

STŘEDOŠKOLSKÁ ODBORNÁ ČINNOST

OBOR 01

Vícerozměrná Mandelbrotova množina

VYPRACOVAL:
Stanislav Basovník, oktáva A

2005

Gymnázium Kroměříž

Masarykovo náměstí 496, 767 01 Kroměříž

Vysázeno systémem $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ - $\text{\texttt{TeX}}$

Obsah

1. Úvod	4
1.1. Úvod	4
1.2. Poděkování	4
1.3. Značení	4
2. Matematický základ	5
2.1. Iterační předpis	5
2.2. Komplexní čísla	5
2.3. Kvaterniony	5
2.3.1. Definice	5
2.3.2. Vlastnosti	6
2.3.3. Pojmy související s kvaterniony	6
2.3.4. Historie	7
2.4. Euklidovský n -rozměrný metrický prostor	7
2.5. Další použité pojmy	8
2.5.1. Definice	8
3. Úvod do problematiky	10
3.1. Co je to fraktální množina	10
3.2. Juliovy množiny	10
3.2.1. Definice Juliovy množiny	10
3.2.2. Aproximace Juliovy množiny	11
3.3. Mandelbrotova množina	13
3.3.1. Definice Mandelbrotovy množiny	13
3.3.2. Aproximace Mandelbrotovy množiny	15
3.3.3. Vlastnosti Mandelbrotovy množiny	16
4. Zobecnění Mandelbrotovy množiny	19
4.1. Zobecnění definice Mandelbrotovy množiny	19
4.1.1. Zavedení speciálního značení	19
4.1.2. Definice Mandelbrotovy množiny v n -rozměrném prostoru	19
4.1.3. Aproximace vícerozměrné Mandelbrotovy množiny	20
5. Vlastnosti zobecněné Mandelbrotovy	22
5.1. Vztah mezi množinami o různých dimenzích	22

5.2. Symetrie množiny	22
5.2.1. Důkaz symetrie	22
5.2.2. Využití symetrie	25
5.3. Hausdorffova dimenze povrchu Mandelbrotovy množiny	27
6. Program HyperChaos	29
6.1. Popis programu	29
6.2. Metoda zobrazení řezu	30
7. Příloha	32
7.1. Odvození vzorců pro n -D kouli	32
7.2. Obrazová příloha	37
7.2.1. Ukázky Mandelbrotovy množiny v komplexní rovině	37
7.2.2. Juliovy množiny ve vícerozměrném prostoru	38
8. Závěr	39
8.1. Závěr	39
9. Zdroj	40
9.1. Seznam literatury	40
9.2. Seznam adres na internetu	40

1. Úvod

1.1. Úvod

Ve své práci jsem se zabýval nejznámějším fraktálem, kterým je Mandelbrotova množina. Tato množina již byla popsána ve dvou a čtyřrozměrném prostoru. Mým cílem bylo zobecnit tuto množinu do n -rozměrného prostoru i se všemi jejími vlastnostmi. Zkoumal jsem společné vlastnosti dvou a čtyřrozměrné množiny a tyto vlastnosti pak hledal na zobecněné množině, čímž jsem ověřil správnost postupu při rozšíření do n -rozměrného prostoru.

Sestavil jsem také program, který zobrazuje řezy n -rozměrnou množinou a umožňuje tak lépe pohlédnout do této krásné oblasti matematiky, kterou je teorie chaosu a fraktální množiny.

K pochopení této práce stačí čtenáři znalosti ze středoškolské matematiky. Snažil jsem se především ukázat krásu matematiky a zároveň vnést do této problematiky nový rozměr tak, aby byla pochopitelná i pro laika.

1.2. Poděkování

Chtěl bych poděkovat hlavně doktoru Michalu Benešovi z Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze za cenné rady a za pomoc při hledání užitečných zdrojů informací k mojí práci.

Dále bych chtěl poděkovat Lukáši Maršálkovi, studentu Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze, který mi pomohl vyřešit některé problémy s grafikou při psaní programu na zobrazování fraktálních množin.

1.3. Značení

Před každou citací je uvedeno číslo v hranatých závorkách, které odpovídá číslu v seznamu použité literatury, a číslo strany. Celý citát je navíc uzavřen z obou stran uvozovkami a je psán *kurzívou*.

U důležitějších vztahů, na něž se bude v následujícím textu odkazovat, je vpravo v závorce uvedeno číslo, kterým se nadále vztah nahrazuje v odkazech (např. „Vyplývá ze vztahu (10).“).

V práci je použito běžné symboliky matematické literatury (viz. [1]). Pro složitější struktury bylo zaváděno speciální značení, na které bude včas upozorněno v textu při jejich zavedení.

2. Matematický základ

2.1. Iterační předpis

Pojem *iterační předpis* budeme v dalším textu používat velmi často. Pomocí iteračního předpisu a počátečních podmínek dokážeme jednoznačně určit posloupnost prvků (čísel, vektorů, funkcí atd.). Umožňuje nám totiž vypočítat libovolný prvek posloupnosti pomocí předchozích prvků. Obecně můžeme iterační předpis zapsat takto: $x_{n+1} = f(x_{k_1}, x_{k_2}, \dots)$, kde $k_1, k_2, \dots < n + 1$

Pro rovnice, které budeme používat dále, nám stačí méně obecný tvar: $x_{n+1} = f(x_n)$, který můžeme zjednodušeně zapisovat takto: $x \rightarrow f(x)$.

2.2. Komplexní čísla

Obor komplexních čísel zde nebudeme příliš rozebírat a shrneme si jen nejdůležitější pojmy, které byly použity v této práci. Další vlastnosti a definice si čtenář může vyhledat např. v [1].

Všechna komplexní čísla budeme zapisovat ve tvaru $z = a + bi$.

Definice 1. *Reálná a imaginární část*

Reálná část čísla $z = a + bi$ je číslo $\operatorname{Re} z = a$.

Imaginární část čísla $z = a + bi$ je číslo $\operatorname{Im} z = bi$.

Definice 2. *Komplexně sdružená čísla*

Komplexně sdružené číslo $\bar{z}$ k číslu $z = a + bi$ je definováno jako $\bar{z} = \operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z = a - bi$.

Definice 3. *Absolutní hodnota*

Absolutní hodnota $|z|$ čísla z je definován jako $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

2.3. Kvaterniony

V částech 2.3.1., 2.3.2. a 2.3.4. bylo čerpáno z článku na internetové adrese [i1].

2.3.1. Definice

Zatímco komplexní čísla získáme přidáním imaginární jednotky i , která splňuje rov-

nici $i^2 = -1$, k reálným číslům, kvaterniony získáme přidáním imaginárních jednotek i , j , a k k reálným číslům. Tyto imaginární jednotky splňují následující vztah:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \quad (1)$$

Každý kvaternion je lineární kombinací jednotkových kvaternionů 1 , i , j a k , tj. každý kvaternion je jednoznačně vyjádřen ve tvaru $a + bi + cj + dk$.

Násobení kvaternionů je dáno multiplikativní tabulkou pro jednotky kvaternionů:

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

POZNÁMKA: Z tabulky vidíme, že kvaterniony lze psát i ve tvaru $a + bi + (c + di)j$.

2.3.2. Vlastnosti

Při sčítání a odčítání kvaternionů platí všechna pravidla jako u komplexních čísel. Při násobení splňují kvaterniony asociativní zákon a každý nenulový prvek má právě jeden prvek inverzní. Na rozdíl od komplexních čísel je násobení kvaternionů nekomutativní. Např.: $ij = k$, $ji = -k$ atd.

Kvaterniony, společně s komplexními a reálnými čísly, jsou jediná konečněrozměrná tělesa nad tělesem reálných čísel. Všechna tato tělesa až na kvaterniony jsou navíc komutativní.

Nekomutativita kvaternionů při násobení má neočekávané důsledky. Např. polynomiální rovnice v oboru kvaternionů mohou mít úplně jiné řešení, než by se dalo odhadovat ze stupně polynomu. Např. rovnice $z^2 + 1 = 0$ má nekonečně mnoho řešení $z = bi + cj + dk$, kde $b^2 + c^2 + d^2 = 1$.

2.3.3. Pojmy související s kvaterniony

Definice 4. *Reálná a imaginární část*

Reálná část čísla $z = a + bi + cj + dk$ je číslo $\operatorname{Re} z = a$.

Imaginární část čísla $z = a + bi + cj + dk$ je číslo $\operatorname{Im} z = bi + cj + dk$.

Definice 5. *Sdružený kvaternion*

Sdružený kvaternion $\bar{z}$ ke kvaternionu $z = a + bi + cj + dk$ je definován jako $\bar{z} = \operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z = a - bi - cj - dk$.

Definice 6. *Absolutní hodnota*

Absolutní hodnota $|z|$ čísla z je definován jako $|z| = \sqrt{z \times \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$.

2.3.4. Historie

Kvaterniony objevil William Rowan Hamilton z Irska v roce 1843. Hamilton hledal způsob, jak rozšířit komplexní čísla (která mohou být znázorněna jako body roviny) do vícerozměrného prostoru. Nedokázal sice najít zobecnění do třírozměrného prostoru, ale zavedl místo toho kvaterniony, které lze zobrazit ve čtyřrozměrném prostoru. Podle příběhu, který sám vyprávěl, byl jednoho dne na procházce se svou ženou, když ho najednou napadlo řešení ve tvaru rovnice $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$. Okamžitě tuto rovnici vyryl do blízkého Broughamského mostu (nyní Broom Bridge) v Dublinu.

Hamilton popularizoval kvaterniony v několika knihách. Poslední z nich, *Elements of Quaternions*, měla 800 stran a byla vydána krátce po jeho smrti.

V dnešní době mají kvaterniony použití v počítačové grafice, při zpracování signálu, řízení polohy a v orbitální mechanice, hlavně pro reprezentaci rotací a směrů v třírozměrném prostoru. Např. autopilot kosmické lodi je běžně řízen kvaterniony, které jsou zároveň použity v dálkových měřicích přístrojích aktuální polohy. Kombinace mnoha kvaternionových transformací jsou totiž numericky výhodnější než maticové transformace.

2.4. Euklidovský n -rozměrný metrický prostor

Definice 7. *n -rozměrný prostor* [3] (str. 602):

- „1. Bodem P v rovině rozumíme uspořádanou dvojici reálných čísel x, y , kterou značíme $[x, y]$; píšeme pak $P = [x, y]$. Přitom zřejmě je $[x, y] \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
2. Bodem X v n -rozměrném prostoru rozumíme upořádanou n -tici reálných čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$, kterou značíme $[x_1, x_2, \dots, x_n]$; píšeme pak $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$. Přitom je $X \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$.
3. Množinu $\mathbb{R}^n$ všech bodů $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ nazýváme n -rozměrným prostorem.”

Definice 8. *Metrický prostor* [2] (str. 302)

„Množinu M nazýváme metrickým prostorem X , jestliže pro každou dvojici jejích prvků

u, v je definována tzv. vzdálenost $d(u, v)$, splňující následující požadavky:

$$\begin{aligned} d(u, v) &\geq 0, \quad \text{přičemž} \quad d(u, v) = 0 \quad \text{tehdy a jen tehdy, je-li} \quad u = v \\ d(u, v) &= d(v, u) \\ d(u, z) &\leq d(u, v) + d(v, z) \quad \text{pro všechna } u, v, z \in M. \end{aligned}$$

Říkáme také, že na množině M (v množině M) je dána metrika d . Místo o prvcích mluvíme často o bodech množiny M , resp. prostoru M .

Definice 9. Euklidovský n -rozměrný metrický prostor

Euklidovský n -rozměrný metrický prostor E_n je speciální případ n -rozměrného metrického prostoru, kdy vzdálenost $d(X, Y)$ mezi každými dvěma body $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ a $Y = [y_1, y_2, \dots, y_n]$ je definována vztahem

$$d(X, Y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2} \geq 0 \quad (2)$$

Pokaždé, když budeme mluvit o n -rozměrném nebo vícerozměrném prostoru, bude tím myslet právě Euklidovský n -rozměrný metrický prostor.

2.5. Další použité pojmy

2.5.1. Definice

V této části uvedu definice některých pojmů, které pro nás budou důležité v dalším textu.

Definice 10. Topologická dimenze (převzato z [4], str. 79–81)

Prázdná množina má dimenzi -1 . Lze-li dvě uzavřené disjunktní podmnožiny X oddělit prázdnou množinou, pak $\dim X \leq 0$. Lze-li dvě uzavřené disjunktní podmnožiny X oddělit množinou L a $\dim L \leq k - 1$, pak $\dim X \leq k$. Množina X má topologickou dimenzi k , právě když $\dim X \leq k$ a zároveň není pravda, že $\dim X \leq k - 1$.

Definice 11. Průměr objektu (převzato z [6], str. 7)

Průměr objektu A je $|A| = \sup\{|x - y| \mid x, y \in A\}$.

Definice 12. Hausdorffova vnější míra a Hausdorffova dimenze (převzato z [5], str. 147–149)

Tzv. Hausdorffova vnější míra $M \subset X$ se definuje pro libovolné $s > 0$ jako

$$H^s(M) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_\varepsilon^s(M) \quad (3)$$

kde $H_\varepsilon^s(M) = \inf\{\sum_j |A_j|^s \mid |A_j| \leq \varepsilon, \bigcup_j A_j \supset M\}$, $\{A_j\}$ je spočetné pokrytí M a $\varepsilon > 0$. Hausdorffova vnější míra borelovské množiny pak pro jediné s_0 mění svou hodnotu z nekonečna na nulu. Takové s_0 se nazývá *Hausdorffova dimenze* M .

3. Úvod do problematiky

3.1. Co je to fraktální množina

Definice fraktální množiny, neboli fraktálu, dosud není vhodně zformulována. Zatím existují pouze pokusy o definici, ale u každého z nich se podařilo najít případ, kdy definice selhala. Většina matematiků považuje za nejpřesnější tuto definici:

Pokus o definici. *Fraktální množina*

Fraktální množiny jsou takové množiny, jejichž Hausdorffova dimenze je větší než topologická dimenze.

Juliova a Mandelbrotova množina, o kterých budeme mluvit dále, této definici vyhovují, ale existují množiny s vlastnostmi fraktálů, které podle této definice fraktály nejsou.

Pro jednoduchou představu nám bude stačit, když si popíšeme některé základní vlastnosti fraktálů. Na první pohled můžeme o fraktální množině říci, že je to velice složitý útvar s neomezeným množstvím detailů. Tyto útvary ale nejsou úplně náhodné. Fraktální množiny mají řád. Jednou z hlavních vlastností je *soběpodobnost*. Množina M , která je *soběpodobná*, obsahuje podmnožinu (většinou ne jednu), která je po určité transformaci kopií množiny M .

Fraktály najdeme všude kolem sebe. V přírodě je jich spousta, například stromy, kapradiny, mraky, pobřeží, lidské plíce, počasí, ale i vývoj cen na burze, šum v síťových kabelech atd. Obecně můžeme o fraktálech říci, že jsou to velmi pěkné útvary. Nejspíš proto nám připadají tak krásné stromy, rostliny, hory nebo sněhové vločky.

3.2. Juliovy množiny

3.2.1. Definice Juliových množin

Juliovy množiny jsou určeny iterační rovnicí $z_{n+1} = z_n^2 + c$, kde z_0 je bod komplexní roviny a c je komplexní konstanta. Podle této iterační rovnice můžeme body roviny rozdělit do dvou množin: E_c , tzv. *úniková množina* a P_c , tzv. *setrvalá množina*. Formální definice vypadají takto:

Definice 13. *Úniková množina* pro parametr c

Do množiny E_c patří všechny body z_0 takové, že členy posloupnosti $z_{n+1} = z_n^2 + c$ v

absolutní hodnotě divergují k nekonečnu.

Definice 14. *Setrvalá množina* pro parametr c

Do množiny P_c patří všechny body z_0 takové, které nepatří do množiny E_c .

Po zavedení těchto pojmů můžeme přejít k definici *Juliových množin*:

Definice 15. *Juliovy množiny*

Juliova množina J_c s parametrem c je množina bodů tvořících hranici množiny E_c .

I když definice *Juliových množin* vypadá jednoduše, obrazy této množiny jsou až neuvěřitelně složité a zajímavé útvary.

POZNÁMKA: Definice 1–3 můžeme analogicky zavést i pro z a c v oboru kvaternionů.

3.2.2. Aproximace Juliových množin

Zobrazení Juliových množin a dalších fraktálů je možné s pomocí počítače. Budeme chtít na obrazovce monitoru, která nám reprezentuje rovinu komplexních čísel, zobrazit jednou barvou množinu E_c a jinou barvou množinu P_c tak, abychom si mohli prohlédnout rozhraní mezi těmito množinami, tj. *Juliovu množinu*. Pokud bychom chtěli dosáhnout přesného výsledku, museli bychom pro každý bod na obrazovce provést nekonečně mnoho iteračních kroků výpočtu. To je ale na počítači nemožné. Proto si musíme určit maximální počet iterací, čímž dosáhneme alespoň přibližných výsledků. K tomu, abychom pak mohli zařadit bod do správné množiny (E_c nebo P_c) použijeme následující větu:

Věta 1. *Mezní poloměr*

Nechť z je komplexní číslo větší nebo rovno c a zároveň větší než 2 v absolutní hodnotě. Pak z náleží do únikové množiny E_c pro iterační rovnici $z \rightarrow z^2 + c$.

Důkaz

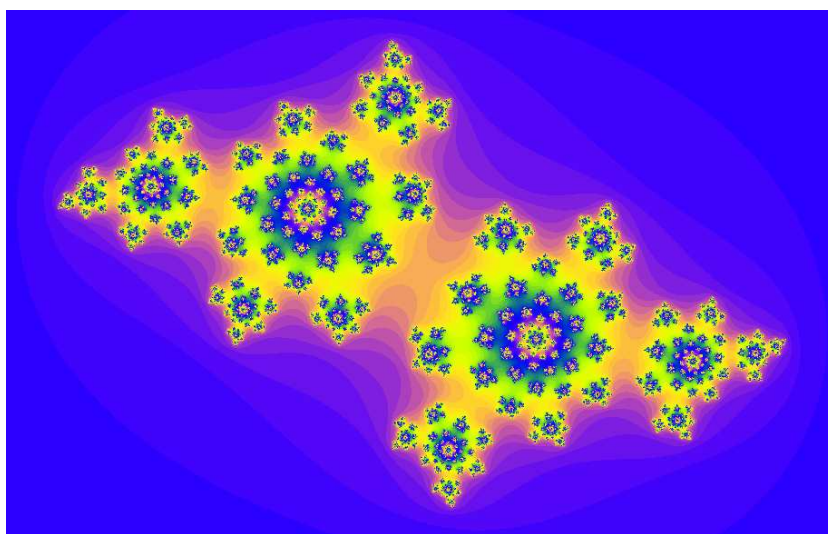
Platí: $|z| > 2$ a $|z| \geq |c|$. Pak existuje kladné reálné číslo h takové, že $|z| = 2 + h$. Odvodíme absolutní hodnotu následujícího členu posloupnosti $|z^2 + c|$:

$$\begin{aligned}
|z^2 + c| &\geq |z^2| - |c| \quad \dots \text{trojúhelníková nerovnost} \\
&= |z|^2 - |c| \\
&\geq |z|^2 - |z| \\
&= (2 + h)^2 - (2 + h) = 2 + 3h + h^2 = (2 + h) + (2h + h^2) \\
&= |z| + (2h + h^2)
\end{aligned}$$

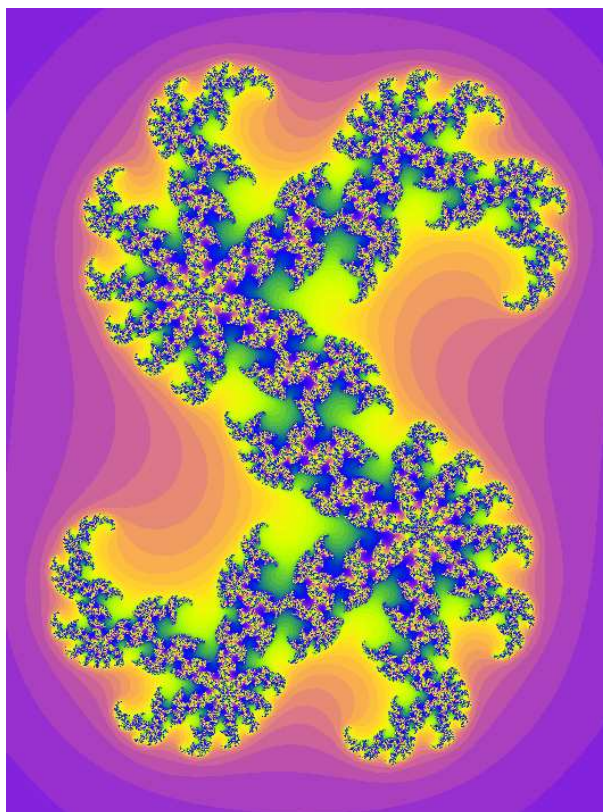
Vidíme, že posloupnost je rostoucí a navíc roste i rozdíl dvou sousedních členů. Z toho plyne, že posloupnost $z \rightarrow z^2 + c$ je pro $|z| > 2$ a $|z| \geq |c|$ divergentní, tj. bod z patří do únikové množiny E_c .

S pomocí této věty již dokážeme sestavit algoritmus pro aproximaci Juliových množin. Během každého kroku budeme testovat, zda-li absolutní hodnota čísla z nepřesáhla hodnotu 2. Pokud se tak stane, můžeme výpočet ihned ukončit a prohlásit, že tento bod leží v množině E_c . Pokud po skončení poslední iterace absolutní hodnota čísla z nepřesáhla hodnotu 2, je šance, že tento bod patří do množiny P_c nebo je aspoň blízko ní. Čím větší budeme mít maximální počet iterací, tím přesnější bude výpočet a uvidíme více detailů na rozhraní množin E_c a P_c .

Množina E_c je pro nás zajímavá tím, že do této množiny zařazujeme pouze ty body, o kterých jsme si opravdu jistí, že do této množiny patří. U každého takového bodu tedy víme, po kolika krocích absolutní hodnota čísla z přesáhla hodnotu 2, čímž zároveň výpočet tohoto bodu skončil. Tyto body můžeme obarvit podle počtu potřebných iterací. Výsledné obrázky jsou fascinující:



Obr. 1. Juliova množina, $c = -0,6 - 0,5i$



Obr. 2. Juliova množina, $c = 0,37 + i$

3.3. Mandelbrotova množina

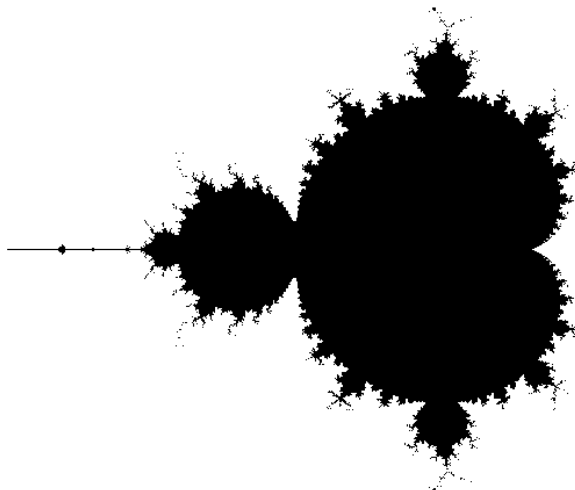
3.3.1. Definice Mandelbrotovy množiny

Mandelbrotova množina je nejznámějším fraktálem ze všech. Benoit Mandelbrot provedl v roce 1979 pozoruhodný experiment, jehož výsledkem byly obrázky, které obletěly celý svět. Mandelbrot studoval matematické veledílo [9], str. 47–245, jehož autory jsou Gaston Julia a Pierre Fatou. V tomto díle se objevuje strukturální dvoudílnost, která uvádí, že pro libovolnou volbu konstanty c je Juliova množina J_c a zároveň množina P_c buďto *souvislá* nebo *totálně nesouvislá*. Kolem roku 1979 měl Mandelbrot nápad, jak tuto dvoudílnost zobrazit se všemi parametry c , ležících v rovině komplexních čísel. Tato myšlenka vedla přímo k definici *Mandelbrotovy množiny*:

Definice 16. *Mandelbrotova množina*

Do *Mandelbrotovy množiny* M patří všechny komplexní parametry c , pro které je Juliova množina J_c souvislá.

Mandelbrot obarvil jednotlivé body roviny čísel c bílou nebo černou barvou podle toho, jestli byla příslušná Juliova množina souvislá nebo nesouvislá. Výsledkem byl černo-bílý obrázek podobný tomuto (v roce 1979 s tehdejšími možnostmi grafického zobrazení to nebylo příliš kvalitní):



Obr. 3. Mandelbrotova množina

Při výpočtu bychom ale narazili na problém, jak pomocí počítače rozhodnout, zda-li parametr c patří do Mandelbrotovy množiny nebo ne, tj. určit, zda-li je příslušná Juliova množina souvislá nebo nesouvislá. Když Mandelbrot prováděl svůj experiment, byl jedním z mála lidí, kteří znali podrobně práci Julia a Fatoua. Především si byl vědom tvrzení o úzkém vztahu mezi dvoudílností Juliových množin a bodem $0 + 0i$:

Tvrzení. Množina J_c je souvislá tehdy a jen tehdy, pokud posloupnost $z_{n+1} = z_n^2 + c$, kde $z_0 = 0 + 0i$, je omezená.

Jinými slovy, množina J_c (a zároveň i množina P_c) je souvislá tehdy a jen tehdy, pokud $(0 + 0i) \in P_c$. Z tohoto tvrzení plyne věta:

Věta 2. *Mandelbrotova množina*

Do *Mandelbrotovy množiny* patří všechny body c , pro které je posloupnost $z_{n+1} = z_n^2 + c$, kde $z_0 = c$, omezená.

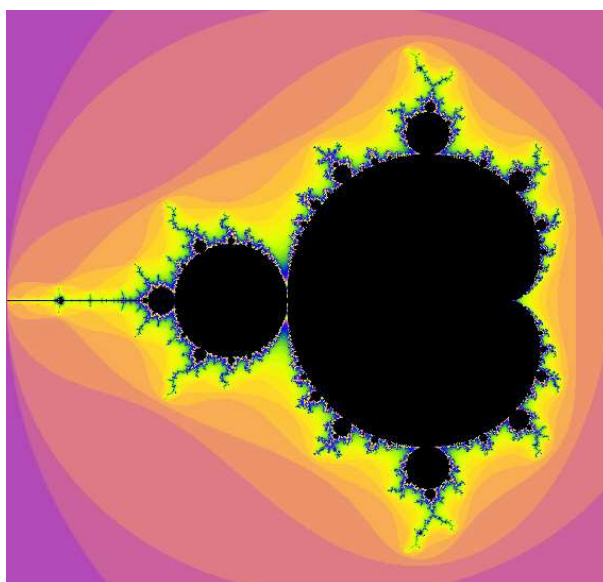
Tato věta popisuje důležitou vlastnost Mandelbrotovy množiny a dá se dokázat, že je ekvivalentní s definicí 16., tzn., že z definice 16. odvodíme větu 2. a naopak. Tuto větu navíc Mandelbrot použil jako definici množiny M ve svých experimentech roku 1979.

Při zobecňování Mandelbrotovy množiny proto také použijeme tuto větu jako alternativní definici.

POZNÁMKA: Mandelbrotova množina v oboru kvaternionů splňuje analogickou vlastnost z věty 1.

3.3.2. Aproximace Mandelbrotovy množiny

Pomocí alternativní definice jsme schopni sestavit algoritmus pro aproximaci Mandelbrotovy množiny. Tento algoritmus bude podobný algoritmu pro aproximaci Juliových množin — viz. 3.2.2. Jediný rozdíl bude v tom, že parametr c bude pro každý bod jiný. Jako parametr c použijeme souřadnici právě počítaného bodu. Počáteční podmínka z_0 bude stejná jako při výpočtu Juliových množin.



Obr. 4. Mandelbrotova množina

3.3.3. Vlastnosti Mandelbrotovy množiny

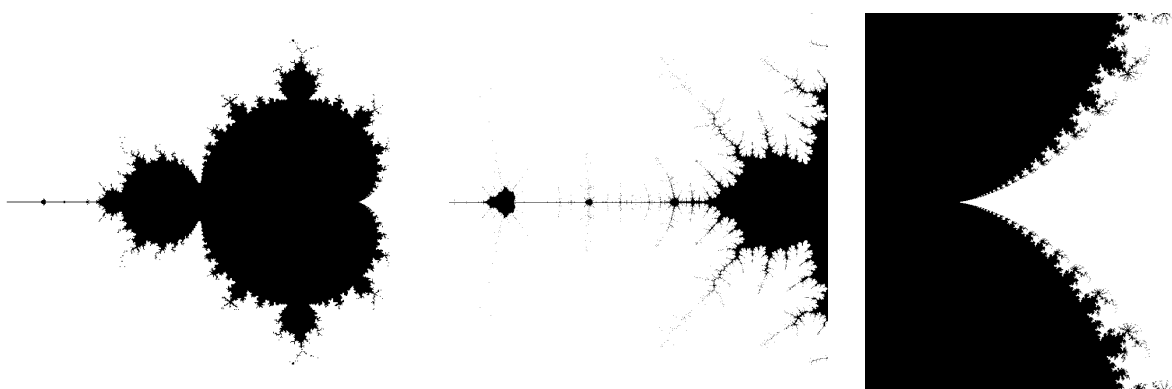
Vztah mezi Mandelbrotovými množinami v komplexních číslech a v kvaternionech

Při výpočtu Mandelbrotovy množiny v oboru kvaternionů dosazujeme do iterační rovnice $z \rightarrow z^2 + c$ kvaterniony ve tvaru $a + bi + cj + dk$, čímž dostaneme čtyřrozměrnou Mandelbrotovu množinu. Dvourozměrný řez této množiny, který získáme položením $c = d = 0$, je Mandelbrotova množina v oboru komplexních čísel. Dosáhli jsme toho tím, že do iterační rovnice $z \rightarrow z^2 + c$ jsme dosazovali kvaterniony ve tvaru $a + bi + 0j + 0k$, které jsou zároveň komplexními čísly. Čtyřrozměrná Mandelbrotova množina v oboru kvaternionů tedy obsahuje jako svůj řez dvourozměrnou Mandelbrotovu množinu v oboru komplexních čísel.

Pokud bychom dosazovali kvaterniony např. ve tvaru $a + 0i + cj + 0k$, dostaneme opět Mandelbrotovu množinu v oboru komplexních čísel, ale tentokrát se jedná o jiný řez čtyřrozměrné množiny. Čtyřrozměrná Mandelbrotova množina tedy obsahuje několik Mandelbrotových množin v oboru komplexních čísel jako svůj dvourozměrný řez. V části 5.2.1. dokážeme, že takových řezů je nekonečně mnoho.

Symetrie Mandelbrotovy množiny

Další zajímavou vlastností Mandelbrotovy množiny je její symetrie kolem reálné osy. I když to z definice 16. nebo z věty 2. přímo nevyplývá, je tato vlastnost dobře viditelná na množině v komplexní rovině:



Obr. 5. Mandelbrotova množina a její detaily

Tuto symetrii v komplexní rovině si rovnou dokážeme. Budeme chtít ukázat, že hodnoty $|z_n|$ v posloupnosti $z \rightarrow z^2 + c$ nezávisí na znaménku imaginární části počáteční

podmínky c . Z tohoto tvrzení pak plyne, že Mandelbrotova množina je symetrická podle reálné osy.

Do rovnice $z_{n+1} = z_n^2 + c$ dosadíme $z_k = a_k + b_k i$ a $c = a_0 + b_0 i$:

$$a_{n+1} = a_n^2 - b_n^2 + a_0$$

$$b_{n+1} = 2a_n b_n + b_0$$

Hodnota a_{n+1} je funkcí $f_1(a_n, |b_n|, a_0)$. Ve výrazu $b_{n+1} = 2a_n b_n + b_0$ budeme opakovaně dosazovat za b_k :

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= 2a_n b_n + b_0 = 2a_n(2a_{n-1}b_{n-1} + b_0) + b_0 = \\ &= 2a_n(2a_{n-1}(2a_{n-2}b_{n-2} + b_0) + b_0) + b_0 = \dots = \\ &= 2a_n(2a_{n-1}(2a_{n-2} \dots (2a_0 b_0 + b_0) + \dots + b_0) + b_0) + b_0 \end{aligned}$$

Odtud odvodíme, na čem závisí b_{n+1} . Vytkneme b_0 :

$$b_{n+1} = b_0(2a_n(2a_{n-1}(2a_{n-2} \dots (2a_0 + 1) + \dots + 1) + 1) + 1)$$

a pro absolutní hodnotu $|b_{n+1}|$ dostáváme

$$|b_{n+1}| = |b_0| \cdot |(2a_n(2a_{n-1} \dots + 1) + 1)|$$

Hodnota $|b_{n+1}|$ je tedy funkcí $f_2(a_0, a_1, \dots, a_n, |b_0|)$. Nyní můžeme odvodit, na čem závisí hodnota $|z_{n+1}|$. Spočítáme ji pomocí $|z_{n+1}| = \sqrt{a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2}$, z čehož můžeme usoudit, že $|z_{n+1}|$ závisí na těchto dvou výrazech:

$$a_{n+1} = f_1(a_n, |b_n|, a_0) \tag{4}$$

$$|b_{n+1}| = f_2(a_0, a_1, \dots, a_n, |b_0|) \tag{5}$$

Shrnutí: $|z_{n+1}| = f(a_0, a_1, \dots, a_n, |b_0|, |b_n|)$. Indukcí podle (4) a (5) zjistíme, že hodnota $|z_{n+1}|$ závisí pouze na n , a_0 a $|b_0|$, přičemž n a a_0 nezávisí na b_0 . Z tohoto faktu již plyne dokazovaná symetrie Mandelbrotovy množiny v komplexní rovině.

Hausdorffova dimenze okraje Mandelbrotovy množiny

Nejzajímavější na Mandelbrotově množině je Hausdorffova dimenze jejího okraje. Japonský matematik Mitsuhiro Shishikura roku 1994 dokázal, že Hausdorffova dimenze okraje Mandelbrotovy množiny je přesně 2. Celý důkaz může čtenář nalézt na internetové adrese [i2].

Okraj Mandelbrotovy množiny leží v rovině, proto jeho Hausdorffova dimenze může být maximálně 2. Přesný důkaz tohoto tvrzení si čtenář může najít v [8] – str. 104.

Pro jednodušší představu nám bude stačit, když si uvědomíme, že při měření Hausdorffovy dimenze okraje Mandelbrotovy množiny měříme dimenzi podmnožiny roviny, jejíž topologická a zároveň i Hausdorffova dimenze je 2 (rovina není fraktál).

Pokud shrneme všechny poznatky popsané výše, tak zjistíme, že rozdíl mezi Hausdorffovou a topologickou dimenzí je maximální možný, tedy 1. Z toho plyne, že Mandelbrotova množina je hodně složitá.

4. Zobecnění Mandelbrotovy množiny

4.1. Zobecnění definice Mandelbrotovy množiny

4.1.1. Zavedení speciálního značení

Jak už bylo použito v předchozím textu, M_n bude značit n -rozměrnou Mandelbrotovu množinu.

Budeme používat iterační rovnici, ve které se vyskytnou funkce n -rozměrných vektorů. Tyto vektory budou reprezentovat body v n -rozměrném prostoru. Vektory budeme značit tučným písmenem. Jednotlivé složky vektoru budeme značit stejným písmenem, jako jsme označili vektor, a budeme je rozlišovat indexem vpravo dole. Např. $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Vektory v posloupnosti určené iterační rovnicí budeme rozlišovat pomocí indexu vpravo nahoře. Abychom tyto indexy rozeznali od exponentů mocnin, budeme indexy dávat do kulaté závorky. Např. $\mathbf{a}^{(k)} = (a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \dots, a_n^{(k)})$.

n -rozměrný prostor, se kterým budeme pracovat dále, bude mít jeden rozměr význačný. Odpovídající složkou vektoru pro tento význačný rozměr bude prvek a_1 . Budeme jej zobecněně nazývat reálnou částí vektoru $\mathbf{a}$. Značení: $\text{Re } \mathbf{a} = a_1$. Ostatní složky budeme nazývat imaginární částí vektoru $\mathbf{a}$. Značení: $\text{Im } \mathbf{a} = (a_2, a_3, \dots, a_n)$. Toto označení zavádíme podle analogických pojmů u komplexních čísel.

Velikost, nebo také absolutní hodnota, vektoru $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ bude skalár, který spočítáme pomocí $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$. Budeme ji značit $|\mathbf{a}|$.

4.1.2. Definice Mandelbrotovy množiny v n -rozměrném prostoru

Definice 17. n -rozměrná Mandelbrotova množina

Máme posloupnost $(|\mathbf{z}^{(0)}|, |\mathbf{z}^{(1)}|, |\mathbf{z}^{(2)}|, \dots)$, která je dána vztahy:

$$\begin{aligned} z_1^{(m+1)} &= \left(z_1^{(m)}\right)^2 - \left(z_2^{(m)}\right)^2 - \left(z_3^{(m)}\right)^2 - \dots - \left(z_n^{(m)}\right)^2 + z_1^{(0)} \\ z_2^{(m+1)} &= 2z_1^{(m)}z_2^{(m)} + z_2^{(0)} \\ z_3^{(m+1)} &= 2z_1^{(m)}z_3^{(m)} + z_3^{(0)} \\ &\vdots \\ z_n^{(m+1)} &= 2z_1^{(m)}z_n^{(m)} + z_n^{(0)} \end{aligned} \tag{6}$$

kde $\mathbf{z}^{(0)} = c$ a $\mathbf{z}^{(k)} = (z_1^{(k)}, z_2^{(k)}, \dots, z_n^{(k)})$. Do n -rozměrné Mandelbrotovy množiny M_n patří všechny takové body c n -rozměrného prostoru, pro které je posloupnost $(|\mathbf{z}^{(0)}|, |\mathbf{z}^{(1)}|, |\mathbf{z}^{(2)}|, \dots)$ omezená.

Iterační rovnice z definice 17. zobecňuje iterační rovnici pro komplexní čísla a kvaterniony z věty 2.:

Pro komplexní čísla:

$$(z_1, z_2) \rightarrow (z_1^2 - z_2^2 + c_1, 2z_1z_2 + c_2)$$

Pro kvaterniony:

$$\begin{aligned} (z_1, z_2, z_3, z_4) \rightarrow & (z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 - z_4^2 + c_1, \\ & 2z_1z_2 + c_2, \\ & 2z_1z_3 + c_3, \\ & 2z_1z_4 + c_4) \end{aligned}$$

Obecně:

$$\begin{aligned} (z_1, z_2, \dots, z_n) \rightarrow & (z_1^2 - z_2^2 - \dots - z_n^2 + c_1, \\ & 2z_1z_2 + c_2, \\ & \vdots \\ & 2z_1z_n + c_n) \end{aligned}$$

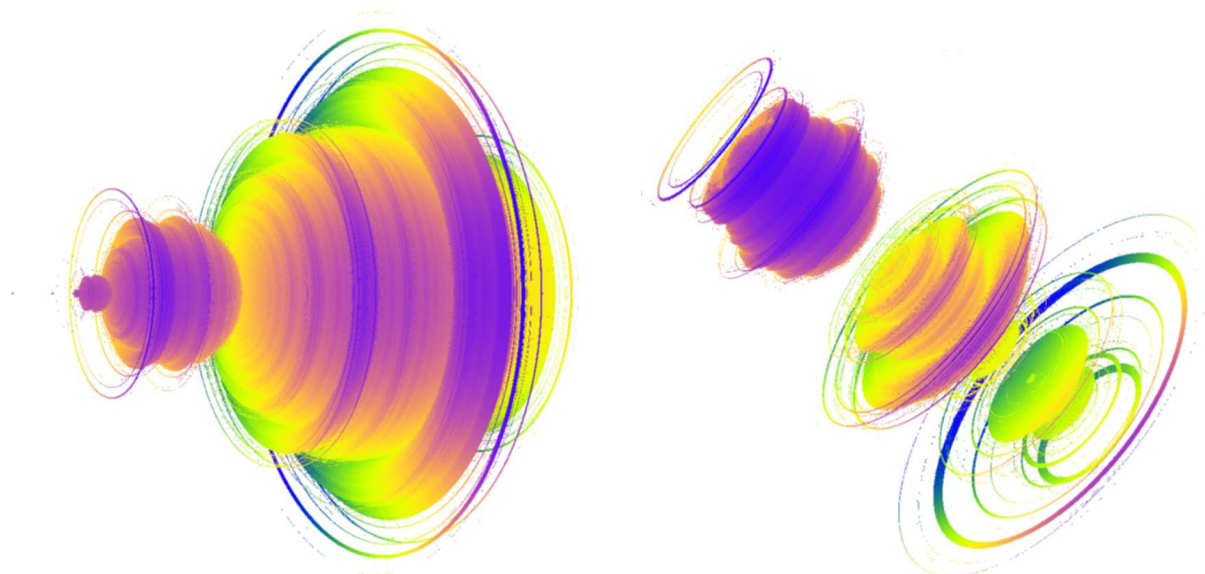
4.1.3. Aproximace vícerozměrné Mandelbrotovy množiny

Výpočet zobecněné Mandelbrotovy množiny provedeme stejným způsobem, jako kdybychom počítali Mandelbrotovu množinu v komplexních číslech. Jediná odlišnost bude v tom, že budeme muset zavést více souřadnic pro implementaci vztahů (6). Aby byl výpočet korektní, musíme ještě zobecnit větu 1. o mezním poloměru:

Věta 3. *Zobecněný mezní poloměr*

Nechť $\mathbf{v}$ je takový vektor, že $|\mathbf{v}| \geq |\mathbf{c}|$ a zároveň $|\mathbf{v}| > 2$. Pak posloupnost vektorů $(|\mathbf{z}^{(0)}|, |\mathbf{z}^{(1)}|, |\mathbf{z}^{(2)}|, \dots)$ z definice 17. je pro $\mathbf{z}^{(0)} = \mathbf{v}$ neomezená.

Tato věta se dokáže analogicky jako věta 1.

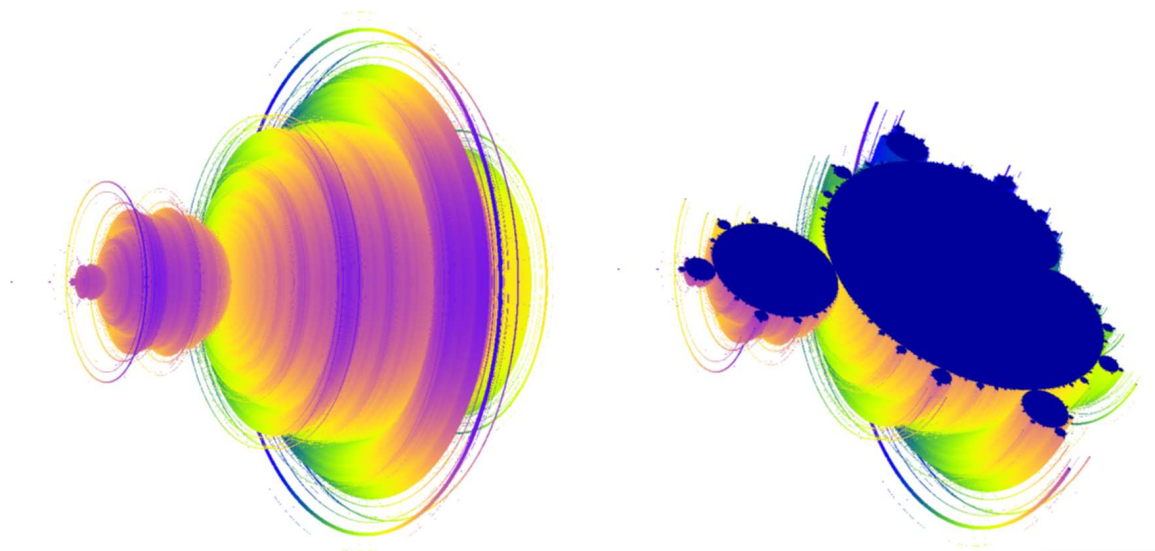


Obr. 6. Mandelbrotova množina; vlevo: trojrozměrná množina, vpravo: řez čtyřrozměrnou množinou – obsahuje body $(-1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, -1, 0)$, $(0, 1, 1, 0)$, $(0, 1, 0, 1)$

5. Vlastnosti zobecněné Mandelbrotovy množiny

5.1. Vztah mezi množinami o různých dimenzích

Zvolme si k libovolných složek vektoru $\mathbf{c}$ tak, že mezi nimi je obsažena i reálná složka. Počet k zvolíme tak, aby byl menší než n . Nyní necháme k vybraných složek vektoru $\mathbf{c}$ probíhat přes všechna reálná čísla a zbývající složky necháme nulové. Všechny takto získané vektory $\mathbf{c}$ dosadíme do vztahů (6) za $\mathbf{z}^{(0)}$. S těmito počátečními podmínkami dostaneme k -rozměrnou Mandelbrotovu množinu M_k . Tato množina je podmnožinou n -rozměrné množiny M_n , což je dáno volbou n -rozměrných vektorů $\mathbf{z}^{(0)}$. Platí $M_k \subset M_n$ pro $k < n$. Náhornou ukázkou můžeme vidět na obr. 7.



Obr. 7. Trojrozměrná Mandelbrotova množina a její řez

5.2. Symetrie množiny

5.2.1. Důkaz symetrie

V této části si dokážeme, že Mandelbrotova množina je symetrická podle reálné osy ve všech rozměrech. Tato osová symetrie je myšlena tak, že n -rozměrná Mandelbrotova množina je shodná s množinou, která vznikne rotací dvourozměrné Mandelbrototvy množiny kolem reálné osy.

Při důkazu symetrie použijeme vztahy (6). Vidíme, že hodnota $z_1^{(m+1)}$ závisí na $z_1^{(m)}$, $z_1^{(0)}$ a na $|\operatorname{Im} \mathbf{z}^{(m)}|$:

$$\begin{aligned} z_1^{(m+1)} &= \left(z_1^{(m)}\right)^2 - \left(z_2^{(m)}\right)^2 - \left(z_3^{(m)}\right)^2 - \dots - \left(z_n^{(m)}\right)^2 + z_1^{(0)} \\ &= \left(z_1^{(m)}\right)^2 - \left(\left(z_2^{(m)}\right)^2 + \left(z_3^{(m)}\right)^2 + \dots + \left(z_n^{(m)}\right)^2\right) + z_1^{(0)} \\ &= \left(z_1^{(m)}\right)^2 - \left|\operatorname{Im} \mathbf{z}^{(m)}\right|^2 + z_1^{(0)} \end{aligned} \quad (7)$$

Rozebereme si nyní členy $z_k^{(m)}$, $2 \leq k \leq n$, vektoru $\operatorname{Im} \mathbf{z}^{(m)}$. Budeme opakovaně dosazovat za $z_k^{(q)}$, kde q je postupně $(m-1), (m-2), \dots, 1$:

$$\begin{aligned} z_k^{(m)} &= 2z_1^{(m-1)} z_k^{(m-1)} + z_k^{(0)} \\ &= 2z_1^{(m-1)} \left(2z_1^{(m-2)} z_k^{(m-2)} + z_k^{(0)}\right) + z_k^{(0)} \\ &\vdots \\ &= 2z_1^{(m-1)} \left(2z_1^{(m-2)} \dots \left(2z_1^{(0)} z_k^{(0)} + z_k^{(0)}\right) + \dots + z_k^{(0)}\right) + z_k^{(0)} \end{aligned}$$

a v poslední úpravě vytkneme člen $z_k^{(0)}$:

$$z_k^{(m)} = z_k^{(0)} \left(2z_1^{(m-1)} \left(2z_1^{(m-2)} \dots \left(2z_1^{(0)} + 1\right) + \dots + 1\right) + 1\right) \quad (8)$$

a dosadíme do $|\operatorname{Im} \mathbf{z}^{(m)}|^2$:

$$\begin{aligned} \left|\operatorname{Im} \mathbf{z}^{(m)}\right|^2 &= \left(z_2^{(m)}\right)^2 + \left(z_3^{(m)}\right)^2 + \dots + \left(z_n^{(m)}\right)^2 \\ &= \left(\left(z_2^{(0)}\right)^2 + \left(z_3^{(0)}\right)^2 + \dots + \left(z_n^{(0)}\right)^2\right) \left(2z_1^{(m-1)} \left(2z_1^{(m-2)} \dots + 1\right) + 1\right)^2 \\ &= \left|\operatorname{Im} \mathbf{z}^{(0)}\right|^2 \left(2z_1^{(m-1)} \left(2z_1^{(m-2)} \dots + 1\right) + 1\right)^2 \end{aligned} \quad (9)$$

Tyto vztahy použijeme k odvození $|\mathbf{z}^{(m+1)}|$:

$$\begin{aligned} \left|\mathbf{z}^{(m+1)}\right| &= \sqrt{z_1^{(m+1)} + z_2^{(m+1)} + \dots + z_n^{(m+1)}} \\ &= \sqrt{z_1^{(m+1)} + \left|\operatorname{Im} \mathbf{z}^{(m+1)}\right|^2} \end{aligned} \quad (10)$$

Dosadíme (7) za $z_1^{(m+1)}$:

$$\left|\mathbf{z}^{(m+1)}\right| = \sqrt{\left(z_1^{(m)}\right)^2 - \left|\operatorname{Im} \mathbf{z}^{(m)}\right|^2 + z_1^{(0)} + \left|\operatorname{Im} \mathbf{z}^{(m+1)}\right|^2} \quad (11)$$

Opakovaně budeme v (11) dosazovat výraz (7) za $\left(z_1^{(m)}\right)^2$, kde m se bude postupně redukovat na $(m-1), (m-2), \dots, 0$ a současně budeme nahrazovat výrazy tvaru

$|\operatorname{Im} \mathbf{z}^{(q)}|^2$, kde $q = 1, 2, \dots, (m+1)$ pomocí (9). Po konečně mnoha krocích (počet dosažení závisí na m) zredukujeme výraz (11) na tvar, který bude závislý pouze na m , $z_1^{(0)}$ a na $|\operatorname{Im} \mathbf{z}^{(0)}|^2$. m už je dále nezávislé na zbývajících dvou konečných hodnotách. Z tohoto již plyne, že n -rozměrná Mandelbrotova množina je symetrické podle reálné osy.

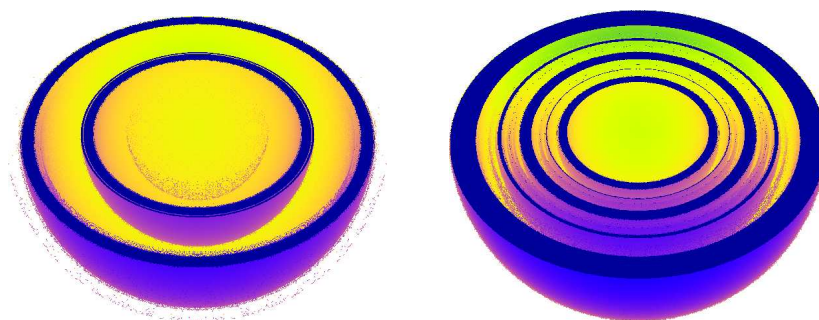
Posloupnost (6) pro daný bod je jednoznačně dána reálnou složkou a_1 a vzdáleností tohoto bodu od reálné osy: $|\operatorname{Im} \mathbf{z}^{(0)}| = \sqrt{a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2}$. Z toho plyne, že body v n -rozměrném prostoru s pevnou reálnou složkou a_1 a konstantní vzdáleností $d = \sqrt{a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2}$ od reálné osy buď všechny leží v Mandelbrotově množině nebo v ní neleží žádný z nich. Zde je formální zápis této věty:

Věta 4. *Symetrie Mandelbrotovy množiny*

Pro každý bod $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ n -rozměrného prostoru, ve kterém je definována Mandelbrotova množina podle definice 17., platí, že

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \in M_n \Leftrightarrow \left(a_1, \sqrt{a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2}\right) \in M_2$$

Tato vlastnost je dobře viditelná na trojrozměrném řezu čtyřrozměrné množiny, který je kolmý na reálnou osu. Viz. následující obr.:



Obr. 8. Dva různé řezy čtyřrozměrnou množinou kolmé na reálnou osu, které byly rozpůleny rovinou procházející středem. V obou případech dostaneme kouli, ale pod povrchem koule se skrývají další soustředné vrstvy.

Řez vlevo obsahuje body: $(0, 4; 0; 0; 0)$, $(0, 4; 1; 0; 0)$, $(0, 4; 0; 1; 0)$, $(0, 4; 0; 0; 1)$

a řez vpravo: $(0, 38; 0; 0; 0)$, $(0, 38; 1; 0; 0)$, $(0, 38; 0; 1; 0)$, $(0, 38; 0; 0; 1)$

Skutečnost, že Mandelbrotova množina je osově symetrická ve všech rozměrech, nám velmi zjednodušuje některé výpočty. Na využití symetrie se zaměříme v následující kapitole.

5.2.2. Využití symetrie

Aproximace množiny

Hlavní výhodou symetrie je zjednodušení výpočtu při aproximaci vícerozměrné Mandelbrotovy množiny. Díky symetrii k výpočtu nepotřebujeme vztahy z definice 17. Stačí vždy provést transformaci počítaného bodu, jak bylo popsáno ve větě 4. To znamená, že bod $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ n -rozměrného prostoru převedeme na bod $(a_1, \sqrt{a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2})$ dvourozměrného prostoru a tento nový bod pak vypočítáme v komplexní rovině. Tento postup nám výrazně urychluje výpočet. Výsledný algoritmus bude mít (až na transformaci bodu) časovou i paměťovou složitost nezávislou na počtu dimenzí Mandelbrotovy množiny.

Výpočet objemu

Další výhodou symetrie je zjednodušení numerického výpočtu objemu Mandelbrotovy množiny. Ze symetrie plyne, že když vedeme $(n-1)$ -rozměrný řez n -rozměrné množiny kolmo na reálnou osu, dostáváme na řezu $(n-1)$ -rozměrnou kouli. Tato koule ovšem nemusí být vždy zcela vyplněná. Uvnitř koule se může vyskytovat soustava soustředných $(n-1)$ -rozměrných mezisfér. Při výpočtu objemu tedy zjistíme poloměry jednotlivých mezisfér z množiny v komplexní rovině. Poloměry budeme měřit ve směru imaginární osy. Nyní přičteme objemy koulí, jejichž poloměry jsou vnějšími poloměry povrchů zjištěných mezisfér a odečteme objemy koulí, jejichž poloměry jsou vnitřními poloměry povrchů mezisfér. Některé mezisféry mohou být degenerované na koule. To jsou takové mezisféry, které nemají vnitřní povrch. Při výpočtu budeme potřebovat vzorec na objem n -rozměrné koule (s poloměrem R):

$$V_n(R) = R^n \cdot \frac{\pi^{(n-1)/2} 2^n \left(\frac{n-1}{2}\right)!}{n!} \quad \text{pro liché } n$$

$$V_n(R) = R^n \cdot \frac{\pi^{n/2}}{\left(\frac{n}{2}\right)!} \quad \text{pro sudé } n$$

Odvození těchto vzorců – viz. příloha 7.1.

Zde jsou výsledky pro některé dimenze:

dimenze n	2	3	4	5	6	7	8
objem V , $[j^n]$	1,513100	1,347767	1,139479	0,910310	0,690777	0,501235	0,349711

Přesnost výpočtu je 10^{-3n} . Počet iterací: 1000.

Výpočet Hausdorffovy dimenze

Pokud bychom chtěli numericky vypočítat Hausdorffovu dimenzi povrchu n -rozměrné Mandelbrotovy množiny, můžeme opět využít symetrii k zjednodušení výpočtu. Použijeme *mřížkovou metodu*, která počítá *fraktální dimenzi*.

Definice 18. *Fraktální dimenze* (převzato z [7], str. 279)

Fraktální dimenze množiny M je číslo

$$d = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N}{\log \frac{1}{\varepsilon}}$$

kde N je minimální počet koulí o poloměru ε , které jsou potřeba k pokrytí množiny M .

Fraktální dimenzi můžeme definovat pomocí míry podobně jako Hausdorffovu dimenzi v definici 12.:

Definice 19. *Míra*

d -rozměrná míra množiny M se definuje jako

$$m^d = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} N(\varepsilon) \cdot \varepsilon^d$$

kde $N(\varepsilon)$ je minimální počet koulí o poloměru ε , které jsou potřeba k pokrytí množiny M . Míra množiny pak pro jediné d_0 mění svou hodnotu z nekonečna na nulu. Takové d_0 se nazývá *fraktální dimenze* M .

V našem případě se fraktální dimenze shoduje s Hausdorffovou dimenzí.

Při výpočtu fraktální dimenze mřížkovou metodou si nejdříve zvolíme jednotku ε_1 a překryjeme zkoumanou množinu mřížkou s velikostí jednoho čtverečku ε_1 . Spočítáme počet čtverečků N_1 , kterými prochází okraj množiny. Nyní si zvolíme jinou jednotku ε_2 a podobně jako v předchozím případě spočítáme N_2 . Pro hledanou fraktální dimenzi d musí platit:

$$N_1 \varepsilon_1^d = N_2 \varepsilon_2^d$$

Z této rovnice odvodíme dimenzi d :

$$N_1 \varepsilon_1^d = N_2 \varepsilon_2^d$$

$$\log N_1 \varepsilon_1^d = \log N_2 \varepsilon_2^d$$

$$\log N_1 + d \log \varepsilon_1 = \log N_2 + d \log \varepsilon_2$$

$$d = \frac{\log N_2 - \log N_1}{\log \varepsilon_1 - \log \varepsilon_2}$$

Při výpočtu fraktální dimenze n -rozměrné Mandelbrotovy množiny nemusíme díky symetrii počítat krychličky na povrchu celé množiny, ale stačí spočítat čtverečky na okraji

dvourozměrné množiny a u každého z nich si zaznamenat vzdálenost od reálné osy. Tato vzdálenost je poloměr $(n - 1)$ -rozměrné koule na řezu, jejíž povrch umíme pomocí poloměru spočítat přesně. Tento povrch vydělíme objemem krychličky o straně ε , čímž získáme počet krychliček, které pokryjí tuto kouli. Pro povrch koule o poloměru R použijeme tyto vzorce:

$$P_n(R) = nR^{(n-1)} \cdot \frac{\pi^{(n-1)/2} 2^n \left(\frac{n-1}{2}\right)!}{n!} \quad \text{pro liché } n$$

$$P_n(R) = nR^{(n-1)} \cdot \frac{\pi^{n/2}}{\left(\frac{n}{2}\right)!} \quad \text{pro sudé } n$$

Odvození těchto vzorců – viz. příloha 7.1.

Fraktální dimenzi Mandelbrotovy množiny nebudeme počítat numericky. V následující části si rovnou ukážeme její přesnou hodnotu.

5.3. Hausdorffova dimenze povrchu Mandelbrotovy množiny

Víme, že Hausdorffova dimenze dvourozměrné Mandelbrotovy množiny je přesně 2. Na základě symetrie si dokážeme, že Hausdorffova dimenze n -rozměrné Mandelbrotovy množiny je přesně n . Nejdříve si dokážeme tuto větu:

Věta 5.

Kartézským součinem množiny s dimenzí d_1 a množiny s dimenzí d_2 dostaneme množinu s dimenzí $d_1 + d_2$.

Důkaz:

Máme množinu s dimenzí d_1 a mírou $M_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} N_1 \varepsilon^{d_1}$. Tato množina je pokryta N_1 objekty o velikosti ε^{d_1} . Každému tomuto objektu přiřadíme jednu množinu, z nichž každá má dimenzi d_2 a míru $m_k = n_k \varepsilon^{d_2}$. Míra výsledné množiny bude vypadat takto:

$$\begin{aligned} M &= \varepsilon^{d_1} m_1 + \varepsilon^{d_1} m_2 + \dots + \varepsilon^{d_1} m_{N_1} \\ &= \sum_{i=1}^{N_1} \varepsilon^{d_1} m_i = \sum_{i=1}^{N_1} \varepsilon^{d_1} n_i \varepsilon^{d_2} = \varepsilon^{d_1+d_2} \sum_{i=1}^{N_1} n_i \\ &= N \varepsilon^{d_1+d_2} \end{aligned}$$

což je podle definice 19. míra $(d_1 + d_2)$ -rozměrné množiny. Výsledná množina má tedy dimenzi $d_1 + d_2$.

n -rozměrná Mandelbrotova množina vznikne rotací dvourozměrné Mandelbrotovy množiny kolem reálné osy. Ke každému bodu dvourozměrné množiny jsme tedy přiřadili

povrch $(n - 1)$ -rozměrné koule, jejíž dimenze (fraktální i topologická, neboť se nejedná o fraktál) je přesně $(n - 2)$. Vzhledem k tomu, že dimenze původní dvourozměrné Mandelbrotovy množiny byla přesně 2, je výsledná dimenze n -rozměrné Mandelbrotovy množiny podle věty 5. přesně n .

6. Program HyperChaos

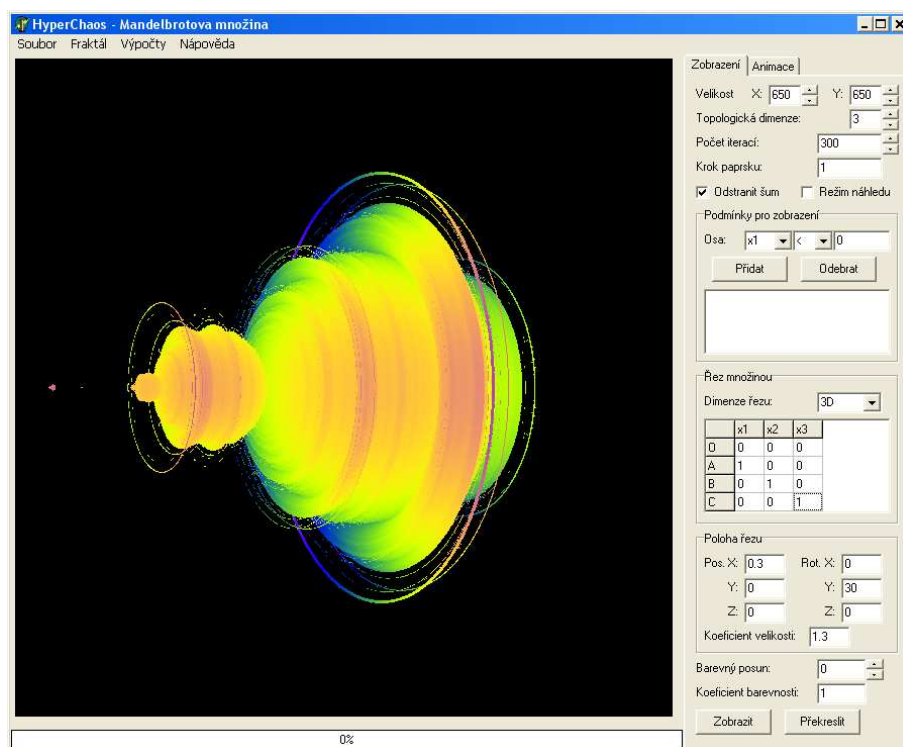
6.1. Popis programu

Součástí této práce je program *HyperChaos*, který umožňuje nahlédnout do více-rozměrného světa fraktálů. Pro většinu lidí je velmi obtížné představit si vícerozměrný prostor a v něm nějaké množiny. Tento program je velmi dobrá pomůcka pro získání představy o podobě a vlastnostech Mandelbrotovy, resp. Juliovy, množiny ve vícerozměrném prostoru.

Hlavní funkcí programu je zobrazování libovolných trojrozměrných nebo dvojrozměrných řezů n -rozměrné Mandelbrotovy, resp. Juliovy, množiny. Řez je jednoznačně určen uživatelem a tento řez se po zadání parametrů zobrazí v okně programu. Při trojrozměrné projekci se zachovává perspektiva a pomocí barev je dobře viditelné, která část množiny se nachází blíže oku uživatele. V případě dvourozměrných řezů je velmi zajímavé obarvování bodů neležících v množině. Veškeré snímky je možno uložit do souboru a dále zpracovávat.

Uživatel může pomocí tohoto programu vytvářet i animované obrázky. Pomocí dalších parametrů je možno nastavit posloupnost řezů množiny, které pak po spojení vytvoří animaci. Vzhledem k paměťové náročnosti výpočtu a dalším technickým problémům není animace vytvářena přímo. Do zvolené složky na disku se uloží sada bitmap, které je možno setřídit podle názvu a pomocí jiného programu sestavit animaci. Je doporučen profesionální software, který dokáže výslednou animaci optimalizovat a výrazně tak zredukovat velikost výsledného souboru.

Vedle zobrazování množin umožňuje program také provádět některé výpočty spojené s Mandelbrotovou, resp. Juliovou, množinou. V práci byl program využit k aproximaci objemů pro několik nižších dimenzí Mandelbrotovy množiny.



Obr. 9. Prostředí programu HyperChaos

6.2. Metoda zobrazení řezu

Trojrozměrný, resp. dvojrozměrný, řez je jednoznačně určen čtyřmi, resp. třemi, body, které neleží v jedné rovině, resp. jedné přímce. Pomocí takto zadanych bodů je program schopen zobrazit požadovaný řez. Metodu zobrazení si popíšeme pouze na trojrozměrné variantě řezu. Dvojrozměrný řez se získá pouhým zjednodušením trojrozměrné varianty.

Program pracuje s řezem množiny ve dvou oddělených souřadnicových systémech. V prvním systému, jsou zadány vrcholy čtyřstěnu $OABC$, který nám jednoznačně určuje hledaný řez. Tento systém souřadnic je n -rozměrný. Druhý systém je trojrozměrný a tento systém zobrazujeme na obrazovku.

Potřebujeme zobrazit řez množiny do našeho trojrozměrného systému. Toto zobrazení provedeme tak, že si ve trojrozměrném systému nejdříve vypočítáme vrcholy čtyřstěnu $O'A'B'C'$, který bude shodný s čtyřstěnem $OABC$ v n -rozměrném systému souřadnic. Pomocí vzdáleností vrcholů a úhlů mezi hranami spočítáme tyto vrcholy velice snadno. Po této transformaci již dokážeme ke každému bodu v trojrozměrném systému najít odpovídající bod řezu množiny v n -rozměrném systému.

Pomocí vrcholů čtyřstěnu $OABC$ si určíme vektory n -rozměrného prostoru, které

by měly být lineárně nezávislé:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} &= (a_1, \dots, a_n) \\ \overrightarrow{OB} &= (b_1, \dots, b_n) \\ \overrightarrow{OC} &= (c_1, \dots, c_n)\end{aligned}$$

a odpovídající vektory v trojrozměrném systému:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{O'A'} &= (a'_1, a'_2, a'_3) \\ \overrightarrow{O'B'} &= (b'_1, b'_2, b'_3) \\ \overrightarrow{O'C'} &= (c'_1, c'_2, c'_3)\end{aligned}$$

Pomocí těchto vektorů najdeme k libovolnému bodu D' v trojrozměrném systému odpovídající bod D v n -rozměrném systému. Platí, že každé čtyři vektory v trojrozměrném prostoru jsou lineárně závislé, tj. existuje právě jeden vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, takový, že platí:

$$\overrightarrow{O'D'} = x_1 \overrightarrow{O'A'} + x_2 \overrightarrow{O'B'} + x_3 \overrightarrow{O'C'} \quad (12)$$

kde $\overrightarrow{O'D'} = (d'_1, d'_2, d'_3)$. Totéž musí platit i pro bod D :

$$\overrightarrow{OD} = x_1 \overrightarrow{OA} + x_2 \overrightarrow{OB} + x_3 \overrightarrow{OC} \quad (13)$$

kde $\overrightarrow{OD} = (d_1, \dots, d_n)$.

Z tohoto již plyne postup při výpočtu souřadnic bodu D . Nejdříve spočítáme vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ z rovnice (12), která po rozepsání přejde v soustavu rovnic:

$$\begin{aligned}d'_1 &= x_1 a'_1 + x_2 b'_1 + x_3 c'_1 \\ d'_2 &= x_1 a'_2 + x_2 b'_2 + x_3 c'_2 \\ d'_3 &= x_1 a'_3 + x_2 b'_3 + x_3 c'_3\end{aligned} \quad (14)$$

Jednotlivé složky vektoru $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ dosadíme do (13), čímž získáme vektor $\overrightarrow{OD}$ a odtud podle souřadnic bodu O spočítáme souřadnice bodu D , který odpovídá zvolenému bodu D' .

Tento výpočet je třeba provést pro každý zobrazovaný bod řezu zvlášť. Některé hodnoty pro řešení soustavy (14) je možné spočítat předem, čímž se výpočet urychluje. Celková časová složitost je lineární vzhledem k počtu dimenzí množiny.

7. Příloha

7.1. Odvození vzorců pro n -D kouli

Objem

n -rozměrná koule je množina bodů v n -rozměrném prostoru, které mají od jednoho středu vzdálenost menší nebo rovnu poloměru této koule. Poloměr budeme značit R . Pokud vedeme $(n-1)$ -rozměrný řez touto koulí, jehož vzdálenost od středu je d , pak dostaneme $(n-1)$ -rozměrnou kouli s poloměrem $\sqrt{R^2 - d^2}$. Z tohoto už dokážeme sestavit integrál pro výpočet objemu n -rozměrné koule:

$$V_n(R) = \int_{-R}^R V_{n-1} \left(\sqrt{R^2 - x^2} \right) dx \quad (15)$$

Hledaný vzorec bude mít tvar:

$$V_n(R) = a_n \cdot R^n \quad (16)$$

$$a_n = \frac{V_n(R)}{R^n} \quad (17)$$

Nyní (15) dosadíme do (17) a upravíme:

$$\begin{aligned} a_n = \frac{V_n(R)}{R^n} &= \frac{\int_{-R}^R V_{n-1} \left(\sqrt{R^2 - x^2} \right) dx}{R^n} \\ &= \frac{\int_{-R}^R a_{n-1} \cdot \left(\sqrt{R^2 - x^2} \right)^{n-1} dx}{R^n} \\ &= \frac{a_{n-1} \cdot R^n \cdot \int_{-1}^1 \left(\sqrt{1 - x^2} \right)^{n-1} dx}{R^n} \\ &= a_{n-1} \cdot \int_{-1}^1 \left(\sqrt{1 - x^2} \right)^{n-1} dx \\ &= a_{n-1} \cdot \int_{-1}^1 \left(\sqrt{1 - x^2} \right)^{n-1} dx \end{aligned} \quad (18)$$

Z (18) můžeme snadno vyjádřit a_n :

$$a_n = \prod_{i=0}^{n-1} \int_{-1}^1 \left(\sqrt{1 - x^2} \right)^i dx \quad (19)$$

které dosadíme do (16):

$$V_n(R) = R^n \cdot \prod_{i=0}^{n-1} \int_{-1}^1 \left(\sqrt{1-x^2} \right)^i dx \quad (20)$$

Nyní budeme potřebovat několik definic z [1]:

Definice 20. *Funkce gama* [1] (str. 521):

„*Funkce*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \quad (21)$$

se nazývá Eulerova funkce druhého druhu čili funkce gama.”

Věta 6. *Základní vztahy pro funkci gama* [1] (str. 521–522):

”

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad \text{pro přirozená } n \quad (22)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\pi}, \dots; \quad (23)$$

”

Definice 21. *Funkce beta* [1] (str. 524)

„*Funkce beta čili Eulerův integrál prvního druhu je definována integrálem*

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = \int_0^\infty \frac{x^{p-1} dx}{(1+x)^{p+q}} \quad (p > 0, q > 0). \quad (24)$$

”

Věta 7. *Platí* [1] (str. 524):

”

$$B(p, q) = B(q, p) \quad (25)$$

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \quad (26)$$

”

Pomocí těchto vztahů upravíme integrál v (20): $\int_{-1}^1 \left(\sqrt{1-x^2} \right)^i dx$. Zavedeme si substituci:

$$z = x^2, \quad x = \sqrt{z} \quad (27)$$

$$\frac{dz}{dx} = 2x, \quad dx = \frac{dz}{2x} = \frac{dz}{2\sqrt{z}} \quad (28)$$

(27) a (28) dosadíme do (20), čímž dostaneme nový tvar integrálu:

$$\int_{-1}^1 \left(\sqrt{1-x^2} \right)^i dx = 2 \cdot \int_0^1 (1-z)^{i/2} \frac{1}{2\sqrt{z}} dz = \int_0^1 (1-z)^{i/2} z^{-1/2} dz \quad (29)$$

což je podle (24) přesně $B\left(\frac{1}{2}, \frac{i}{2} + 1\right)$ a podle (26): $\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{i}{2}+1)}{\Gamma(\frac{i+3}{2})}$

Výsledek dosadíme do (20):

$$\begin{aligned} V_n(R) &= R^n \cdot \prod_{i=0}^{n-1} \int_{-1}^1 \left(\sqrt{1-x^2} \right)^i dx \\ &= R^n \cdot \prod_{i=0}^{n-1} B\left(\frac{1}{2}, \frac{i}{2} + 1\right) \end{aligned} \quad (30)$$

$$\boxed{= R^n \cdot \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{i}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{i+3}{2}\right)}} \quad (31)$$

Nyní je potřeba rozlišit případy, kdy je n *sudé* nebo *liché*. Zároveň rozdělíme součin v (31) na dva - pro *lichá* i a pro *sudá* i . Nejdříve úprava vzorce pro $n = 2k$:

$$\begin{aligned} V_{2k}(R) &= R^{2k} \cdot \prod_{i=0}^{2k-1} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{i}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{i+3}{2}\right)} \\ &= R^{2k} \cdot \prod_{i=0}^{k-1} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2i}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{2i+3}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2i+1}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{2i+1+3}{2}\right)} \right] \\ &= R^{2k} \cdot \prod_{i=0}^{k-1} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(i+1)}{\Gamma\left(\frac{2i+3}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2i+3}{2}\right)}{\Gamma(i+2)} \right] \\ &= R^{2k} \cdot \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(i+1)}{\Gamma(i+2)} \end{aligned} \quad (32)$$

Využijeme vztahy (22)-(23) a dosadíme je do (32):

$$\begin{aligned} V_{2k}(R) &= R^{2k} \cdot \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(i+1)}{\Gamma(i+2)} \\ &= R^{2k} \cdot \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\pi \cdot i!}{(i+1)!} \\ &= R^{2k} \cdot \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\pi}{i+1} \\ &\boxed{= R^{2k} \cdot \frac{\pi^k}{k!}} \end{aligned} \quad (33)$$

Teď ještě zbývá odvodit vzorec pro $n = 2k + 1$. Budeme postupovat podobně jako v předchozím případě:

$$\begin{aligned} V_{2k+1}(R) &= R^{2k+1} \cdot \prod_{i=0}^{2k} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{i}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{i+3}{2}\right)} \\ &= R^{2k+1} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2k}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{2k+3}{2}\right)} \cdot \prod_{i=1}^{2k-1} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{i}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{i+3}{2}\right)} \end{aligned}$$

Tady použijeme výsledek z předchozího výpočtu (po dosazení):

$$V_{2k+1}(R) = R^{2k+1} \cdot \frac{\sqrt{\pi} k!}{\Gamma\left(\frac{2k+3}{2}\right)} \cdot \frac{\pi^k}{k!} \quad (34)$$

Podle (23) můžeme odvodit $\Gamma\left(\frac{2k+3}{2}\right)$:

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{2k+3}{2}\right) &= \frac{2k+1}{2} \cdot \frac{2k-1}{2} \cdots \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \\ &= \frac{1}{2^{k+1}} \cdot \frac{(2k+1)(2k)(2k-1) \cdots}{(2k)(2k-2)(2k-4) \cdots} \sqrt{\pi} \\ &= \frac{1}{2^{k+1}} \cdot \frac{(2k+1)!}{2^k k!} \sqrt{\pi} \end{aligned} \quad (35)$$

Výsledek (35) dosadíme do (34) a upravíme:

$$\begin{aligned} V_{2k+1}(R) &= R^{2k+1} \cdot \frac{\sqrt{\pi} k!}{\Gamma\left(\frac{2k+3}{2}\right)} \cdot \frac{\pi^k}{k!} \\ &= R^{2k+1} \cdot \frac{\pi^k 2^{2k+1} k!}{(2k+1)!} \end{aligned} \quad (36)$$

Tím je odvození vzorce pro objem n -rozměrné koule úplné.

Povrch

Nyní se pokusíme odvodit povrch n -rozměrné koule. Ze vzorců pro nižší dimenze si můžeme všimnout, že povrch koule, resp. obvod kruhu, je derivace objemu koule, resp. obsahu kruhu. Toto se pokusíme dokázat.

K důkazu budeme potřebovat vzorec pro objem n -rozměrného jehlanu:

$$J_n = \frac{1}{n} v S_{n-1} \quad (37)$$

kde v je výška jehlanu a S_{n-1} je objem $(n-1)$ -rozměrné podstavy. Dále si připomeňme vzorec pro objem n -rozměrné krychle:

$$K_n = a^n \quad (38)$$

Důkaz provedeme tak, že se pokusíme najít poměr mezi povrchem a objemem koule. Je důležité si uvědomit, že tento poměr bude stejný jako poměr nějaké libovolné části povrchu $((n-1)$ -D) a objemu (n) -D, který je vymezen množinou úseček spojujících okraj $((n-2)$ -D) vybrané části povrchu $((n-1)$ -D) a střed koule a onou vybranou částí povrchu $((n-1)$ -D). Jediné, co teď musíme udělat, je zvolit si na povrchu koule limitně malou $(n-1)$ -rozměrnou krychličku a její vrcholy spojit se středem koule. Tím dostaneme n -rozměrný jehlan s krychlovou $(n-1)$ -rozměrnou podstavou a výškou R . Poměr objemu podstavy a objemu tohoto jehlanu je hledaným poměrem pro naší n -rozměrnou kouli:

$$\frac{P_n}{V_n} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{K_{n-1}(a)}{\frac{1}{n} R K_{n-1}(a)} = \frac{n}{R} \quad (39)$$

$$\boxed{P_n = \frac{n}{R} V_n} \quad (40)$$

což je to samé, jako kdybychom napsali:

$$\boxed{P_n(R) = \frac{dV_n(R)}{dR}} \quad (41)$$

neboť $V_n(R) = a_n R^n$

Shrnutí

Objem n -rozměrné koule:

$$V_n(R) = R^n \cdot \frac{\pi^{(n-1)/2} 2^n \left(\frac{n-1}{2}\right)!}{n!} \quad \text{pro liché } n$$

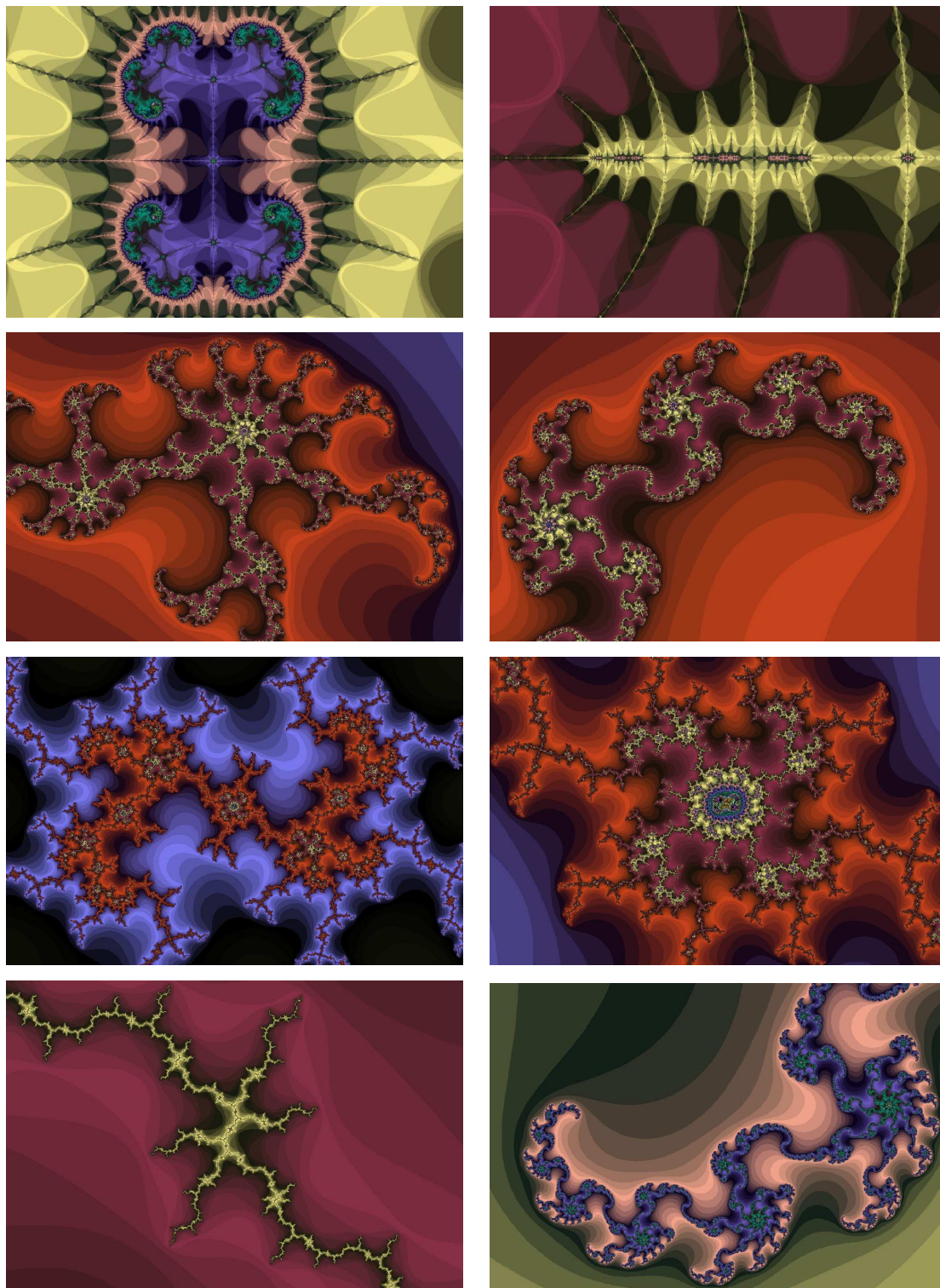
$$V_n(R) = R^n \cdot \frac{\pi^{n/2}}{\left(\frac{n}{2}\right)!} \quad \text{pro sudé } n$$

Povrch n -rozměrné koule:

$$P_n(R) = \frac{dV_n(R)}{dR}$$

7.2. Obrazová příloha

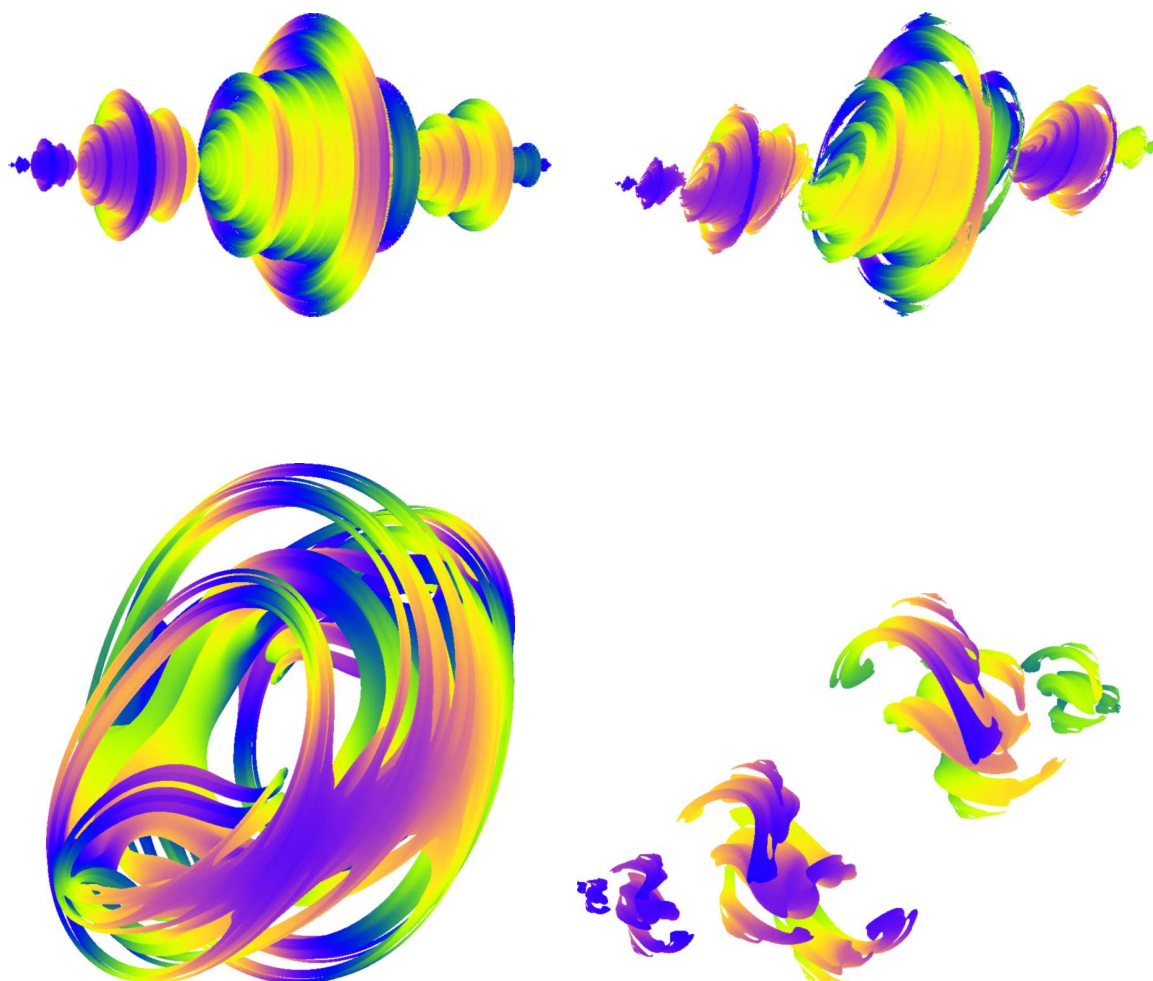
7.2.1. Ukázky Mandelbrotovy množiny v komplexní rovině



Obr. 10. Tyto obrázky byly vygenerovány programem XaoS.

7.2.2. Juliovy množiny ve vícerozměrném prostoru

Pomocí programu HyperChaos byly zobrazeny i vícerozměrné analogie Juliových množin. Jak můžeme vidět na následujících obrázcích, i zde existuje určitá míra symetrie.



Obr. 11. Trojrozměrné Juliovy množiny.

vlevo nahoře: $c = (-1; 0; 0)$, 300 iter., vpravo nahoře: $c = (-1; 0, 2; 0)$, 300 iter.

vlevo dole: $c = (0, 38; 0, 8; 0)$, 10 iter., vpravo dole: $c = (-0, 5; 0, 8; 0, 25)$, 10 iter.

8. Závěr

8.1. Závěr

Cílem této práce bylo zobecnit Mandelbrotovu množinu do n -rozměrného prostoru i se všemi jejími vlastnostmi, které jsou pozorovatelné na dvou a čtyřrozměrné množině. Rozšířením iterační rovnice, která jednoznačně určuje Mandelbrotovu množinu v komplexní rovině, bylo dosaženo zobecnění množiny i jejích vlastností přesně podle předpokladů. Velmi zajímavou vlastností pak byla osová symetrie Mandelbrotovy množiny.

Výsledky byly ověřeny programem HyperChaos, který byl napsán jako součást této práce. Tento program mi velmi pomohl při zkoumání vícerozměrné Mandelbrotovy množiny a věřím, že jej využije spousta dalších zájemců o vícerozměrné fraktály.

Pomocí tohoto programu jsem také zobrazil vícerozměrnou Juliovu množinu a zjistil jsem, že i zde existuje určitá symetrie. Juliovou množinou a jejími vlastnostmi bych se chtěl ještě někdy v budoucnu zabývat.

Myslím si, že zkoumání fraktálních množin je velmi zajímavá práce, protože fraktály jsou součástí, možná dokonce i základem, přírody kolem nás, ve které můžeme neustále objevovat něco nového.

9. Zdroj

9.1. Seznam literatury

- [1] Rektorys, K.: *Přehled užití matematiky I*. Praha, Prometheus 1996
- [2] Rektorys, K.: *Přehled užití matematiky II*. Praha, Prometheus 2000
- [3] Škrášek, J., Tichý, Z.: *Základy aplikované matematiky I*. Praha, SNTL 1989
- [4] Peitgen, H.-O., Jürgens, H., Saupe, D.: *Chaos and Fractals, New Frontiers of Science*. Springer-Verlag New York, Inc. 1992
- [5] Edgar, G., A.: *Measure, Topology, and Fractal Geometry*. Springer Verlag New York, Inc. 1990
- [6] Falconer, K., J.: *The geometry of fractal sets*. Cambridge University Press 1985
- [7] Teman, R.: *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*. Springer-Verlag New York, Inc. 1990
- [8] Hurewicz, W., Wallman, H.: *Dimension Theory*. Princeton University Press 1941
- [9] Julia, G.: *Mémoire sur l'iteration des fonctions rationnelles*. Journal de Math. Pure et Appl. 8 (1918) 47–245

9.2. Seznam adres na internetu

- [i1] <http://en.wikipedia.org/wiki/Quaternion>
- [i2] <ftp://math.sunysb.edu/preprints/ims91-7.ps>