0.1 Schéma o zvýšené přesnosti pro samoadjungovanou úlohu

Budeme řešit následující úlohu:

$$
\begin{aligned}
-(p(x)y')' + q(x)y &= f(x) \quad \text{na } (a,b), && (1)\\
y(a) &= \gamma_1, && (2)\\
y(b) &= \gamma_2. && (3)
\end{aligned}
$$

Na tuto úlohu lze aplikovat metodu sítí:

$$
\begin{aligned}
\overline{\omega_h} &= \{a + j.h | j = 0, 1, \ldots, m\}\\
\omega_h &= \{a + j.h | j \in \widehat{m-1}\}
\end{aligned}
$$

Využijeme diferenční úlohu z přednášky:

$$-(pu_{\bar{x}})_x + qu = f \quad \text{na } \omega_h, \quad u_0 = \gamma_1, \quad u_1 = \gamma_2$$

Určíme chybu aproximace dif. operátoru ve tvaru $\psi = L_h(P_h y) - P_h(Ly)$. Nechť y je vhodná dostatečně hladká funkce na $< a, b >$. Pak píšeme:

$$\psi = -(p(P_h y)_{\bar{x}})_x + qP_h y - P_h(-(py')' + qy) = -(p(P_h y)_{\bar{x}})_x + P_h((py')')$$

Dále pokračujeme bodově:

$$
\begin{aligned}
\psi_j &= (py')'|_j - (p(P_h y)_{\bar{x}})_x|_j =\\
&= (py')'(a + jh) - \frac{1}{h}(p(P_h y)_{\bar{x}}|_{j+1} - p(P_h y)_{\bar{x}}|_j) =\\
&= (py')'(a + jh) - \frac{1}{h}\Big(\frac{p_{j+1}(y_{j+1} - y_j)}{h} - \frac{p_j(y_j - y_{j-1})}{h}\Big)
\end{aligned}
$$

!!! Z Taylorova rozvoje pro $py'(x + h)$ ukažte, že

$$(py')'(x) = \frac{py'(x + h) - py'(x)}{h} + O(h). \tag{4}$$

!!! Z Taylorova rozvoje pro $y(x \pm h)$ ukažte, že

$$
\begin{aligned}
y'(x) &= \frac{y(x) - y(x - h)}{h} + O(h), && (5)\\
y'(x + h) &= \frac{y(x + h) - y(x)}{h} + O(h). && (6)
\end{aligned}
$$

!!! Dále z Tyalorova rozvoje pro $(py'')(x + h)$ ukažte, že

$$(py'')(x + h) - (py'')(x) = h(py'')'(x) + O(h^2). \tag{7}$$

!!! A z rozvoje pro $(py')'$ ukažte, že

$$(py')'(x) = \frac{1}{h}\left(p(x+h)y'(x+h) - p(x)y'(x)\right) + O(h). \tag{8}$$

V rozvoji (8) nahraďte derivace $y'(x+h)$ a $y'(x)$ pomocí (5) a (6) s přesností $O(h^2)$ tak, že získáte výraz obsahující členy $(py'')(x+h)$ a $(py'')(x)$. Na ty použijete rozvoj (7).

Z toho plyne, že $\psi_j \sim O(h)$, čili naším cílem bude zvýšit řád chyby aproximace dif. operátoru. Jak můžeme aproximovat výraz $-(py')' + qy = f^{(1)}$ přesněji? Musíme navrhnout schéma vyššího řádu přesnosti. To lze dvěma způsoby:

1. přesnější náhrada difer. rovnice:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{h}\Big(p_{i+\frac{1}{2}}\frac{u_{i+1}-u_i}{h} - p_{i-\frac{1}{2}}\frac{u_i-u_{i-1}}{h}\Big) + qu_i &= f_i, \quad i \in \widehat{m-1} \qquad (9)\\ p_{i\pm\frac{1}{2}} &= p\Big(a + \big(i \pm \frac{1}{2}\big)h\Big) \end{aligned}$$

Věta 1. *Schéma (9) pro rovnici v úloze (1) má chybu aproximace diferenciálního operátoru $O(h^2)$.*

Důkaz Napište si následující Taylorovy rozvoje 3. řádu se zbytkem (tj. zbytek obsahuje h^4):

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_{i+\frac{1}{2}} + \cdots && (10)\\ y_i &= y_{i+\frac{1}{2}} + \cdots && (11)\\ y_i &= y_{i-\frac{1}{2}} + \cdots && (12)\\ y_{i-1} &= y_{i-\frac{1}{2}} + \cdots && (13)\\ & && (14) \end{aligned}$$

Poznámka: y_i zde značí $y(a+ih)$, $y_{i+\frac{1}{2}} = y(a + (i+\frac{1}{2})h)$ apod.

Nyní s pomocí rozdílů (10)-(11) a (12)-(13) spočítáme následující:

$$\begin{aligned} p_{i+\frac{1}{2}}\frac{y_{i+1}-y_i}{h} &= (py')_{i+\frac{1}{2}} + \cdots && (15)\\ p_{i-\frac{1}{2}}\frac{y_i-y_{i-1}}{h} &= (py')_{i-\frac{1}{2}} + \cdots && (16) \end{aligned}$$

Ještě si připravíme jeden Taylorův rozvoj (do 2. řádu tj. zbytek obsahuje h^3):

$$\begin{aligned} (py')_{i\pm\frac{1}{2}} &= (py')_i \pm \frac{h}{2}(py')'_i + \frac{h^2}{8}(py')''_i + \qquad (17)\\ &+ \frac{h^3}{2^3.2!}\int_0^1 s^2 (py')^{(3)}(a + ih \pm \frac{(1-s)h}{2})ds \end{aligned}$$

Vezmeme variantu (17) s + a − a spočítáme rozdíl:

$$(py')_{i+\frac{1}{2}} - (py')_{i-\frac{1}{2}} \quad = \quad h(py')'_i + \cdots \tag{18}$$

Dále můžeme s využitím rozdílu (15) - (16) a vztahu (18) pokračovat následovně:

$$\frac{1}{h}(p_{i+\frac{1}{2}}\frac{y_{i+1}-y_i}{h} - p_{i-\frac{1}{2}}\frac{y_i - y_{i-1}}{h}) = \cdots$$

Během výpočtu získáme výraz $\frac{h}{24}((py')''_{i+\frac{1}{2}} - (py')''_{i-\frac{1}{2}})$, na který můžeme použít větu o střední hodnotě a z té získáme potřebné h.

QED

2. přesnější náhrada okrajové podmínky v bodě b:
   - řešení úlohy (1) je dáno na intervalu $< a, b >$ s podmínkou:

     $$p(b)y'(b) = \gamma_2$$

   - rozšíříme y za bod b lichým způsobem:

     $$y(x) - y(b) = y(b) - y(b - (x - b)) \quad x > b \tag{19}$$

   - pak lze využít centrální diferenci pro náhradu $y'(b)$:

     $$y'(b) = \frac{y(b+h) - y(b-h)}{2h} + O(h^2)$$

   - jelikož z (19) platí $y(b+h) = 2y(b) - y(b-h)$, tak dostáváme:

     $$\begin{aligned} y'(b) &= \frac{2y(b) - y(b-h) - y(b-h)}{2h} + O(h^2) = \\ &= \frac{y(b) - y(b-h)}{h} + O(h^2) \end{aligned}$$

   - díky lichému prodloužení může být jednostranná diference na kraji intervalu $< a, b >$ považována za náhradu o přesností $O(h^2)$