Tomáš Oberhuber

Faculty of Nuclear Sciences and Physical Engineering
Czech Technical University in Prague

Transportní rovnice

Jde o rovnici tvauru

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(\vec{x},t)}{\partial t} + \alpha \frac{\partial u(\vec{x},t)}{\partial x} &= 0 \text{ na } \mathbb{R}, \\ u(\vec{x},0) &= u_{ini}(\vec{x}) \text{ na } \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Přímým proderivováním lze ukázat, že řešením je funkce

$$u(x,t) = u_{ini}(x - \alpha t).$$

Je totiž:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(\vec{x},t)}{\partial t} &= -\alpha u'_{ini}(x - \alpha t), \\ \frac{\partial u(\vec{x},t)}{\partial x} &= u'_{ini}(x - \alpha t).\end{aligned}$$

Transportní rovnice

- vztah
$$u(x,t) = u_{ini}(x - \alpha t)$$
lze aplikovat na libovolnou funkci u_{ini}, která vůbec nemusí být diferencovatelná.
- transportní rovnice ovšem diferencovatelnost svého řešení vyžaduje.
- v praxi bychom ale často potřebovali hledat právě i např. nespojitá řešení hyperbolických PDR
- tyto rovnice jsou např. základem pro simulace proudění
- např. rázové vlny vykazují nespojitosti
- numerické řešení hyperbolických PDR je proto velmi náročné

Transportní rovnice - konečné diference

Nejjednodušší diskretizace by mohla vypadat takto:

$$\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\tau} + \alpha \frac{u_{i+1}^k - u_{i-1}^k}{2h} = 0,$$

tj.

$$u_i^{k+1} = u_i^k - \alpha \frac{\tau}{2h} \left(u_{i+1}^k - u_{i-1}^k \right),$$

kde jsme derivaci podle x nahradili centrální diferencí. Příslušný řešič je implementován v souborech:

- `pde/TransportEquationProblem1D.h`
- `pde/TransportEquationProblem1D.cpp`
- `pde/transport-equation.cpp`

Example 1

Proveďte simulace s tímto schématem pro různé počíteční podmínky - spojité a nespojité.

Transportní rovnice - Lax-Friedrichs

Laxovo-Friedrichsovo schéma přidává stabilizační člen:

$$u_i^{k+1} = \frac{u_{i-1}^k + u_{i+1}^k}{2} - \alpha \frac{\tau}{2h} \left(u_{i+1}^k - u_{i-1}^k \right),$$

resp.

$$u_i^{k+1} = u_i^k + \frac{h^2}{2} \underbrace{\frac{u_{i-1}^k - 2u_i^k + u_{i+1}^k}{h^2}}_{\approx \partial^2 u / \partial^2 x} - \alpha \frac{\tau}{2h} \left(u_{i+1}^k - u_{i-1}^k \right),$$

Example 2

Proveďte simulace s tímto schématem pro různé počáteční podmínky - spojité a nespojité.

Transportní rovnice - Upwind

Schéma typu upwind používá dopřednou nebo zpětnou diferenci podle směru toku:

$$u_i^{k+1} = u_i^k - \alpha\tau \begin{cases} \frac{u_{i+1}^k - u_i^k}{h} & \text{pro } \alpha > 0 \\ \frac{u_i^k - u_{i-1}^k}{h} & \text{pro } \alpha \leq 0 \end{cases}$$

resp.

$$u_i^{k+1} = u_i^k - \tau\left(\alpha^+ \frac{u_{i+1}^k - u_i^k}{h} + \alpha^- \frac{u_i^k - u_{i-1}^k}{h}\right),$$

kde $\alpha^+ = \max(\alpha, 0)$ a $\alpha^- = \min(\alpha, 0)$.

Example 3

Proveďte simulace s tímto schématem pro různé počáteční podmínky - spojité a nespojité.