Tomáš Oberhuber

Faculty of Nuclear Sciences and Physical Engineering
Czech Technical University in Prague

Video na Youtube

Turnpike Problem

Remark 1

Budeme řešit úlohu zvanou Turnpike problem – úloha sjezdů z dálnice.
Pokud známe vzdálenosti mezi všemi dvojicemi sjezdů z dálnice, zrekonstruujme "mapu" sjezdů.

Turnpike Problem

Definition 2

Multimnožina (multiset) je množina, která umožňuje, aby se její prvky opakovaly.

Example 3

$$X = \{2, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 6, 6\}$$

Turnpike Problem

Definition 4

Je-li $X = \{x_1 = 0, x_2, \dots, x_n\}$ množina bodů na přímce seřazených vzestupně, pak ΔX značí multimnožinu vzdáleností mezi všemi $\left(\begin{array}{c} n \\ 2 \end{array} \right)$ dvojicemi bodů tj.

$$\Delta X = \left\{ x_j - x_i \mid x_i, x_j \in X \wedge 1 \leq i < j \leq n \right\}$$

Příklad:

$X = \{0, 2, 4, 7, 10\} \Rightarrow \Delta X = \{2, 2, 3, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$

Turnpike Problem

Úloha nemusí mít jednoznačné řešení.

- opusťme na chvíli předpoklad $x_1 = 0$
- definujme

$$A \oplus \{v\} \equiv \{a + v \mid a \in A\},$$

$$A \ominus \{v\} \equiv \{a - v \mid a \in A\},$$

$$-A = \{-a \mid a \in A\},$$

- pak platí

$$\Delta A = \Delta(A \oplus \{v\}) = \Delta(-A).$$

Definition 5

Řekneme, že množiny A a B jsou homometrické, pokud platí $\Delta A = \Delta B$.

Turnpike Problem

Theorem 6

Nechť U a V je množina čísel. Pak platí, že $U \oplus V$ a $U \ominus V$ jsou homometrické.

Proof.

Buď $d \in \Delta(U \oplus V)$. Pak $d = x_1 - x_2$, kde $x_1 \in U \oplus V$ a $x_2 \in U \oplus V$ a $x_1 \neq x_2$. Potom musí platit $x_1 = u_1 + v_1$ a $x_2 = u_2 + v_2$. Tedy platí
$x_1 - x_2 = (u_1 + v_1) - (u_2 + v_2) = (u_1 - v_2) - (u_2 - v_1) = y_1 - y_2$, kde $y_1 \neq y_2$, $y_1, y_2 \in U \ominus V$ a tudíž $y_1 - y_2 \in \Delta(U \ominus V)$. Opačná implikace se dokáže stejně. $\square$

Turnpike Problem

Remark 7

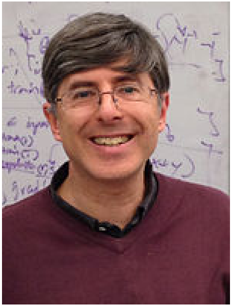
Buď $U = \{6, 7, 9\}$, $V = \{-6, 2, 6\}$. *Pak*

$$U \oplus V = \{0, 1, 3, 8, 9, 11, 12, 13, 15\}$$

$$U \ominus V = \{0, 1, 3, 4, 5, 7, 12, 13, 15\}$$

a podle předchozí věty jsou tyto množiny homometrické.

Turnpike Problem - backtracking



- Steven Skiena, 1990 – odvodil backtrackingový algoritmus pro úlohu *Turnpike Problem*

Turnpike Problem - backtracking

- označíme $L = \Delta X$
- vybereme největší prvek z L,

$$M = \max_{x \in L} x$$

- zavedeme interval $[0, M]$ (víme, že $x_1 = 0 \in X$)

Turnpike Problem - backtracking

- algoritmus funguje tak, že v každém kroku vybereme největší prvek z L,

$$m = \max_{x \in L} x$$

- ten musí udávat vzdálenost nějakého bodu x od 0 nebo od M, tj.

$$x = m \text{ nebo } x = M - m$$

  - pokud by to byla vzdálenost od jiného bodu y, pak by y muselo mít od 0 nebo M vzdálenost větší než m
- která z těchto dvou možností to je, to zkoušíme právě backtrackingem

Turnpike Problem - backtracking

Example 8

- $L = \{2, 2, 3, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$
- $|L| = n(n-1)/2 = 10 \Rightarrow n = 5$
- $X = \{0, x_2, x_3, x_4, x_5\}$
- $M = \max_{x \in L} = 10$
- $X = \{0, x_2, x_3, x_4, 10\}$
- $L = \{2, 2, 3, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
- $m = \max_{x \in L} = 8$
- buď je $x_2 = 10 - 8 = 2$ nebo $x_4 = 8 - 0 = 8$
- ....

Turnpike Problem - backtracking

procedure PARTIALDIGEST(L)

$M := \max_{x \in L} x$

odeber M z množiny L

$X := \{0, M\}$

vlož(L, X)

end procedure

Turnpike Problem - backtracking

procedure VLOŽ(L, X)
  if L je prázdná **then**
    vypiš výsledek X
    return
  end if
  $y := \max_{x \in L} x$
  if $\Delta(y, X) \subset L$ **then**
    přidej y do X
    odstraň $\Delta(y, X)$ z L
    vlož(L, X)
    odstraň y z X a vrať $\Delta(y, X)$ do L
  end if
  if $\Delta(M - y, X) \subset L$ **then**
    přidej $M - y$ do X
    odstraň $\Delta(M - y, X)$ z L
    vlož(L, X)
    odstraň $M - y$ z X a vrať $\Delta(M - y, X)$ do L
  end if
end procedure

Turnpike Problem - backtracking

- algoritmus vypíše všechna možná řešení
- jaká je složitost algoritmu?
- označíme jako $T(n)$ složitost procedury vlož při $|X| = n$
- na reálných úlohách se většinou prochází jen jedna větev backtrackingu
  - pak je složitost $T(n) = T(n-1) + O(n)$ kvadratická
- lze sestrojit příklad, kdy se vždy procházejí obě větve
  - pak je složitost $T(n) = 2T(n-1) + O(n)$ exponenciální

Turnpike Problem - backtracking

- Daurat A., Gérard Y., Nivat M., *The chord's problem*, Theoretical Computer Science, 282(2), 2002, pp. 319–336.
- autoři vyřešili stejnou úlohu pro body v R^n pomocí polynomiálního algoritmu