2) $J_n(b)=0$ STEJNĚ JAKO LEMMA 6

$a < x \leq x_{\frac{n}{2}}$; $J_n(x) < 0$

$$\int_a^{x_0} \omega_n(s)\,ds < 0 \Rightarrow J_n(x) < 0 \,;\; x \in (a, x_0)$$

$$\left| \int_{x_0}^{x_1} \omega_n(s)\,ds \right| < \left| \int_a^{x_0} \omega_n(s)\,ds \right| \Rightarrow$$

$$\int_a^{x_1} \omega_n(s)\,ds < 0 \Rightarrow J_n(x) < 0 \,;\; x \in (a, x_1)$$

DÁLE STEJNĚ JAKO DŮKAZ LEMMATU 6.

$\Rightarrow J_n(x) < 0$ na (a, b).

$\square$

Newtonovy-Cotesovy formule

Lemma 8

Pro poměrné diference k-tého řádu platí

$$f[x_i, \ldots, x_{i+k}] = \sum_{j=i}^{i+k} \frac{f(x_j)}{\prod_{m=i, m\neq j}^{i+k} (x_j - x_m)}.$$

To mimo jiné znamená, že poměrné diference jsou symetrické vůči libovolné permutaci svých argumentů.

Důkaz.

Video na Youtube □

Dk: BÚNO $[x_i, \dots, x_{i-k}] \to [x_0, \dots, x_k]$

$$f[x_0, \dots, x_k] = \frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)\cdots(x_0-x_k)} + \dots +$$

$$\frac{f(x_i)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_k)} + \dots + \frac{f(x_k)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})}$$

INDUKCÍ PODLE k:

$k=1$; $f[x_0, x_1] = \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} =$

$$= \frac{f(x_0)}{x_0-x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1-x_0} \quad \checkmark$$

$k-1 \to k$

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k-x_0} =$$

$$\overset{\text{I.P.}}{=} \frac{1}{x_k-x_0}\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{f(x_i)}{(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_k)}\right.$$

$$\left. - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{f(x_i)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_{k-1})}\right) =$$

$$= \frac{1}{x_k-x_0}\left[\frac{f(x_k)}{(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})} + \right.$$

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0} =$$

$$\overset{\text{I.P.}}{=} \frac{1}{x_k - x_0} \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{f(x_i)}{(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_k)} \right.$$

$$\left. - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{f(x_i)}{(x_i - x_0) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_{k-1})} \right) =$$

$$= \frac{1}{x_k - x_0} \left[\frac{f(x_k)}{(x_k - x_1) \cdots (x_k - x_{k-1})} + \right.$$

$$+ \sum_{i=1}^{k-1} f(x_i) \left(\frac{1}{(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_k)} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{(x_i - x_0) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_{k-1})} \right)$$

$$\left. - \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1) \cdots (x_0 - x_{k-1})} \cdot \frac{-(x_k - x_0)}{x_0 - x_k} \right] =$$

$$= \frac{f(x_k)}{(x_k - x_0) \cdots (x_k - x_{k-1})} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k-1} f(x_i) \frac{\cancel{x_i} - \cancel{x_0} - (\cancel{x_i} - \cancel{x_k})}{(x_i - x_0) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_k)} \cdot \frac{1}{\cancel{x_k - x_0}}$$

$$+\frac{1}{\cancel{x_k - x_0}} \cdot \underbrace{\frac{-f(x_0)}{(x_0-x_1)\cdots(x_0-x_{k-1})} \cdot \frac{-\cancel{(x_k-x_0)}}{(x_0-x_k)}}_{\frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)\cdots(x_0-x_k)}}$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \frac{f(x_i)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_k)}$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \frac{f(x_i)}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{k} (x_i-x_j)}$$

$\square$

Newtonovy-Cotesovy formule

Dále rozšíříme poměrné diference o možnost opakujících se argumentů:

$$
\begin{aligned}
f[x_0, \ldots, x_n, x, x] &= lim_{y \to x} f[x, x_0, \ldots, x_n, y] \\
&= lim_{y \to x} \frac{f[x_0, \ldots, x_n, y] - f[x, x_0, \ldots, x_n]}{y - x} \\
&= lim_{y \to x} \frac{f[x_0, \ldots, x_n, y] - f[x_0, \ldots, x_n, x]}{y - x} \\
&= \frac{d}{dx} f[x_0, \ldots, x_n, x].
\end{aligned}
$$

Newtonovy-Cotesovy formule

Theorem 9

Buď n sudé a nechť $f \in C^{n+2}\langle a, b\rangle$, potom existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že chybu uzavřených Newtonových-Cotesových formulí lze vyjádřit jako

$$E_n(f) = \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \underbrace{\int_a^b x\omega_n(x)dx}_{<0}$$

$$= h^{n+3} \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \underbrace{\int_0^n t\pi_n(t)dt}_{<0}.$$

Důkaz.

Video na Youtube

□

Dk.: $E_n(f) = \int_a^b R_n(x)\,dx =$

$$\int_a^b f[x_0, \dots x_n, x]\, \omega_n(x)\,dx$$

$$\Omega_n(x) = \int_a^x \omega_n(s)\,ds \Rightarrow \omega_n(x) = \Omega_n'(x)$$

$$E_n(f) = \int_a^b f[x_0, \dots, x_n, x]\, \Omega_n'(x)\,dx \overset{P.P.}{=}$$

$$\Big[\Omega_n(x)\, f[x_0, \dots, x_n, x]\Big]_a^b -$$

$\Omega_n(a) = \Omega_n(b) = 0$

$$-\int_a^b \Omega_n(x) \frac{d}{dx} f[x_0, x_1, \dots, x_n, x]\,dx =$$

$$= 0 - \int_a^b \Omega_n(x) \underbrace{f[x_0, x_1, \dots, x_n, x, x]}_{\frac{f^{(n+2)}(s)}{(n+2)!}}\,dx$$

$$= -\frac{f^{(n+2)}(s)}{(n+2)!} \int_a^b \Omega_n(x)\,dx$$

$$\int_a^b 1 \cdot \omega_n(x)\,dx = \underbrace{\left[x\,\omega_n(x)\right]_a^b}_{=0} - \int_a^b x \cdot \omega_n(x)\,dx$$

$$\omega_n(a) = \omega_n(b) = 0$$

$$\Rightarrow E_n(f) = \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_a^b x \cdot \omega_n(x)\,dx$$

$$x = x_0 + th = a + th \; ; \; \omega_n(x) = h^{n+1}\,\pi_n(t)$$

$$\pi_n(t) = t(t-1)\cdots(t-n)$$

$$dx = h \cdot dt$$

$$E_n(f) = \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!}\, h^{n+1} \int_0^n t \cdot \pi_n(t) \cdot h\,dt =$$

$$= \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!}\, h^{n+2} \underbrace{\int_0^n t \cdot \pi_n(t)\,dt}_{<0}$$

$$\int_a^b x \cdot \omega_n(x)\,dx = -\underbrace{\int_a^b \omega_n(x)\,dx}_{>0}$$

$\square$

Newtonovy-Cotesovy formule

Theorem 10

Buď n liché a nechť $f \in C^{n+1}\langle a, b\rangle$, potom existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že chybu uzavřených Newtonových-Cotesových formulí lze vyjádřit jako

$$E_n(f) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \underbrace{\int_a^b \omega_n(x)dx}_{<0}$$

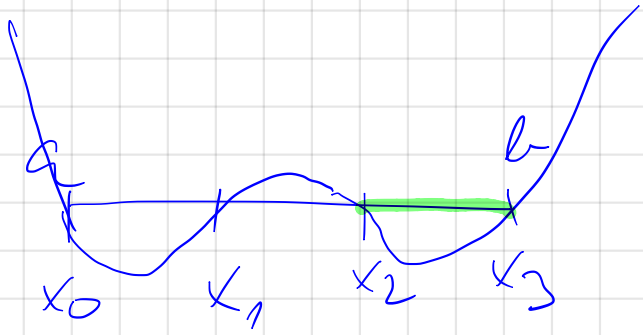
$$= h^{n+2} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \underbrace{\int_0^n \pi_n(t)dt}_{<0}.$$

Důkaz.

Video na Youtube

□

Dk: n LICHÉ



$x_0 = a$

$x_n = b$

$$\int_a^b \omega_n(x)\, f[x_0, \dots, x_n, x]\, dx =$$

$$\int_a^{b-h} \omega_n(x)\, f[x_0, \dots, x_n, x]\, dx + \int_{b-h}^{b} \omega_n(x)\, f[x_0, x_1, \dots, x_n, x]\, dx$$

$$\int_{b-h}^{b} \omega_n(x)\, f[x_0, x_1, \dots, x_n, x]\, dx \overset{\text{STR. H.}}{=} f[x_0, x_1, \dots, x_n, \xi_1] \int_{b-h}^{b} \omega_n(x)\, dx$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi_1)}{(n+1)!} \int_{b-h}^{b} \omega_n(x)\, dx$$

$$\int_a^{b-h} \omega_n(x)\, f[x_0, \dots, x_n, x]\, dx = \int_a^{b-h} \omega_n(x)\, f[x, x_0, \dots, x_n]\, dx =$$

$$= \int_a^{b-h} \omega_n(x) \left(\frac{f[x_0, \dots, x_n] - f[x, x_0, \dots, x_{n-1}]}{x - x_n} \right) dx$$

$$= \int_a^{b-h} \omega_n(x) \left(\frac{f[x_0, \dots, x_n] - f[x, x_0, \dots, x_{n-1}]}{x - x_n} \right) dx$$

$$= \int_a^{b-h} \omega_{n-1}(x)(x - x_n) \left(\frac{f[x_0, \dots, x_n] - f[x, x_0, \dots, x_{n-1}]}{x - x_n} \right) dx$$

$$= \int_a^{b-h} \omega_{n-1}(x) \Big(\underbrace{f[x_0, \dots, x_n]}_{\text{CONST.}} - f[x, x_0, \dots, x_{n-1}] \Big) dx =$$

$$= f[x_0, \dots, x_n] \int_a^{b-h} \omega_{n-1}(x)\, dx - \int_a^{b-h} \omega_{n-1}(x) f[x, x_0, \dots, x_{n-1}]\, dx$$

$$= f[x_0, \dots, x_n] \underbrace{\Omega_{n-1}(x_{n-1})}_{=0} - \int_a^{b} \omega_{n-1}(x) f[x, x_0, \dots, x_{n-1}]\, dx$$

$$\Omega_{n-1}(x) = \int_a^x \omega_{n-1}(s)\, ds \Rightarrow \Omega_{n-1}(x_{n-1})$$

LEMMA 6

$$\Omega_{n-1}(a) = \Omega_{n-1}(x_{n-1}) = 0$$

$$\int_a^{b-h} \Omega'_{n-1}(x) f[x, x_0, \dots, x_{n-1}]\, dx \overset{\text{P.P.}}{=} \Big[\Omega_{n-1}(x) f[x, x_0, \dots, x_{n-1}] \Big]_a^{b-h}$$

$$- \int_a^{b-h} \Omega_{n-1}(x) f[x_0, \dots, x_{n-1}, x, x]\, dx$$

STR. 41.

$$= -f[x_0, \dots, x_{n-1}, \xi_1, \xi_2] \int_a^{b-h} \omega_{n-1}(x)\, dx =$$

$\omega_{n-1}(x) > 0$ na $(a, b-h)$

$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi_2)}{(n+1)!} \int_a^{b-h} -\omega_{n-1}(x)\, dx$$

$$\Rightarrow E_n(h) = A \frac{f^{(n+1)}(\xi_1)}{(n+1)!} + B \frac{f^{(n+1)}(\xi_2)}{(n+1)!}$$

$$A = \int_{b-h}^{b} \omega_n(x)\, dx \; ; \; B = -\int_a^{b-h} \omega_{n-1}(x)\, dx$$

$\omega_n(x) < 0$ na $(b-h, b) \Rightarrow A < 0$

$\omega_{n-1}(x) > $ na $(a, b-h) \Rightarrow B < 0$

$$E_n(h) = \frac{-1}{(n+1)!} \left(-A f^{(n+1)}(\xi_1) - B f^{(n+1)}(\xi_2) \right)$$

DISKR. STR. 41

$$= -\frac{1}{(n+1)!} \left(-A - B \right) f^{(n+1)}(\xi_2) \Big)$$

$$E_n(h) = (A+B)\,\frac{f^{(n+1)}(\xi_0)}{(n+1)!}$$

$$A+B = -\int_a^{b-h} \ell_{n-1}(x)\,dx + \int_{b-h}^{b} \omega_{n-1}(x)\,dx$$

$$\omega_n(x) = \omega_{n-1}(x)(x-x_n) = \ell_{n-1}'(x)(x-x_n)$$

$$\int_a^{b-h} \omega_n(x)\,dx = \int_a^{b-h} \ell_{n-1}'(x)(x-x_n)\,dx \overset{P.P}{=}$$

$$= \Big[\ell_{n-1}(x)(x-x_n)\Big]_a^{b-h} - \int_a^{b-h} \ell_{n-1}(x)\,dx$$

$$\Rightarrow -\int_a^{b-h} \ell_{n-1}(x)\,dx = \int_a^{b-h} \omega_n(x)\,dx$$

$$\Rightarrow A+B = \int_a^{b-h} \omega_n(x)\,dx + \int_{b-h}^{b} \omega_n(x)\,dx =$$

$$\int_a^{b} \omega_n(x)\,dx$$

$$E_n(f) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_0)}{(n+1)!} \int_a^b \omega_n(x)\, dx$$

$$x = x_0 + t h \Rightarrow \omega_n(x) = h^{n+1} \pi_n(t)$$

$$dx = h\, dt$$

$$E_n(f) = h^{n+2} \frac{f^{(n+1)}(\xi_0)}{(n+1)!} \int_0^n \pi_n(t)\, dt$$

$\square$

Newtonovy-Cotesovy formule

Theorem 11

Buď n sudé a nechť $f \in C^{n+2}\langle a, b\rangle$, potom existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že chybu otevřených Newtonových-Cotesových formulí lze vyjádřit jako

$$E_n(f) = \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \underbrace{\int_a^b x\omega_n(x)dx}_{>0}$$

$$= h^{n+3} \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \underbrace{\int_{-1}^{n+1} t\pi_n(t)dt}_{>0} .$$

Důkaz.

Stejný jako u věty (9), ale místo $\Omega_n(x)$ se použije $J_n(x)$, které má na (a, b) akorát opačné znaménko, tj. i integrály v tvrzení věty mají opačné znaménko. □

Newtonovy-Cotesovy formule

Theorem 12

Buď n liché a nechť $f \in C^{n+1}\langle a, b\rangle$, potom existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že chybu otevřených Newtonových-Cotesových formulí lze vyjádřit jako

$$E_n(f) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \underbrace{\int_a^b \omega_n(x)dx}_{>0}$$

$$= h^{n+2} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \underbrace{\int_{-1}^{n+1} \pi_n(t)dt}_{>0} .$$

Důkaz.

Stejný jako u věty (10), ale místo $\Omega_n(x)$ se použije $J_n(x)$, které má na (a, b) akorát opačné znaménko, tj. i integrály v tvrzení věty mají opačné znaménko. □

Newtonovy-Cotesovy formule

	uzavřené	otevřené
sudé	$f \in C^{n+2}$	$f \in C^{n+2}$
	$h^{n+3}\frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!}\underbrace{\int_0^n t\pi_n(t)dt}_{<0}$	$h^{n+3}\frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!}\underbrace{\int_{-1}^{n+1} t\pi_n(t)dt}_{>0}$
liché	$f \in C^{n+1}$	$f \in C^{n+1}$
	$h^{n+2}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\underbrace{\int_0^n \pi_n(t)dt}_{<0}$	$h^{n+2}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\underbrace{\int_{-1}^{n+1} \pi_n(t)dt}_{>0}$

Vidíme tedy, že se vyplatí používat formule se sudým n, tj. s **lichým počtem uzlů**.

Příklady integračních formulí

- ukážeme si příklady některých nejčastějších formulí
- u některých si ukážeme, jak chybu integrace odvodit také z Taylorova polynomu

Obdélníková formule

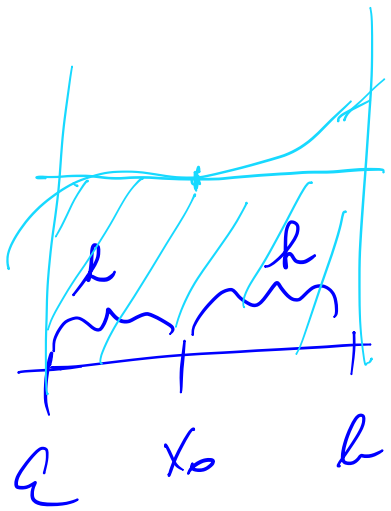
Theorem 13

*Buď $f \in C^{(2)}(a,b)$, $x_0 = \frac{a+b}{2}$ a $h = \frac{b-a}{2}$, pak **obdélníková** formule tvaru*

$$\int_a^b f(x)dx \approx I_0(f) = 2hf(x_0),$$

*je **otevřená** formule pro n **sudé** a tedy*

$$E_0(f) = h^3 \frac{f^{(2)}(\xi)}{2} \int_{-1}^{1} \underbrace{t\pi_n(t)}_{=t^2} dt$$



*jde o aproximaci s přesností **třetího** řádu.*

$f(x_0)$

Obdélníková formule

- odvodíme tvar formule z Lagrangeova polynomu

$$L_0(x) = f(x_0)$$

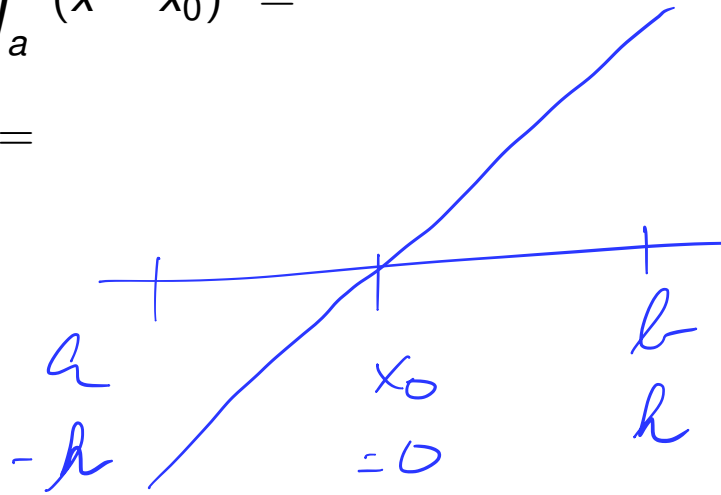
- a provedeme integraci

$$\int_a^b L_0(x)dx = \int_a^b f(x_0)dx = 2hf(x_0)$$

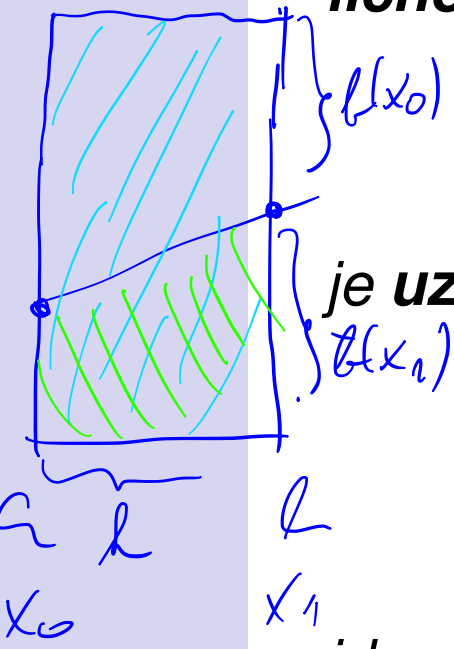
Obdélníková formule

- řád aproximace lze odvodit také z Taylorova polynomu

$$
\begin{aligned}
E_0(f) &= \int_a^b f(x) - L_0(x)dx = \\
&= \int_a^b \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f^{(2)}(\xi)(x-x_0)^2}_{=f(x)} - \underbrace{f(x_0)}_{=L_0(x)} dx = \\
&= f'(x_0)\int_a^b (x_0 - x)dx + \frac{1}{2}f^{(2)}(\xi)\int_a^b (x-x_0)^2 = \\
&= f'(x_0)\underbrace{\int_{-h}^{h} tdt}_{=0} + \frac{1}{2}f^{(2)}(\xi)\int_{-h}^{h} t^2 dt = \\
&= \frac{1}{2}f^{(2)}(\xi)\left[\frac{h^3}{3}\right]_{-h}^{h} = h^3\frac{1}{3}f^{(2)}(\xi).
\end{aligned}
$$



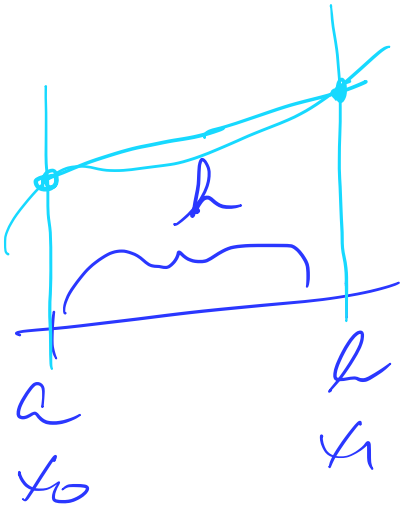
Lichoběžníková formule



Theorem 14

Buď $f \in C^{(2)}(a,b)$, $x_0 = a$, $x_1 = b$ a $h = (b-a)$, pak ***lichoběžníková*** *formule tvaru*

$$I_1(f) = h\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2},$$



je ***uzavřená*** *formule pro n* ***liché*** *a tedy*

$$E_1(f) = h^3\frac{f^{(2)}(\xi)}{2}\int_0^1 \underbrace{\pi_n(t)}_{=t(t-1)}\,dt$$

jde o aproximaci s přesností ***třetího*** *řádu.*

Lichoběžníková formule

- odvodíme tvar formule z Lagrangeova polynomu

$$L_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$
$$= f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h}(x - x_0)$$

$L_1(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0)$

$\int_0^h t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^h = \frac{h^2}{2}$

- provedeme integraci

$$\int_a^b L_1(x) = \int_a^b f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h}(x - x_0)dx =$$
$$= hf(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h}\int_0^h tdt =$$
$$= hf(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h}\frac{h^2}{2} =$$
$$= h\left(f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{2}\right) =$$
$$= h\frac{f(x_1) + f(x_0)}{2}$$

Lichoběžníková formule

- řád aproximace opět odvodíme i z Taylorova polynomu

$f(x_1) - f(x_0) = f'(\xi_2)(x_1 - x_0)$

$\xi_2 \in \langle x_0, x_1 \rangle$

$$
\begin{aligned}
E_1(f) &= \int_a^b f(x) - L_1(x)dx = \\
&= \int_a^b \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f^{(2)}(\xi)(x - x_0)^2}_{=f(x)} - \\
&- \underbrace{\left(f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)\right)}_{=L_1(x)} dx = \\
&= \int_a^b \left(f'(x_0) - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}\right)(x - x_0) + \frac{1}{2}f^{(2)}(\xi)(x - x_0)^2 dx = \\
&= \left(f'(x_0) - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}\right)\int_0^h t dt + \frac{1}{2}f^{(2)}(\xi)\int_0^h t^2 dt = \\
&= \left(f'(x_0) - f'(\xi_2)\right)\frac{h^2}{2} + \frac{1}{2}f^{(2)}(\xi)\frac{h^3}{3} = f^{(2)}(\xi_3)\underbrace{(\xi_2 - x_0)}_{<h}\frac{h^2}{2} + \frac{1}{2}f^{(2)}(\xi)\frac{h^3}{3},
\end{aligned}
$$

kde $\xi_2 \in (x_0, x_1)$, $\xi_3 \in (x_0, \xi_2)$

$f'(x_0) - f'(\xi_2) = f''(\xi_3)(x_0 - \xi_2)$

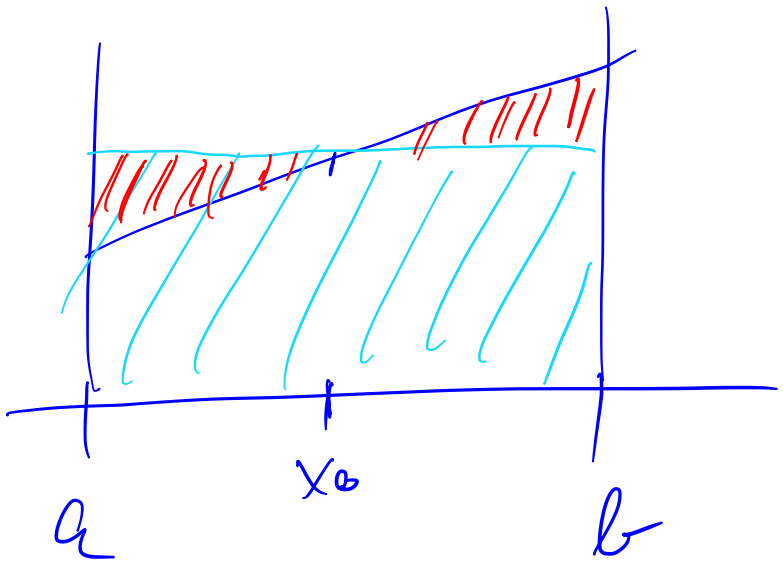
- můžeme tedy ukázat, že

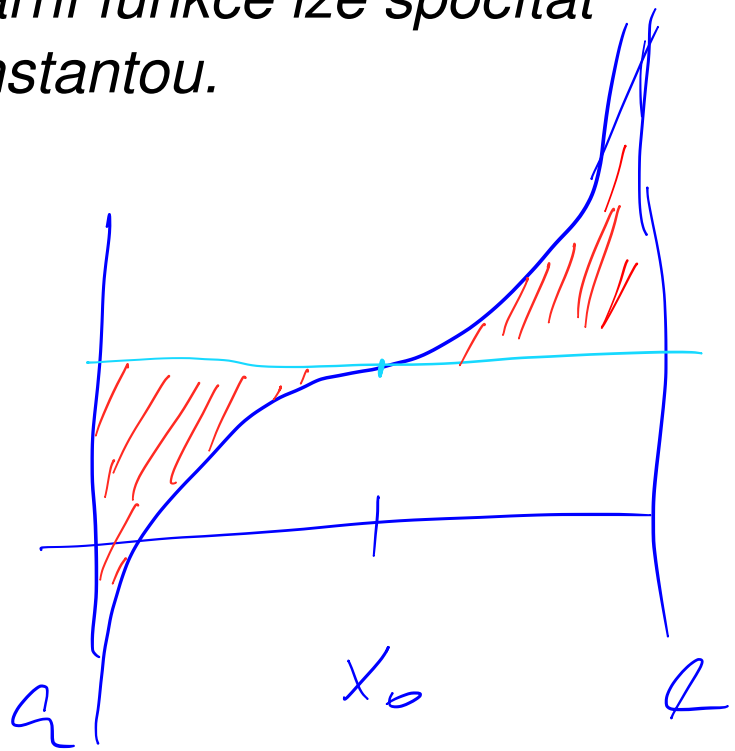
$$
|E_1(f)| \leq \frac{1}{2}\left|f^{(2)}(\xi) + f^{(2)}(\xi_3)\right| h^3.
$$

Lichoběžníková formule

Remark 15

Vidíme tedy, že obdélníková a lichoběžníková formule mají stejný řád aproximace a to i přesto, že lichoběžníková formule používá aproximaci polynomem vyššího stupně. Je to způsobeno tím, že integrál lineární funkce lze spočítat přesně i s pomocí aproximace konstantou.





Cavalieriho-Simpsonova formule

Theorem 16

Buď $f \in C^{(4)}(a,b)$, $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$, $x_2 = b$ a $h = \frac{b-a}{2}$, pak ***Cavalieriho-Simpsonova*** *formule tvaru*

$$I_2(f) = \frac{h}{6}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right],$$

$L_2(x)$

je ***uzavřená*** *formule pro n* ***sudé*** *a tedy*

$$E_2(f) = h^5 \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \int_0^2 t \underbrace{\pi_n(t)}_{t(t-1)(t-2)} dt$$

jde aproximaci s přesností ***pátého*** *řádu.*

$L_2(x) = f(x_0) + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$

Shrnutí

- formule se sudým počtem interpolačních uzlů mají stejnou přesnost jako fomule s o jedna menším počtem interpolačních uzlů
- obdélníková formule
- Cavalieriho-Simpsonova formule
- pro integraci se ale také často využívají numerické metody pro řešení ODR