Tomáš Oberhuber

Faculty of Nuclear Sciences and Physical Engineering
Czech Technical University in Prague

Řád aproximace

Definition 1

Buď H_{x_0} okolí bodu x_0 a funkce $f, g : H_{x_0} \to \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f aproximuje funkci g na okolí H_{x_0} s přesností řádu r, právě když platí

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x) - g(x)|}{|x - x_0|^r} = C,$$

kde C je kladná nenulová konstanta.

Konečné diference

Mějme bod $x_0 \in \mathbb{R}$ a chceme napočítat derivaci $f'(x_0)$.
Zvolme:

- parametr $h \in \mathbb{R}$, $h > 0$
- body $x_i = x_0 + ih$ pro $i = -l_1, \ldots, l_2$
- označme $n = l_1 + l_2$
- označme $f_i = f(x_i)$

Konečné diference

Theorem 2

Buď $f \in C^2(x_0, x_1)$, pak pro **dopřednou** *konečnou diferenci platí*

$$\frac{f_1 - f_0}{h} = f'(x_0) + O(h),$$

tj. jde o aproximaci ***první derivace*** *s* ***přesností prvního řádu****.*

Konečné diference

Theorem 3

Buď $f \in C^2(x_{-1}, x_0)$, pak pro **zpětnou** *konečnou diferenci platí*

$$\frac{f_0 - f_{-1}}{h} = f'(x_0) + O(h),$$

tj. jde o aproximaci ***první derivace*** *s* ***přesností prvního řádu****.*

Konečné diference

Theorem 4

Buď $f \in C^2(x_{-1}, x_1)$, pak pro **centrální** *konečnou diferenci platí*

$$\frac{f_1 - f_{-1}}{2h} = f'(x_0) + O(h^1),$$

tj. jde o aproximaci ***první derivace*** *s* ***přesností prvního řádu****.*

Theorem 5

Buď $f \in C^3(x_{-1}, x_1)$, pak pro **centrální** *konečnou diferenci platí*

$$\frac{f_1 - f_{-1}}{2h} = f'(x_0) + O(h^2),$$

tj. jde o aproximaci ***první derivace*** *s* ***přesností druhého řádu****.*

Konečné diference

Theorem 6

Buď $f \in C^4(x_{-1}, x_1)$, pak platí

$$\frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2} = f''(x_0) + O(h^2),$$

tj. jde o aproximaci ***druhé derivace*** *s* ***přesností druhého řádu****.*

Konečné diference

Theorem 7

Buď $f \in C^{(n+1)}(x_{-l_1}, x_{l_2})$*, pak existuje konečná diference pro náhradu* k*-té derivace s přesností řádu* $n+1-k$ *pro* $k = 1, \ldots, n$*.*

Konečné diference

Důkaz.
Rozepíšeme si celkem n Taylorových rozvojů v bodech $-l_1$ až l_2 (vynecháme index 0)

$$
\begin{array}{ccccccc}
f_{-l_1} & = & f_0 + & c_{11} h f_0^{(1)} + & \dots c_{1k} h^k f_0^{(k)0} & \dots c_{1n} h^n f_0^{(n)} + & d_1 h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi_1) \\
f_{-l_1+1} & = & f_0 + & c_{21} h f_0^{(1)} + & \dots c_{2k} h^k f_0^{(k)} & \dots c_{2n} h^n f_0^{(n)} + & d_2 h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi_2) \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\
f_{l_2} & = & f_0 + & c_{n1} h f_0^{(1)} + & \dots c_{nk} h^k f_0^{(k)} & \dots c_{nn} h^n f_0^{(n)} + & d_n h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi_n) \\
\hline
 & & * & 0 h f_0^{(1)} & \dots 1 h^k f_0^{(k)} & \dots 0 h^n f_0^{(n)} & *
\end{array}
$$

Poslední řádek určuje, kterou derivaci chceme aproximovat, pokud každý rozvoj vynásobíme koeficientem α_i a vysčítáme. Koeficienty α_i pak musí být řešením soustavy:

$$
\begin{pmatrix}
c_{11} & c_{21} & \dots & c_{n1} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
c_{1k} & c_{2k} & \dots & c_{nk} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
c_{1n} & c_{2n} & \dots & c_{nn}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \\ \vdots \\ \alpha_n
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0
\end{pmatrix}
$$

□

Podělením h^k pak u posledního nenulového členu dostáváme h^{n+1-k}.

Domácí úkol

Pomocí Taylorových rozvojů dokažte jedno z následujících tvrzení:

1. Nechť $f \in C^{(5)}(x_{-l_1}, x_{l_2})$. Pak
$$\frac{1}{12h}\left(-f_2 + 8f_1 - 8f_{-1} + f_{-2}\right) = f'(x_0) + O(h^4).$$
2. Nechť $f \in C^{(5)}(x_{-l_1}, x_{l_2})$. Pak
$$\frac{1}{2h^3}\left(f_2 - 2f_1 + 2f_{-1} - f_{-2}\right) = f^{(3)}(x_0) + O(h^2).$$
3. Nechť $f \in C^{(6)}(x_{-l_1}, x_{l_2})$. Pak
$$\frac{1}{h^4}\left(f_2 - 4f_1 + 6f_0 - 4f_{-1} + f_{-2}\right) = f^{(4)}(x_0) + O(h^2).$$
4. Nechť $f \in C^{(3)}(x_{-l_1}, x_{l_2})$. Pak
$$\frac{-1}{2h}\left(f_2 - 4f_1 + 3f_0\right) = f'(x_0) + O(h^2).$$