Tomáš Oberhuber

Faculty of Nuclear Sciences and Physical Engineering
Czech Technical University in Prague

Cauchyho úloha

Budeme řešit obyčejnou diferenciální rovnici s počáteční podmínkou:

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t)) \text{ na } (0, T), \\ x(0) &= x_0. \end{aligned}$$

Řešení $x(t)$ na intervalu $(0, T)$ budeme ze znalosti v bodě 0 postupně rozšiřovat na celý interval.

Cauchyho úloh

Zvolíme si časový krok τ a $N = T/\tau$. Hodnotu přibližného řešení v uzlu $i = 1, \ldots N$ budeme značit x_i.
Pomocí předpisu

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_0 + \Delta x(0, \tau), \\
x_2 &= x_1 + \Delta x(\tau, \tau), \\
&\vdots \\
x_N &= x_{N-1} + \Delta x((N-1)\tau, \tau),
\end{aligned}
$$

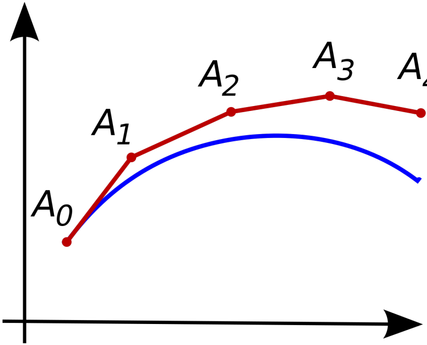
zkonstruujeme přibližné řešení. Lineární interpolací lze dodefinovat na:

$$x_\tau(t) = (1 - s)x_{\lfloor t/\tau \rfloor} + s x_{\lfloor t/\tau \rfloor + 1},$$

kde

$$s = \frac{t - \lfloor t/\tau \rfloor}{\tau}.$$

Cauchyho úloh



Zdroj: Wikipedie

Červená křivka ukazuje přibližné řešení, modrá přesné.

Cauchyho úloh

Pro volbu $\Delta x(t,\tau)$ lze postupovat takto (pomocí Taylora v bodě t):

$$\Delta x(t,\tau) = x(t+\tau) - x(t) = \tau x'(t) + \frac{\tau^2}{2} x''(t) + \dots,$$

kde

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t,x(t)), \\ x''(t) &= \frac{d}{dt} f(t,x(t)) = \partial_t f(t,x(t)) + \partial_x f(t,x(t)) x'(t) \\ &= \partial_t f(t,x(t)) + \partial_x f(t,x(t)) f(t,x(t))), \\ x'''(t) &= \dots \end{aligned}$$

Rungovy-Kuttovy metody

Tento přístup má několik nevýhod:

1. výsledné vzorce jsou složité a náročné na napočítání z pohledu času CPU
2. pro každou nově zadanou pravou stranu $f(t, x(t))$ bych musel napočítat všechny potřebné derivace
3. praxe prý ukazuje, že výsledná metoda je numericky nestabilní

Proto se pro řešení Cauchyho úlohy používají **Rungovy-Kuttovy metody**.

Rungovy-Kuttovy metody

Přírůstek $\Delta x(t,\tau)$ funkce $x(t)$ budeme hledat ve tvaru:

$$\Delta x(t,\tau) = p_1 k_1(t,\tau) + p_2 k_2(t,\tau) + \ldots p_n k_n(t,\tau),$$

kde

$$\begin{aligned}
k_1(t,\tau) &= \tau f(t, x(t)), \\
k_2(t,\tau) &= \tau f(t + \alpha_2\tau, x(t) + \beta_{21} k_1(t,\tau)), \\
k_3(t,\tau) &= \tau f(t + \alpha_3\tau, x(t) + \beta_{31} k_1(t,\tau) + \beta_{32} k_2(t,\tau)), \\
&\vdots \\
k_n(t,\tau) &= \tau f(t + \alpha_n\tau, x(t) + \beta_{n1} k_1(t,\tau) + \beta_{n2} k_2(t,\tau) + \ldots + \beta_{n,n-1} k_{n-1}(t,\tau))
\end{aligned}$$

Rungovy-Kuttovy metody

- koeficienty p_i, α_i a β_{ij} musí být vhodně zvoleny a definují tak vlastně danou metodu
- jejich volbu budeme provádět tak, aby přírůstek Δx podle Rungova-Kuttova tvaru a skutečného Taylorova rozvoje měl shodné koeficienty do co nejvyššího řádu pro libovolnou pravou stranu $f(t, x(t))$

Rungovy-Kuttovy metody

- pro funkci

$$
\begin{aligned}
\varphi_n(\tau) &= [x(t+\tau) - x(t)] - \\
&\quad [p_1 k_1(t,\tau) + p_2 k_2(t,\tau) + \ldots p_n k_n(t,\tau)] \\
&= \tau x'(t) + \frac{\tau^2}{2} x''(t) + \ldots - \\
&\quad [p_1 k_1(t,\tau) + p_2 k_2(t,\tau) + \ldots p_n k_n(t,\tau)] \\
&= \tau f(t, x(t)) + \frac{\tau^2}{2} \frac{d}{dt} f(t, x(t)) + \ldots - \\
&\quad [p_1 k_1(t,\tau) + p_2 k_2(t,\tau) + \ldots p_n k_n(t,\tau)]
\end{aligned}
$$

chcem, aby platilo

$$
\varphi_n^{(k)}(0) = 0,
$$

pro $k \in 0, \ldots, s$ pro co nejvyšší s.

Rungovy-Kuttovy metody

Máme-li totiž dvě funkce f a g, jejichž prvních k derivací se rovná v bodě t, pak je

$$
\begin{aligned}
& f(t+\tau) - g(t+\tau) = \\
& f(t) + f'(t) + \dots \frac{\tau^k}{k!} f^{(k)}(t) + \frac{\tau^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\xi_f) \\
& -g(t) - g'(t) - \dots \frac{\tau^k}{k!} g^{(k)}(t) - \frac{\tau^{k+1}}{(k+1)!} g^{(k+1)}(\xi_g) \\
& = \frac{\tau^{k+1}}{(k+1)!} [f^{(k+1)}(\xi_f) - g^{(k+1)}(\xi_g)],
\end{aligned}
$$

pak $|f(t+\tau) - g(t+\tau)| = O(\tau^{k+1})$, tj. g aproximuje f v bodě t s přesností řádu $k+1$. **Zároveň platí, že prvních k derivací funkce $f - g$ je nulových.**

Rungovy-Kuttovy metody

Pak platí:

$$\begin{aligned} x(t+\tau)-x(t) &= [p_1 k_1(t,\tau)+p_2 k_2(t,\tau)+\ldots p_n k_n(t,\tau)]+\varphi(\tau), \\ x(t+\tau)-x(t) &= \Delta x(t)+O(\tau^k) \end{aligned}$$

Remark 1

Lze ukázat, že je-li

$$x(t+\tau)-x(t)=\Delta x(t)+O(\tau^k),$$

pak platí

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{\|x_\tau(t)-x(t)\|}{\left|\tau^{k-1}\right|}=C,$$

tj. přesné řešení $x(t)$ *je aproximováno přibližným* $x_\tau(t)$ *na* $(0,T)$ *s přesností řádu* $k-1$.

Rungovy-Kuttovy metody

Example 2

$n = 1$ (Eulerova metoda)
$p_1 = 1$

$$\begin{aligned} k_1(t,\tau) &= \tau f(t, x(t)), \\ \Delta x(t,\tau) &= \tau k_1(t,\tau) \end{aligned}$$

Rungovy-Kuttovy metody

Example 3

$n = 2$

- $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}, \alpha_2 = \beta_{21} = 1,$

$$\begin{aligned} k_1(t,\tau) &= \tau f(t, x(t)), \\ k_2(t,\tau) &= \tau f(t+\tau, x(t) + k_1(t,\tau)), \\ x(t+\tau) &= x(t) + \frac{1}{2}(k_1(t,\tau) + k_2(t,\tau)) \end{aligned}$$

- $p_1 = 0, p_2 = 1, \alpha_2 = \beta_{21} = \frac{1}{2},$

$$\begin{aligned} k_1(t,\tau) &= \tau f(t, x(t)), \\ k_2(t,\tau) &= \tau f(t+\frac{\tau}{2}, x(t) + \frac{1}{2}k_1(t,\tau)), \\ x(t+\tau) &= x(t) + k_2(t,\tau) \end{aligned}$$

Cauchyho úloha

Budeme řešit rovnici vyššího řádu:

$$x^{(n)}(t) = f(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)).$$

- provedeme substituci $u_i(t) = x^{(i)}(t)$ pro $i = 0, \ldots, n$
- pak platí $u_i'(t) = u_{i+1}(t)$
- úlohu lze přepsat na soustavu ODR rovnic prvního řádu

$$\begin{aligned}
u_{n-1}'(t) &= f(t, u_0(t), \ldots, u_{n-1}(t)), \\
u_{n-2}'(t) &= u_{n-1}(t), \\
&\vdots \\
u_0'(t) &= u_1(t).
\end{aligned}$$

- pro každé $u_0, \ldots, u_{n-1}$ musíme ale znát počáteční podmínku, tj. hodnotu v bodě 0
- v původní úloze to odpovídá funkční hodnotě $x(0)$ a všech derivací až do $x^{(n-1)}(0)$

Cauchyho úloha

Úlohu lze přepsat ve vektorovém tvaru:

$$\vec{u}' = \begin{pmatrix} u_0'(t) \\ u_1'(t) \\ \vdots \\ u_{n-1}'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ f(t, u_0(t), \ldots, u_{n-1}(t)) \end{pmatrix} = \vec{F}(t, \vec{u}(t)).$$

Rungova-Kuttova metoda

Rungovy-Kuttovy metody pak mají také vektorový tvar:

$$\Delta\vec{u}(t,\tau) = p_1\vec{k}_1(t,\tau) + p_2\vec{k}_2(t,\tau) + \ldots p_n\vec{k}_n(t,\tau),$$

kde

$$\begin{aligned}
\vec{k}_1(t,\tau) &= \tau\vec{F}(t,\vec{u}(t)),\\
\vec{k}_2(t,\tau) &= \tau\vec{F}(t+\alpha_2\tau,\vec{u}(t)+\beta_{21}\vec{k}_1(t,\tau),\\
\vec{k}_3(t,\tau) &= \tau\vec{F}(t+\alpha_3\tau,\vec{u}(t)+\beta_{31}\vec{k}_1(t,\tau)+\beta_{32}\vec{k}_2(t,\tau),\\
&\vdots\\
\vec{k}_n(t,\tau) &= \tau\vec{F}(t+\alpha_n\tau,\vec{u}(t)+\beta_{n1}\vec{k}_1(t,\tau)+\beta_{n2}\vec{k}_2(t,\tau)+\ldots+\beta_{n,n-1}\vec{k}_{n-1}(t,\tau))
\end{aligned}$$