$\boxed{\text{Matematika I - Skriptum pro studenty}}$

Radek Fučík

verze: 2. prosince 2024

Obsah

1 Úvod **4**
1.1 Množiny . . . 4
1.2 Výroky . . . 4
1.3 Číselné množiny . . . 5
1.4 Důkaz matematickou indukcí . . . 6
1.5 Intervaly . . . 6
1.6 Omezenost množin . . . 7
1.7 Absolutní hodnota . . . 7

2 Funkce **8**
2.1 Definice . . . 8
2.2 Základní funkce . . . 8
2.3 Algebraické kombinace funkcí . . . 9
2.4 Prostá a inverzní funkce . . . 9
2.5 Parita . . . 10
2.6 Obraz, vzor . . . 10

3 Limita funkce **10**
3.1 Definice . . . 10
3.2 Vlastnosti limity . . . 11
3.3 Jednoznačnost limity . . . 11
3.4 Nekonečné limity . . . 12
3.5 Věta o limitě sevřené funkce . . . 13
3.6 Goniometrické limity . . . 13
3.7 Asymptota funkce . . . 14

4 Spojitost funkce **14**
4.1 Definice . . . 14
4.2 Vlastnosti spojitých funkcí . . . 15

5 Derivace funkce **16**
5.1 Definice . . . 16
5.2 Pravidla pro derivování . . . 16
5.3 Derivace složené funkce . . . 18
5.4 Derivace inverzní funkce . . . 18
5.5 Tečna a normála . . . 19
5.6 Derivace cyklometrických funkcí . . . 19
5.6.1 Funkce arcsin . . . 19
5.6.2 Funkce arccos . . . 20
5.6.3 Funkce arctg . . . 20
5.6.4 Funkce arccotg . . . 21

6 Užití derivace k vyšetřování funkce **22**
6.1 Věty o přírůstku funkce . . . 22
6.2 Monotonie . . . 23
6.3 Lokální a globální extrémy . . . 23
6.4 Test extrému dle 1. derivace . . . 24
6.5 Test extrému dle 2. derivace . . . 24
6.6 Konvexní a konkávní funkce . . . 24

6.7 l'Hôpitalovo pravidlo . . . 25
6.8 Vyšetřování průběhu funkce . . . 25

7 Integrální počet **26**
7.1 Primitivní funkce a neurčitý integrál . . . 26
7.2 Určitý integrál . . . 27
7.3 Vlastnosti určitého integrálu . . . 30

8 Transcendentní funkce **31**
8.1 Algebraické a transcendentní funkce . . . 31
8.2 Logaritmická funkce . . . 31
8.3 Přirozený logaritmus . . . 32
8.4 Exponenciální funkce . . . 32
8.5 Obecná mocnina . . . 33
8.6 Obecná báze logaritmu . . . 33
8.7 Hyperbolické funkce . . . 34
8.8 Inverzní hyperbolické funkce . . . 35
8.9 Pokročilé techniky integrace . . . 36
8.10 Příklady . . . 38

9 Aplikace integrálu **39**
9.1 Výpočet plochy . . . 39
9.2 Výpočet polohy těžiště . . . 39
9.3 Délka grafu funkce . . . 40
9.4 Objem a povrch rotačního tělesa . . . 40

Reference **41**

1 Úvod

V této úvodní kapitole se seznámíme se základními matematickými pojmy, značením, operacemi s množinami a základy matematické logiky. Dále jsou zde stručně probrány číselné množiny, intervaly, pojem omezenosti množiny, horní hranice (závora) množiny a konečně význam absolutní hodnoty čísla.

1.1 Množiny

Definice 1.1 (Naivní definice množiny — Cantor 1873)
Soubor dobře definovaných a dobře rozlišitelných objektů se nazývá **množina**. Množiny zapisujeme ve tvaru

$$M = \{\text{prvek } x \; : \; \text{vlastnosti prvku } x\}.$$

Definice 1.2 (Operace s množinami)
Nechť A a B jsou nějaké množiny a x je prvek. Potom definujeme následující symboly:

$x \in A$	prvek x náleží množině A.
$x \notin A$	prvek x nenáleží množině A.
$A \subset B$	množina A je částí množiny B.
$A \cup B$	sjednocení množin A a B.
$A \cap B$	průnik množin A a B.
$\emptyset$	prázdná množina.
$A = \{x : V\}$	zápis množiny, která má prvky x, o kterých platí vlastnost V, např. $V : x > 0$.

Poznámka. Vlastnosti prázdné množiny $\emptyset$:

- $A \cup \emptyset = A$
- $A \cap \emptyset = \emptyset$

Příklad. Nechť $A = \{♀\}$, $B = \{♂, ♀\}$, pak platí:

- $A \subset B$
- $A \cap B = \{♀\} = A$
- $A \cup B = \{♂, ♀\} = B$

Definice 1.3 (Kartézský součin množin A a B)

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \text{ a } y \in B\}$$

1.2 Výroky

Definice 1.4 (Výrok)
Výrok je tvrzení, o kterém můžeme rozhodnout zda platí nebo neplatí.

Definice 1.5 (Přehled operací s výroky)
Nechť V_1 a V_2 jsou výroky. Potom definujeme následující značení:

V_1	výrok V_1 (platí).
$\neg V_1$	negace výroku V_1 (výrok V_1 neplatí).
$V_1 \wedge V_2$	konjunkce - platí V_1 a zároveň V_2.
$V_1 \vee V_2$	disjunkce - platí V_1 nebo V_2.
$V_1 \Rightarrow V_2$	implikace - když platí V_1 , pak platí V_2.
$V_1 \Leftrightarrow V_2$	ekvivalence - V_1 platí právě tehdy, když platí V_2.
$\exists$	existenční kvantifikátor - existuje **aspoň** jeden prvek ...
$\exists_1$ nebo $\exists!$	existenční kvantifikátor - existuje **právě** jeden prvek ...
$\exists_\infty$	existenční kvantifikátor - existuje **nekonečně** prvků ...
$\forall$	kvantifikátor: **pro všechny** prvky ...

Poznámka. Výlučná disjunkce (exkluzivní disjunkce, non-ekvivalence): $(V_1 \vee V_2) \wedge \neg(V_1 \wedge V_2)$.

Definice 1.6 (Tabulka pravdivostních hodnot pro operace s výroky)
V následující tabulce **P** znamená platí a **N** neplatí:

V_1	V_2	$V_1 \wedge V_2$	$V_1 \vee V_2$	$V_1 \Rightarrow V_2$	$V_1 \Leftrightarrow V_2$
P	P	P	P	P	P
P	N	N	P	N	N
N	P	N	P	P	N
N	N	N	N	P	P

Lemma 1.7
Pravidla při negování výroků (z definice 1.6):

1. $\neg(V_1 \vee V_2) = \neg V_1 \wedge \neg V_2$
2. $\neg(V_1 \wedge V_2) = \neg V_1 \vee \neg V_2$
3. $\neg(V_1 \Rightarrow V_2) = V_1 \wedge \neg V_2$
4. $\neg(\exists x \in M) = \forall x \in M$
5. $\neg(\forall x \in M) = \exists x \in M$

1.3 Číselné množiny

Definice 1.8 (Značení číselných množin)

Přirozená čísla $\mathbb{N}$,	$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4 \ldots\}$.
Celá čísla $\mathbb{Z}$,	$\mathbb{Z} = \{\ldots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\}$.
Racionální čísla $\mathbb{Q}$,	$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \ : \ p \in \mathbb{Z} \ ; \ q \in \mathbb{N}\}$.
Reálná čísla $\mathbb{R}$.	
Iracionální čísla $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.	
Komplexní čísla $\mathbb{C}$,	$\mathbb{C} = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$.

Lemma 1.9 (Vlastnosti reálných čísel)
Nechť a, b, c jsou reálná čísla. Potom platí:

1. $(a < b) \vee (a > b) \vee (a = b)$
2. $(a < b) \wedge (b < c) \Rightarrow (a < c)$ transitivita
3. $(a + b < a + c) \Rightarrow (b < c)$

4. $(a < b) \wedge (c > 0) \Rightarrow ac < cb$
   $(a < b) \wedge (c < 0) \Rightarrow ac > cb$

Věta 1.10 (O hustotě $\mathbb{R}$)
Mezi libovolnými různými reálnými čísly je nekonečně mnoho racionálních a nekonečně mnoho iracionálních čísel.

Důsledek 1.11
Neexistuje nejmenší kladné reálné číslo.

Důkaz. **Sporem**. Principem důkazu sporem je ukázat, že negace tvrzení vede ke sporu. Matematická věta je obvykle zapsána pomocí implikace výroků

$$\text{Předpoklad} \ \Rightarrow \ \text{Tvrzení}, \tag{1}$$

přičemž podle pravidel negování výroku (Lemma 1.7) je její negace

$$\neg(\text{Předpoklad} \ \Rightarrow \ \text{Tvrzení}) = \text{Předpoklad} \ \wedge \neg\text{Tvrzení}, \tag{2}$$

Uvažujme následující slovní vyjádření výroku (ozn. V): *Není pravda, že by existovalo kladné reálné číslo, které by bylo menší než všechna ostatní reálná čísla (různá od tohoto čísla).* Kvantifikovaně lze výrok V vyjádřit takto:

$$V = \neg(\exists c \in \mathbb{R}, c > 0)(\forall r \in \mathbb{R}, r > 0, r \neq c)(c < r)$$

Tento výrok lze převést pomocí pravidel pro negování výrazů s $\exists$ a $\forall$ na výrok

$$V = (\forall c \in \mathbb{R}, c > 0)(\exists r \in \mathbb{R}, r > 0, r \neq c)(c \geq r),$$

které vyjadřuje ekvivalentní tvrzení *Pro všechna kladná reálná čísla c existuje aspoň jedno reálné číslo r takové, že je ostře menší než c.*

Pro důkaz sporem tedy předpokládejme, že platí negace výroku V, to jest

$$\neg V = (\exists c \in \mathbb{R}, c > 0)(\forall r \in \mathbb{R}, r > 0, r \neq c)(c < r)$$

Označme si toto nejmenší číslo, které nyní předpokládáme, že existuje, symbolem c_{min}. Potom ale podle věty 1.10 mezi čísly 0 a c_{min} existuje alespoň jedno číslo x tak, že $0 < x < c_{min}$. Tedy díky větě 1.10 snadno nalezneme kladné reálné číslo, které je menší než údajně nejmenší číslo c_{min}, což je **spor**. □

1.4 Důkaz matematickou indukcí

Poznámka. Princip důkazu tvrzení $V[n]$ matematickou indukcí. Tvrzení $V[n]$ nazýváme **indukční předpoklad**.

1. **První krok.** Ověříme, že tvrzení platí pro nejnižší index, např. že $V[1]$ platí.

2. **Indukční krok $n \to n + 1$.** Za předpkladu, že platí $V[n]$, dokážeme platnost $V[n + 1]$.

1.5 Intervaly

Definice 1.12 (Interval)
Otevřený interval $(a, b) = \{ \ x \in \mathbb{R} \ : \ a < x < b \ \}$
Uzavřený interval $[a, b] = \{ \ x \in \mathbb{R} \ : \ a \leq x \leq b \ \}$
Polootevřený (polouzavřený) interval $[a, b) = \{ \ x \in \mathbb{R} \ : \ a \leq x < b \ \}$

Definice 1.13 (Nekonečno)
Pro symbol $+\infty$ platí, že $(\forall x \in \mathbb{R})(x < +\infty)$.
Pro symbol $-\infty$ platí, že $(\forall x \in \mathbb{R})(x > -\infty)$.

1.6 Omezenost množin

Definice 1.14 (Omezenost množiny)

Říkáme, že množina M je omezená shora	$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\exists h \in \mathbb{R})(\forall x \in M)(x \leq h)$.
Říkáme, že množina M je omezená zdola	$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\exists d \in \mathbb{R})(\forall x \in M)(x \geq d)$.
Říkáme, že množina M je omezená	$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ je omezená shora i zdola.
Říkáme, že množina M je neomezená	$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ není omezená shora ani zdola.

Definice 1.15 (Závora množiny)
Číslo h, resp. d z definice 1.14 nazývýváme horní, resp. dolní závora (hranice) množiny M.

1.7 Absolutní hodnota

Definice 1.16 (Absolutní hodnota)
Absolutní hodnota čísla $x \in \mathbb{R}$ je

$$|x| = \begin{cases} x & \text{pro} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{pro} \quad x < 0 \end{cases}.$$

Poznámka. Platí $|x| = \max\{x, -x\}$ a hlavně $\sqrt{x^2} = |x|$.

Věta 1.17 (Trojúhelníková nerovnost $\triangle \neq$)

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

Důkaz. Platí:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \leq |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 = (|a| + |b|)^2,$$

kde po odmocnění levé a pravé strany nerovnosti dostáváme

$$|a + b| \leq \big||a| + |b|\big| = |a| + |b|.$$

□

Důsledek 1.18

$$\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|.$$

Důkaz.

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \geq |a|^2 - 2|a||b| + |b|^2 = (|a| - |b|)^2,$$

kde po odmocnění levé a pravé strany nerovnosti dostaneme tvrzení věty. □

Věta 1.19 (Youngova nerovnost)

$$ab \leq \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2\right).$$

Důkaz. Platí:

$$0 \leq (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

kde převedením prostředního členu z pravé strany na levou dostaváme

$$ab \leq \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2\right),$$

což je tvrzení věty. □

2 $\boxed{\text{Funkce}}$

2.1 Definice

Definice 2.1 (Funkce, definiční obor, obor hodnot)
Funkce f s **definičním oborem** D_f je předpis, který každému číslu $x \in D_f$ přiřadí právě jedno reálné číslo, které značíme $f(x)$. Množinu všech takto přiřazených čísel nazýváme **obor hodnot** a značíme H_f.

Definice 2.2 (Graf funkce)
Grafem funkce f je množina bodů v rovině (x,y) takových, že $x \in D_f$ a $y = f(x)$.

Věta 2.3
Množina $\mathcal{F}$ je funkcí ve smyslu definice 2.1, právě tehdy, když pro všechny uspořádané dvojice čísel (x, y) platí:

$$\big((x,y) \in \mathcal{F} \wedge (x,z) \in \mathcal{F}\big) \Rightarrow y = z.$$

2.2 Základní funkce

Definice 2.4 (Polynom)
Polynom p je funkce definovaná jako

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 x^0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,$$

kde a_k jsou komplexní čísla pro všechny indexy $k = 0, 1, \ldots, n$. Pokud a_n je nejvyšší nenulový koeficient polynomu (tj. $a_k = 0$ pro všechna $k > n$), říkáme, že takový polynom má stupeň n. Definiční obor každého polynomu je $D_p = \mathbb{C}$, obor hodnot závisí na každé konkrétní volbě koeficientů a_k.

Poznámka. My budeme uvažovat výhradně polynomy reálné, tj. $a_k \in \mathbb{R}$ pro $\forall k = 0, 1, \ldots, n$, a s $D_p = \mathbb{R}$.

Poznámka.

- Nulový polynom: $p(x) = 0$.
- Polynom 0. stupně: $p(x) = K$, kde $K \neq 0$.
- Polynom 1. stupně se nazývá *lineární* polynom.
- Polynom 2. stupně se nazývá *kvadratický* polynom.
- Polynom 3. stupně se nazývá *kubický* polynom.
- Polynom 4. stupně se nazývá *bikvadratický* polynom.

Definice 2.5 (Kořen polynomu)
Bod $x_0 \in \mathbb{R}$ takový, že $p(x_0) = 0$, nazýváme kořenem (též nulovým bodem) polynomu p.

Věta 2.6 (Základní věta algebry)
Každý polynom stupně alespoň prvního má v $\mathbb{C}$ alespoň jeden kořen.

Věta 2.7
Každý polynom stupně n má nejvýše n kořenů.

Poznámka. Dalšími základními funkcemi jsou:

- Odmocnina $\sqrt{x}$, $D_{\sqrt{}} = \mathbb{R}_0^+$, $H_{\sqrt{}} = \mathbb{R}_0^+$
- Racionální funkce $\frac{1}{x}$, $D_{\frac{1}{x}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $H_{\frac{1}{x}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- Absolutní hodnota $|x|$, $D_{|x|} = \mathbb{R}$, $H_{|x|} = \mathbb{R}_0^+$
- Funkce signum $\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1 & \text{pro } x > 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \\ -1 & \text{pro } x < 0 \end{cases}$

2.3 Algebraické kombinace funkcí

Definice 2.8 (Algebraické kombinace funkcí)
Nechť f je funkce s definičním oborem D_f a g je funkce s definičním oborem D_g, nechť $D_f = D_g$. Pak lze definovat následující nové funkce:

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
- $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- $g(x) \neq 0\ \forall x \in D_g : (\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Definice 2.9 (Skládání funkcí)
Nechť $(\forall x \in D_g)(g(x) \in D_f)$, pak $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Poznámka. Skládání funkcí není komutativní, tj. obecně $f \circ g \neq g \circ f$.

2.4 Prostá a inverzní funkce

Definice 2.10 (Prostá funkce)
Funkce f je **prostá**, právě když neexistují dva různé body z D_f na kterých by f nabývala stejné hodnoty. Tj. $(\forall x_1, x_2 \in D_f)(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$.

Věta 2.11 (O existenci a jednoznačnosti inverzní funkce)
Je-li funkce f prostá, pak **existuje právě jedna** funkce g s definičním oborem $D_g = H_f$ taková, že $f\big(g(x)\big) = x$ pro $\forall x \in D_g$.

Důkaz. Pro dané $y \in H_f$ existuje díky prostotě f právě jedno $x \in D_f$ tak, že $y = f(x)$. Toto x označíme $g(y) := x$ a dostaneme jednoznačný předpis $g : y \mapsto x$, který vyhovuje definici funkce. □

Definice 2.12 (Inverzní funkce)
Funkci g z předchozí věty značíme $g = f^{-1}$ a nazýváme funkcí **inverzní** k funkci f.

Věta 2.13
Funkce f^{-1} je inverzní k f právě tehdy, když $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}$ a $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}$.

Věta 2.14 (Inverze složené funkce)

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}.$$

Důkaz. $f(g(x)) = y$, odkud $g(x) = f^{-1}(y)$ odkud $x = g^{-1}(f^{-1}(y))$. □

2.5 Parita

Definice 2.15 (Parita funkce)
Nechť funkce f má definiční obor symetrický dle 0. Pak říkáme, že funkce f je

- **sudá** $\Leftrightarrow (\forall x \in D_f)(f(-x) = f(x))$.
- **lichá** $\Leftrightarrow (\forall x \in D_f)(f(-x) = -f(x))$.

2.6 Obraz, vzor

Definice 2.16 (Obraz množiny)
Obraz množiny M při zobrazení f je množina

$$f(M) = \{y : (\exists x \in M)(f(x) = y)\}.$$

Definice 2.17 (Vzor množiny)
Vzor množiny M při zobrazení f je množina

$$f^{-1}(M) = \{x : (\exists y \in M)(f(x) = y)\}.$$

3 Limita funkce

3.1 Definice

Definice 3.1 (Limita funkce f v bodě a)
Nechť pro nějaké $a \in \mathbb{R}$ a $p > 0$ je sjednocení $(a-p, a) \cup (a, a+p)$ částí definičního oboru D_f. Potom řekneme, že limita funkce f v bodě a je ℓ:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \quad \Leftrightarrow \quad (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (a-p, a) \cup (a, a+p)\ )(0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon).$$

Definice 3.2 (Limita funkce f v bodě a zprava)
Nechť pro nějaké $a \in \mathbb{R}$ a $p > 0$ je sjednocení $(a, a+p)$ částí definičního oboru D_f. Potom řekneme, že limita funkce f v bodě a **zprava** je ℓ:

$$\lim_{x \to a+} f(x) = \ell \quad \Leftrightarrow \quad (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (a, a+p)\ )(a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon).$$

Definice 3.3 (Limita funkce f v bodě a zleva)
Nechť pro nějaké $a \in \mathbb{R}$ a $p > 0$ je sjednocení $(a-p, a)$ částí definičního oboru D_f. Potom řekneme, že limita funkce f v bodě a **zleva** je ℓ:

$$\lim_{x \to a-} f(x) = \ell \quad \Leftrightarrow \quad (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (a-p, a)\ )(a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon).$$

Věta 3.4 (Vztah existence limity a existence limit zleva a zprava)

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a+} f(x) = \ell \wedge \lim_{x \to a-} f(x) = \ell$$

3.2 Vlastnosti limity

Lemma 3.5

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to a} |f(x)| = 0.$$

Důkaz. Plyne z přímo z definice limity. □

Věta 3.6 (Ekvivalence zápisů limity)
Následující výroky jsou ekvivalentní:

1. $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$,
2. $\lim_{x\to a} f(x) - \ell = 0$,
3. $\lim_{x\to a} |f(x) - \ell| = 0$,
4. $\lim_{h\to 0} f(a+h) = \ell$.

Věta 3.7 (Vlastnosti limity funkce)
Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ a $\lim_{x\to a} g(x) = m$, kde $\ell, m \in \mathbb{R}$. Potom:

(i) $\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \ell + m$,

(ii) $\lim_{x\to a}(f-g)(x) = \ell - m$,

(iii) $\lim_{x\to a}(fg)(x) = \ell m$,

(iiii) pokud navíc $m \neq 0$, pak $\lim_{x\to a} \frac{f}{g}(x) = \frac{\ell}{m}$,

Důkaz. Plyne přímo z definice limity. □

Důsledek 3.8
Nechť p je polynom. Potom $\forall a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to a} p(x) = p(a).$$

3.3 Jednoznačnost limity

Věta 3.9 (O jednoznačnosti limity funkce)

$$\left(\lim_{x\to a} f(x) = \ell \quad \wedge \quad \lim_{x\to a} f(x) = m\right) \quad \Rightarrow \quad \ell = m.$$

Důkaz. Sporem.
Předpokládejme, že $\lim_{x\to a} f(x) = \ell \wedge \lim_{x\to a} f(x) = m \wedge \ell \neq m$.
Zvolme $\varepsilon = \frac{1}{2}|\ell - m| > 0$ a z definic limit existují pro toto ε čísla $\delta_\ell > 0$ a $\delta_m > 0$ tak, že

$$0 < |x-a| < \delta_\ell \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$
$$0 < |x-a| < \delta_m \Rightarrow |f(x) - m| < \varepsilon$$

Definujme $\delta = \min\{\delta_\ell, \delta_m\}$, pak totiž pro $0 < |x-a| < \delta$ platí, že

$$\varepsilon = \frac{1}{2}|\ell - m| = \frac{1}{2}|f(x) - m - (f(x) - \ell)| \underset{\substack{\uparrow \\ \triangle\neq}}{\leq} \frac{1}{2}\underbrace{|f(x) - \ell|}_{<\varepsilon} + \frac{1}{2}\underbrace{|f(x) - m|}_{<\varepsilon} < \varepsilon.$$

Dohromady dostáváme nerovnici $\varepsilon < \varepsilon$, což je spor. □

3.4 Nekonečné limity

Definice 3.10 (Nekonečná limita funkce f v bodě a)
Nechť pro nějaké $a \in \mathbb{R}$ a $p > 0$ je sjednocení $(a-p, a) \cup (a, a+p)$ částí definičního oboru D_f.Potom

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad (\forall \alpha > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (a-p, a)\cup(a, a+p)\ )(0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > \alpha),$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad (\forall \alpha > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (a-p, a)\cup(a, a+p)\ )(0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) < -\alpha).$$

Poznámka. Analogicky definice jednostranných limit

- $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = -\infty.$

Věta 3.11 (Vlastnosti nekonečných limit)

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty \ \wedge\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell \neq -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty \ \wedge\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell \neq +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty \ \wedge\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}(f\cdot g)(x) = (\operatorname{sign} \ell)\cdot\infty$
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty \ \wedge\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}(f\cdot g)(x) = (\operatorname{sign} \ell)\cdot(-\infty)$
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}\left(\frac{1}{f}\right)(x) = 0$

Poznámka. Výrazy IND: „$\infty - \infty$“, „$0\cdot\infty$“, „$\frac{\infty}{\infty}$“, „$\frac{1}{0}$“ a „$\frac{0}{0}$“ jsou neurčité, je potřeba provést algebraické manipulace před samotnou limitou.

Definice 3.12 (Limita funkce v nekonečnu)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \quad \Leftrightarrow \quad (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x > \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon),$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l \quad \Leftrightarrow \quad (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x < -\delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon),$$

Poznámka. Analogicky definice

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$

3.5 Věta o limitě sevřené funkce

Věta 3.13 (Sendvičová věta o limitě sevřené funkce)
Buď $p > 0$ a nechť pro funkce d, f a h platí, že $(a-p,a) \cup (a,a+p) \subset D_f \cap D_d \cap D_h$ a pro všechna $x \in (a-p,a) \cup (a,a+p)$ je $d(x) \leq f(x) \leq h(x)$. Potom když $\lim_{x\to a} d(x) = \lim_{x\to a} h(x) = \ell$, pak existuje limita funkce f v bodě a a je rovna ℓ

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell.$$

Důkaz. Pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje z definic limit δ_d a δ_h tak, že pro všechna x taková, že

- $0 < |x-a| < \delta_d \Rightarrow \ell - \varepsilon < d(x) < \ell + \varepsilon$
- $0 < |x-a| < \delta_h \Rightarrow \ell - \varepsilon < h(x) < \ell + \varepsilon$

Zvolíme-li $\delta = \min\{p, \delta_d, \delta_h\}$, platí pro všechna x taková, že $0 < |x-a| < \delta$, nerovnosti

$$\ell - \varepsilon < d(x) < f(x) < h(x) < \ell + \varepsilon,$$

čímž je věta dokázána. □

Poznámka. Věta 3.13 platí i pro jednostranné limity a limity v nekonečnu.

3.6 Goniometrické limity

Poznámka. Základní vztahy mezi goniometrickými funkcemi:

- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

Lemma 3.14 (Snížení mocniny u goniometrických funkcí)

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$
$$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

Důkaz. Větu dokážeme pomocí součtových vzorců pro funkci $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$. □

Věta 3.15

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

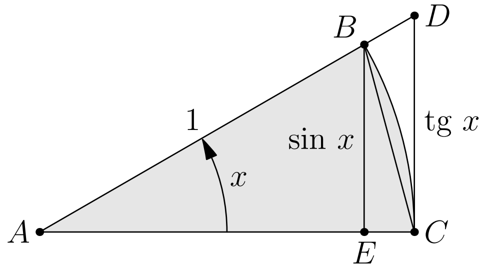
Důkaz. Nechť $x > 0$ je úhel v radiánech. Z obrázku 1 je patrná následující nerovnost mezi plochami AEB, ACB a ACD:

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x,$$

odkud

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Z věty o limitě sevřené funkce snadno dostáváme tvrzení, které platí i o pro $x < 0$ neb funkce $\frac{\sin x}{x}$ je sudá. □



Obrázek 1: Ilustrace k důkazu Věty 3.15.

3.7 Asymptota funkce

Definice 3.16 (Asymptota)
Přímku $y = kx + q$ nazveme asymptotou funkce f v $+\infty$, resp. $-\infty$, platí-li, že

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - kx - q = 0,$$

resp.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - kx - q = 0.$$

Definice 3.17 (Vertikální asymptota)
Přímku $x = a$ nazveme vertikální asymptotou funkce f, má-li funkce f v bodě a nekonečnou limitu zleva nebo zprava.

Věta 3.18 (Nalezení asymptoty)
$y = kx + q$ je asymptotou funkce f v $\pm\infty$ právě tehdy, když

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \tag{3a}$$

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - kx. \tag{3b}$$

Důkaz. Důkaz ekvivalence provedeme ve dvou krocích.
1. „⇒“: Z definice asymptoty platí $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - kx - q = 0$, odkud přímo plyne (3b). Tvrzení (3a) dostaneme tak, že zkoumáme limitu

$$0 = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x) - kx - q}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} - k - \frac{q}{x} = \left(\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}\right) - k - 0.$$

2. „⇐“: Z (3b) rovnou plyne definice asymptoty $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - kx - q = 0$. □

4 Spojitost funkce

4.1 Definice

Definice 4.1 (Spojitost funkce v bodě a)
Nechť pro nějaké $p > 0$ je sjednocení $(a - p, a + p)$ částí D_f. Řekneme, že funkce f je spojitá v bodě a, právě když

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Definice 4.2 (Spojitost funkce v bodě a zleva a zprava)
Nechť pro nějaké $p > 0$ je sjednocení $(a-p, a]$, resp. $[a, a+p)$ částí D_f. Řekneme, že funkce f je **spojitá** v bodě a zleva, resp. zprava, právě když

$$\lim_{x \to a-} f(x) = f(a), \quad \text{resp.} \quad \lim_{x \to a+} f(x) = f(a).$$

Definice 4.3 (Spojitost na uzavřeném intervalu)
Řekneme, že funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$, právě když je spojitá v každém bodě $x \in (a, b)$, spojitá zprava v bodě a a zleva v bodě b.

Definice 4.4 (Odstranitelná nespojitost)
Funkce f má v bodě a **odstranitelnou nespojitost** $\Leftrightarrow$ $\lim_{x \to a} f(x)$ existuje, ale $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$

Definice 4.5 (Skoková nespojitost)
Funkce f má v bodě a **skokovou nespojitost** $\Leftrightarrow$ existují obě konečné jednostranné limity, ale nerovnají se.

Definice 4.6 (Podstatná nespojitost)
Funkce f má v bodě a **podstatnou nespojitost** $\Leftrightarrow$ alespoň jedna jednostranná limita je nekonečná nebo neexistuje.

Věta 4.7
Funkce f je spojitá v bodě a $\Leftrightarrow$ Funkce f je spojitá v bodě a zleva i zprava.

Věta 4.8
Nechť jsou funkce f a g spojitá v bodě a a buď $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom funkce $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, $\alpha\, f$ i $\frac{f}{g}$ pro $g(a) \neq 0$ jsou spojité v a.

Věta 4.9
Nechť je funkce g spojitá v bodě a a funkce f spojitá v bodě $g(a)$. Potom funkce $f \circ g$ je spojitá v a.

4.2 Vlastnosti spojitých funkcí

Věta 4.10 (Bolzano – o existenci nulového bodu spojité funkce)
Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$ a $f(a)f(b) < 0$. Potom existuje $c \in (a, b)$ tak, že $f(c) = 0$.

Důkaz. Obrázkový – graf spojité funkce nutně musí protnout osu x, pokud $f(a)$ a $f(b)$ mají opačná znamení. □

Věta 4.11 (Darboux – o existenci řešení $f(c) = d$ pro spojitou funkci f)
Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$. Potom pro každé číslo d ležící mezi $f(a)$ a $f(b)$) existuje $c \in (a, b)$, že $f(c) = d$.

Důkaz. Je-li f spojitá funkce, je i $f - d$ je spojitá a pro d ležící mezi $f(a)$ a $f(b)$ platí, že $(f(a) - d)(f(b) - d) \leq 0$. Proto podle Věty 4.10 aplikované na funkci $f - d$ existuje $c \in (a, b)$ tak, že $f(c) - d = 0$. □

Definice 4.12 (Maximum a minumum funkce)
Řekneme, že funkce f má v bodě $a \in D_f$ **maximum**, resp. **minimum** právě tehdy, když $f(a) \geq f(x)$, resp. $f(a) \leq f(x)$ pro všechny $x \in D_f$.

Definice 4.13 (Omezená funkce)
Řekneme, že funkce f je omezená na množině $M \subset D_f$ $\Leftrightarrow$ $(\exists K > 0)(\forall x \in M)(|f(x)| \leq K)$.

Věta 4.14 (Weierstrass – extrémy spojité funkce na uzavřeném intervalu)
Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$. Potom funkce f je omezená a nabývá na $[a, b]$ svého minima i maxima, tj. $\exists c \in [a, b]$ a $\exists d \in [a, b]$ tak, že funkce f nabývá v bodě c svého maxima a v bodě d svého minima.

5 Derivace funkce

5.1 Definice

Definice 5.1 (Derivace funkce f v bodě a)
Pokud existuje limita

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h},$$

nazýváme tuto limitu derivací funkce f v bodě a a značíme $f'(a)$, $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$ nebo $f^{(1)}(a)$.

Definice 5.2 (Jednostranné derivace)
Pokud existuje limita

$$\lim_{x \to a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0-} \frac{f(a + h) - f(a)}{h},$$

resp.

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h},$$

nazýváme tuto limitu derivací funkce f v bodě a zleva, resp. zprava a značíme $f'_-(a)$, resp. $f'_+(a)$.

Věta 5.3 (O limitě derivace)
Nechť pro funkci f a bod $a \in D_f$ platí, že

1. $\exists \delta > 0$ tak, že f je diferencovatelná na $(a - \delta, a)$, resp. $(a, a + \delta)$,
2. funkce f je spojitá v bodě a zleva, resp. zprava,
3. $\exists \lim\limits_{x \to a-} f'(x)$, resp. $\exists \lim\limits_{x \to a+} f'(x)$.

Potom existuje $f'_-(a)$, resp. $f'_+(a)$ tak, že platí

$$f'_-(a) = \lim_{x \to a-} f'(x), \quad \text{resp.} \quad f'_+(a) = \lim_{x \to a+} f'(x).$$

Poznámka. Derivace vyšších řádů $f^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} f(x)$ n. derivace. Definujeme pomocí indukce $f^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{(n-1)}(x)$, $n \in \mathbb{N}$.

5.2 Pravidla pro derivování

Věta 5.4 (Pravidla pro derivování)
Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$, f a g mají v bodě x konečnou derivaci. Potom

1. $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$,
2. $(\alpha f)'(x) = \alpha f'(x)$
3. $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,

4. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$, $\quad$ pokud $g(x) \neq 0$

Důkaz. Tvrzení 1. a 2. plynou přímo z definice derivace.

3.

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) \overbrace{-f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x)}^{0} - f(x)g(x)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \\
&= f(x)g'(x) + f'(x)g(x)
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x+h) - \left(\frac{f}{g}\right)(x)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}\right) = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{h\ g(x)g(x+h)} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x) \overbrace{-f(x)g(x) + f(x)g(x)}^{0} - f(x)g(x+h)}{h\ g(x)g(x+h)} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h)-f(x))g(x) \ - \ f(x)(g(x+h)-g(x))}{h\ g(x)g(x+h)} = \\
&= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}
\end{aligned}$$

□

Věta 5.5 (Derivace funkce x^n)

$$f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = nx^{n-1}.$$

Důkaz. Důkaz matematickou indukcí pro $n \in \mathbb{N}$. □

Věta 5.6 (Vztah derivace a spojitosti)
Nechť funkce f má v bodě a konečnou derivaci. Pak je v bodě a spojitá.

Důkaz.

$$\lim_{h\to 0} f(a+h) - f(a) = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h}(f(a+h)-f(a)) = \lim_{h\to 0} h \underbrace{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}_{\downarrow \atop f'(a)\in\mathbb{R}} = 0,$$

odkud $\lim\limits_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$. □

Věta 5.7 (Leibnizovo pravidlo)
Nechť funkce f a g mají konečnou derivaci n. řádu. Pak

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Poznámka. Nultá derivace funkce $f^{(0)}$ označuje původní funkci f, tj. $f^{(0)} = f$.

Poznámka. Kombinační číslo $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ pro $n \in \mathbb{N}, k \in 0, ..., n$

Poznámka. Pro $n = 1$ dává Leibnizovo pravidlo $(f \cdot g)' = f'g + fg'$.

5.3 Derivace složené funkce

Věta 5.8 (Řetězové pravidlo)
Nechť funkce g má konečnou derivaci v a a funkce f má konečnou derivaci v bodě $g(a)$. Potom

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

Důkaz.

$$\lim_{x \to a} \frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

□

Důsledek 5.9 (Řetězové pravidlo pro více funkcí)

$$(f_1 \circ f_2 \circ f_3 \circ \cdots \circ f_n)' = f_1' \; f_2' \; f_3' \; \ldots \; f_n',$$

kde jsou kvůli přehlednosti vynechány body, ve kterých jsou derivace funkcí vyčísleny.

5.4 Derivace inverzní funkce

Věta 5.10 (Derivace inverzní funkce)
Nechť funkce f je prostá a f^{-1} je její inverzní funkce. Nechť funkce f má konečnou derivaci v bodě $x = f^{-1}(y)$. Potom

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Důkaz. Důkaz vychází z Věty 2.11 o inverzní funkci: $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}$ a Věty 5.8 o derivaci složené funkce takto:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\Big(f(f^{-1}(y))\Big) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\Big(y\Big),$$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\Big(\underbrace{f^{-1}(y)}_{x}\Big) \cdot \frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}y}\Big(y\Big) = 1,$$

odkud vydělením

□

5.5 Tečna a normála

Věta 5.11 (Rovnice tečny)
Nechť existuje konečná derivace funkce f v bodě a. Potom rovnice tečny $t_f(a)$ ke grafu funkce f v bodě a má rovnici

$$t_f(a) : y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

Důkaz. Nechť pro malé h je s_h sečna procházející body $[a, f(a)]$ a $[a + h, f(a + h]$. Tato sečna má rovnici $s_h : y = k(h)x + q(h)$, kde

$$k(h) = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}, \quad q(h) = f(a) - k(h)a.$$

Po limitním přechodu $h \to 0$ se sečna s_h stane tečnou $t_f(a)$ s rovnicí $t_f(a) : y = kx + q$, kde

$$k = \lim_{h \to 0} k(h) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = f'(a), \quad q = f(a) - f'(a)a.$$

Odtud plyne tvrzení věty. □

Věta 5.12 (Rovnice normály)
Nechť existuje konečná nenulová derivace funkce f v bodě a. Potom rovnice normály $n_f(a)$ ke grafu funkce f v bodě a má rovnici

$$n_f(a) : y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a).$$

Důkaz. Normála $n_f(a)$ ke grafu f v bodě a je přímka kolmá na tečnu $t_f(a)$ procházející bodem $[a, f(a)]$. Podle Věty 5.11 má tečna $t_f(a)$ rovnici v normálním tvaru

$$t_f(a) : f'(a)x - y + f(a) - af'(a) = 0,$$

kde koeficienty u x a y tvoří normálový vektor $(f'(a), -1)$. K němu kolmý vektor $(1, f'(a))$ je pak normálovým vektorem normály $n_f(a)$ s rovnicí v normálním tvaru

$$n_f(a) : x + f'(a)y + C = 0.$$

Konstanta C se určí z podmíky protnutí $n_f(a)$ a grafu f v bodě a jako $C = -a - f'(a)f(a)$. Odtud již snadno plyne tvrzení věty. □

5.6 Derivace cyklometrických funkcí

5.6.1 Funkce arcsin

Funkce sin je prostá na intervalu $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ a má inverzní funkci, kterou značíme arcsin.

$$D_{\arcsin} = H_{\sin} = [-1, 1]$$
$$H_{\arcsin} = D_{\sin} = [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]$$

x [rad]	$\arcsin y$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	y	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$

Věta 5.13 (Derivace funkce arcsin)

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \text{na} \quad (-1, 1)$$

Důkaz. Podle Věty 5.10: $(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'}$, kde $x = \sin y$. Položíme-li $y = \arcsin x$, máme vztah

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}.$$

Už stačí jen upravit pravou stranu. Použijeme vztah mezi sin a cos: $\cos z = \sqrt{1 - \sin^2 z}$, který platí pro $\forall z \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, kde dosadíme $z = \arcsin x$:

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1 - x^2}.$$

□

5.6.2 Funkce arccos

Funkce cos je prostá na intervalu $[0, \pi]$ a má inverzní funkci, kterou značíme arccos.

$$D_{\arccos} = H_{\cos} = [-1, 1]$$
$$H_{\arccos} = D_{\cos} = [0, \pi]$$

x [rad]	$\arccos y$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	y	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$

Lemma 5.14

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

Důkaz. Rovnost

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$$

je ekvivalentní rovnosti

$$x = \sin(\arcsin x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right).$$

Použijeme-li součtový vzorec pro funkci sin na pravé straně této rovnosti, dostaneme

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) = \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1}\cos(\arccos x) - \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0}\sin(\arccos x) = x.$$

□

Věta 5.15 (Derivace funkce arccos)

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \text{na} \quad (-1, 1)$$

Důkaz. Plyne z Lemma 5.14. □

5.6.3 Funkce arctg

Funkce tg je prostá na intervalu $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a má inverzní funkci, kterou značíme arctg .

$$D_{\operatorname{arctg}} = H_{\operatorname{tg}} = \mathbb{R}$$
$$H_{\operatorname{arctg}} = D_{\operatorname{tg}} = (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2})$$
$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x = \tfrac{\pi}{2}$$
$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\tfrac{\pi}{2}$$

x [rad]	$\operatorname{arctg} y$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{tg} x$	y	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	nedef.

Věta 5.16 (Derivace funkce arctg)

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{na} \quad \mathbb{R}$$

Důkaz. Podle Věty 2.11: $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'}$, kde $x = \operatorname{tg} y$. Položíme-li $y = \operatorname{arctg} x$, máme vztah

$$(\operatorname{arctg} x)' = \cos^2(\operatorname{arctg} x).$$

Už stačí jen upravit pravou stranu. Použijeme následující převod mezi cos a tg :

$$\frac{1}{\cos^2 z} = \frac{\cos^2 z + \sin^2 z}{\cos^2 z} = 1 + \operatorname{tg}^2 z,$$

odkud

$$\cos^2 z = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 z},$$

kde dosadíme $z = \operatorname{arctg} x$. □

5.6.4 Funkce arccotg

Funkce cotg je prostá na intervalu $(0, \pi)$ a má inverzní funkci, kterou značíme arccotg .

$$\begin{aligned}
D_{\operatorname{arccotg}} &= H_{\operatorname{cotg}} = \mathbb{R} \\
H_{\operatorname{arccotg}} &= D_{\operatorname{cotg}} = (0, \pi) \\
\lim_{x\to+\infty} &\operatorname{arccotg} x = 0 \\
\lim_{x\to-\infty} &\operatorname{arccotg} x = \pi
\end{aligned}$$

x [rad]	arccotg y	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
cotg x	y	nedef.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Lemma 5.17

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}.$$

Důkaz. Rovnost

$$\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccotg} x$$

je ekvivalentní rovnosti

$$x = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arccotg} x\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arccotg} x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arccotg} x\right)}.$$

Použijeme-li součtový vzorec pro funkci sin a cos na pravé straně této rovnosti, dostaneme

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arccotg} x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arccotg} x\right)} = \frac{\overbrace{\sin\frac{\pi}{2}}^{1}\cos(\operatorname{arccotg} x) - \overbrace{\cos\frac{\pi}{2}}^{0}\sin(\operatorname{arccotg} x)}{\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0}\cos(\operatorname{arccotg} x) + \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1}\sin(\operatorname{arccotg} x)} = \operatorname{cotg}(\operatorname{arccotg} x) = x.$$

□

Věta 5.18 (Derivace funkce arccotg)

$$(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2} \quad \text{na} \quad \mathbb{R}$$

Důkaz. Plyne z Lemma 5.17. □

6 Užití derivace k vyšetřování funkce

6.1 Věty o přírůstku funkce

Lemma 6.1
Pokud $f'(a) > 0$ (nebo též $f'(a) = +\infty$), pak existuje $\varepsilon > 0$ tak, že pro všechna $h \in (0, \varepsilon)$ platí

$$f(a-h) < f(a) < f(a+h).$$

Pokud $f'(a) < 0$ (nebo též $f'(a) = -\infty$), pak existuje $\varepsilon > 0$ tak, že pro všechna $h \in (0, \varepsilon)$ platí

$$f(a-h) > f(a) > f(a+h).$$

Důkaz. Dokážeme první tvrzení.
Z definice derivace v bodě a víme $f'(a) = \lim\limits_{k \to 0} \frac{1}{k}(f(a+k) - f(a)) > 0$.
V definici této limity pro námi zvolené $\varepsilon = f'(a) > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že $\forall k \in (-\delta, \delta)$, $k \neq 0$,

$$\left| \frac{f(a+k) - f(a)}{k} - f'(a) \right| < \varepsilon = f'(a),$$

tj.

$$-f'(a) < \frac{f(a+k) - f(a)}{k} - f'(a) < f'(a),$$

tj.

$$0 < \frac{f(a+k) - f(a)}{k} < 2f'(a).$$

Pro $k > 0$ dostáváme $f(a+k) - f(a) > 0$ a volíme $h = k$; celkem: $f(a) < f(a+h)$.
Pro $k < 0$ dostáváme $f(a+k) - f(a) < 0$ a volíme $h = -k$; celkem: $f(a-h) < f(a)$. □

Věta 6.2 (Rolle)
Nechť funkce f je spojitá na $[a, b]$, má konečnou derivaci na (a, b) a nechť navíc $f(a) = f(b)$. Potom $\exists c \in (a, b)$ tak, že $f'(c) = 0$.

Důkaz. Podle Weierstrassovy Věty 4.14 pro f spojitou na $[a, b]$ existuje $f_{\min}$ a $f_{\max}$ a může nastat právě jeden z následujících dvou případů:
1. f je konstantní $\Rightarrow f' = 0$ pro $\forall x$.
2. f není konstantní a $f_{\min}$ nebo $f_{\max}$ se nabývá uvnitř (a, b) v nějakém bodě c, kde nutně $f'(c) = 0$, jinak bychom byli ve sporu s Lemma 6.1. □

Věta 6.3 (Lagrange)
Nechť funkce f je spojitá na $[a, b]$ a diferencovatelná na (a, b). Potom $\exists c \in (a, b)$ tak, že

$$f'(c) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}.$$

Důkaz. Definujme pomocnou funkci $g(x) = f(x) - Kx$, kde K je nějaké číslo zvolené tak, abychom mohli na funkci g použít Rolleho Větu 6.2, tj. chceme splnit předpoklad $g(a) = g(b)$:

$$g(a) = f(a) - Ka \stackrel{?}{=} g(b) = f(b) - Kb,$$

odkud

$$K = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}.$$

Pak podle Rolleho Věty 6.2 existuje $c \in (a, b)$ tak, že $g'(c) = 0$ a tudíž

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(a) - f(b)}{a - b} = 0.$$

□

Důsledek 6.4
Nechť funkce f je spojitá na $[a, b]$ a nechť $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$. Potom f je konstantní funkce.

Důkaz. Sporem. Předpokládáme, že f je spojitá na $[a, b]$, $\exists f'$ na (a, b) a $\exists c, d \in [a, b]$ tak, že $f(c) \neq f(d)$ (tj. f není konstantní). Pak podle Lagrangeovy Věty 6.3 existuje $e \in (c, d)$ tak, že $f'(e) = \frac{f(d)-f(c)}{d-c}$, což je rovno dle předpokladu 0, tj. $f(d) = f(c)$ a to je spor. □

Věta 6.5
Nechť funkce f a g jsou spojité na intervalu $[a, b]$ a nechť $f'(x) = g'(x)$ na intervalu (a, b). Potom $\exists C \in \mathbb{R}$ tak, že $f(x) = g(x) + C \quad \forall x \in [a, b]$.

Důkaz. Definujme pomocnou funkci $h = f - g$, která je spojitá na $[a, b]$ a pro $\forall x \in (a, b)$ $h'(x) = 0$. Podle Důsledku 6.4 je tato funkce konstantní a proto

$$h(x) = f(x) - g(x) = K.$$

□

6.2 Monotonie

Definice 6.6 (Monotonie funkce)
Řekneme, že funkce f na intervalu J

ostře roste	$\Leftrightarrow$	$(\forall x_1, x_2 \in J)(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$
roste (neklesá)	$\Leftrightarrow$	$(\forall x_1, x_2 \in J)(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2))$
ostře klesá	$\Leftrightarrow$	$(\forall x_1, x_2 \in J)(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$
klesá (neroste)	$\Leftrightarrow$	$(\forall x_1, x_2 \in J)(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2))$

Věta 6.7 (Vztah derivace a monotonie)
Nechť funkce f je diferencovatelná na intervalu J. Potom platí

$f'(x) > 0 \quad \forall x \in J \quad \Rightarrow \quad f$ je ostře rostoucí na J.
$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in J \quad \Rightarrow \quad f$ je rostoucí (neklesající) na J.
$f'(x) < 0 \quad \forall x \in J \quad \Rightarrow \quad f$ je ostře klesající na J.
$f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in J \quad \Rightarrow \quad f$ je klesající (nerostoucí) na J.

6.3 Lokální a globální extrémy

Definice 6.8 (Lokální extrém funkce)
Řekneme, že f má v bodě $a \in D_f$

ostré lokální minimum	$\Leftrightarrow$	$(\exists \varepsilon > 0)(\forall x \in D_f)(0 < \lvert x - a\rvert < \varepsilon \Rightarrow f(x) > f(a))$
lokální minimum	$\Leftrightarrow$	$(\exists \varepsilon > 0)(\forall x \in D_f)(0 < \lvert x - a\rvert < \varepsilon \Rightarrow f(x) \geq f(a))$
ostré lokální maximum	$\Leftrightarrow$	$(\exists \varepsilon > 0)(\forall x \in D_f)(0 < \lvert x - a\rvert < \varepsilon \Rightarrow f(x) < f(a))$
lokální maximum	$\Leftrightarrow$	$(\exists \varepsilon > 0)(\forall x \in D_f)(0 < \lvert x - a\rvert < \varepsilon \Rightarrow f(x) \leq f(a))$

Věta 6.9 (Nutná podmínka existence extrému)
Má-li funkce f v bodě $a \in D_f$ lokální extrém, pak $f'(a) = 0$ nebo $f'(a)$ neexistuje.

Důkaz. Sporem. Předpokládáme-li, že $\exists f'(a)$ a zároveň $f'(a) \neq 0$, pak:
$f'(a) > 0 \quad \Rightarrow \quad f$ je dle Věty 6.7 v bodě a ostře rostoucí,
$f'(a) < 0 \quad \Rightarrow \quad f$ je dle Věty 6.7 v bodě a ostře klesající,
což je spor s předpokladem existence lokálního extrému v bodě a. □

Poznámka. **Globální extrémy** spojité a diferencovatelné funkce f na intervalu $[a, b]$ vyšetříme tak, že nalezneme všechny lokální extrémy na (a, b) a porovnáme s hraničními hodnotami $f(a)$ a $f(b)$.

Definice 6.10 (Stacionární bod)
Stacionární bod funkce f je takový bod, ve kterém je derivace funkce rovna 0 nebo neexistuje.

6.4 Test extrému dle 1. derivace

Věta 6.11 (Test extrému funkce dle 1. derivace)
Nechť funkce f je spojitá v bodě $a \in D_f$ a nechť bod a je stacionárním bodem funkce f. Pokud existuje $\delta > 0$ tak, že

- $f' > 0$ na $(a-\delta, a)$ a $f' < 0$ na $(a, a+\delta)$, potom f má v bodě a lokální maximum.
- $f' < 0$ na $(a-\delta, a)$ a $f' > 0$ na $(a, a+\delta)$, potom f má v bodě a lokální minimum.
- f' má stejné znamení v $(a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$, potom f nemá v bodě a lokální extrém.

6.5 Test extrému dle 2. derivace

Věta 6.12 (Test extrému funkce dle 2. derivace)
Nechť funkce f je spojitá v bodě $a \in D_f$ a nechť $f'(a) = 0$.

1. Pokud $f''(a) < 0$, potom f má v bodě a ostré lokální maximum,
2. Pokud $f''(a) > 0$, potom f má v bodě a ostré lokální minimum.

Důkaz. Dokážeme první tvrzení. Pokud $f''(a) < 0$, pak f' je ostře klesající v bodě a. Pak $\exists \delta > 0$ tak, že pro každé x_1, x_2: $a - \delta < x_1 < a < x_2 < a + \delta$ platí

$$f'(x_1) > \underbrace{f'(a)}_{0} > f'(x_2)$$

a tudíž podle Věty 6.11 je v bodě a ostré lokální maximum. □

Příklad. Trhovec potřebuje z kruhového papíru o poloměru R udělat kornout o maximálním objemu. Jakou kruhovou výseč je potřeba vystřihnout?
Řešení: α ... úhel v radiánech, r ... poloměr podstavy kuželu
Obvod podstavy kužele je $2\pi r = 2\pi R - R\alpha$, odkud $r = R\left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right)$.
Výška kužele:

$$v = \sqrt{R^2 - r^2} = R\sqrt{1 - \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right)^2} = R\sqrt{\frac{\alpha}{\pi} - \frac{\alpha^2}{4\pi^2}}.$$

Hledáme maximum objemu kužele $V(\alpha) = \frac{\pi}{3} R^3 \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 \sqrt{\frac{\alpha}{\pi} - \frac{\alpha^2}{4\pi^2}}$ pro $\alpha \in (0, 2\pi)$:

$$V'(\alpha) = \frac{R^3}{3}\left(\frac{\alpha}{\pi} - \frac{\alpha^2}{4\pi^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right)\left(1 - 3\frac{\alpha}{\pi} + 3\frac{\alpha^2}{4\pi^2}\right) \overset{!}{=} 0.$$

Řešením této rovnice jsou pro $\alpha \in (-2\pi, 2\pi)$ kořeny $\alpha_{1,2} = 2\pi\left(1 \pm \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$. Nyní stačí aplikovat buď Větu 6.11 nebo Větu 6.12 a ukázat, že pro tato $\alpha_{1,2}$ nabývá funkce $V(\alpha)$ maximum.

6.6 Konvexní a konkávní funkce

Definice 6.13 (Konvexní a konkávní funkce)
Nechť je funkce f diferencovatelná na (a, b). Říkáme, že funkce f je

ryze konvexní	$\Leftrightarrow$	f' je ostře rostoucí na (a, b)
konvexní	$\Leftrightarrow$	f' je rostoucí na (a, b)
ryze konkávní	$\Leftrightarrow$	f' je ostře klesající na (a, b)
konkávní	$\Leftrightarrow$	f' je klesající na (a, b)

Poznámka. Konvexní a konkávní funkce jsme zde definovali pomocí pojmu derivace, tedy pouze pro diferencovatelné funkce. Pojem konvexnosti a konkávnosti funkce lze zavést i pro obecné funkce, viz např. Odstavec 4.7 v [1].

Definice 6.14 (Inflexní bod)
Nechť funkce f je diferencovatelná v bodě a. Řekneme, že bod a je **inflexním bodem** funkce f právě tehdy, když se v bodě a mění charakter funkce f z konvexní na konkávní nebo opačně.

Věta 6.15 (Nutná podmínka existence inflexního bodu)
Buď c inflexní bod. Potom $f''(c) = 0$ nebo $f''(c)$ neexistuje.

6.7 l'Hôpitalovo pravidlo

Věta 6.16 (l'Hôpitalovo pravidlo)
Buď $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$. Nechť f má konečnou derivaci a $g'(x) \neq 0$ na $(a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$ pro nějaké $\delta > 0$. Dále nechť platí jedna ze dvou podmínek:

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 \wedge \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$
2. $\lim\limits_{x\to a} |g(x)| = +\infty$

Potom jestliže existuje limita na levé straně následující rovnice, platí mezi limitami rovnost

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

6.8 Vyšetřování průběhu funkce

Poznámka. Při vyšetřování průběhu funkce f (tj. chceme alespoň zjistit přibližný graf funkce) postupně zkoumáme:

1. definiční obor D_f,
2. limity v krajních bodech D_f,
3. asymtptoty v $\pm\infty$, případně vertikální asymptoty
4. první derivaci funkce f' její definiční obor $(D_{f'} \subseteq D_f)$,
5. intervaly monotonie,
6. druhou derivaci funkce f'' a její definiční obor $D_{f''}$,
7. lokální extrémy funkce f,
8. globální extrémy funkce f na D_f,
9. konvexnost/konkávnost funkce,
10. inflexní body,
11. významné body pro kreslení (extrémy, průsečíky s osami a pod.).

7 Integrální počet

7.1 Primitivní funkce a neurčitý integrál

Definice 7.1 (Primitivní funkce)
Funkci F nazveme primitivní k funkci f na intervalu $[a, b]$, pokud F je spojitá na intervalu $[a, b]$ a platí $F'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in (a, b)$.

Věta 7.2 (O jednoznačnosti primitivní funkce)
Buď funkce F primitivní k funkci f na intervalu (a, b). Potom funkce G je primitivní k funkci f právě když $(\exists C \in \mathbb{R})(\forall x \in (a, b)\ )(F(x) = G(x) + C)$.

Důkaz. Zjevně $F' = G'$, proto z definice 7.1 plyne, že funkce G je primitivní k f. □

Definice 7.3 (Neurčitý integrál)
Nechť pro funkci f existuje primitivní funkce F na (a, b). Množinu všech primitivních funkcí k funkci f nazveme neurčitým integrálem funkce f v intervalu (a, b) a značíme symbolem

$$\int f(x)\, \mathrm{d}x, \quad \text{nebo krátce} \quad \int f.$$

Poznámka.

$$\int f = \int f(x)\mathrm{d}x = \{F : F \text{ je primitivní k } \ f\} = F(x) + C,$$

kde f ... integrand, x ... integrační proměnná, F ... reprezentant (=nějaká primitivní funkce), C ... integrační konstanta.

Věta 7.4 (Linearita integrace)
Buď F, resp. G primitivní funkce k f, resp. g na (a, b) a $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak $F + \alpha G$ je primitivní funkce k $f + \alpha g$ na (a, b).

Důkaz. Plyne z linearity derivace a definice 7.1. □

Věta 7.5 (Per partes)
Nechť f, g mají na (a, b) konečné derivace a funkce $h = fg'$ má v (a, b) primitivní funkci H. Potom funkce $f'g$ má v (a, b) primitivní funkci $fg - H$.
Neboli

$$\int fg' = fg - \int f'g.$$

Důkaz. Stačí ověřit, zda funkce $fg - H$ je primitivní k $f'g$, tj. dle definice 7.1 a pravidla pro derivaci součinu (Věta 5.4)

$$(fg - H)' = f'g + \underbrace{fg'}_{h} - \underbrace{H'}_{h} = f'g + h - h = f'g.$$

□

Věta 7.6 (Substituce)
Nechť f má v (a, b) primitivní funkci F, φ je prostá a má v (α, β) konečnou derivaci φ' a $\varphi(\alpha, \beta) \subset (a, b)$. Potom funkce $F \circ \varphi$ je primitivní funkce $(f \circ \varphi)\varphi'$ v intervalu (α, β). Neboli

$$\int f(z)\, \mathrm{d}z = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)\, \mathrm{d}x = F(\varphi(x)) + C.$$

Důkaz. Stačí ověřit, zda funkce $F \circ \varphi$ je primitivní k $(f \circ \varphi)\varphi'$, tj. dle definice 7.1 a Věty 5.8 (řetězové pravidlo)

$$\Big((F \circ \varphi)(x)\Big)' = F'(\varphi(x))\varphi'(x).$$

□

Lemma 7.7
Pro $n \neq -1$ platí $\displaystyle\int x^n = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$.

7.2 Určitý integrál

Definice 7.8 (Rozdělení intervalu σ)
Rozdělením σ intervalu $[a, b]$ rozumíme množinu bodů $\sigma = \{x_k : k = 0, 1, 2, \dots, n\}$ takovou, že $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots x_{n-1} < x_n = b$. Intervaly $[x_{k-1}, x_k]$ nazýváme částečnými intervaly rozdělení σ pro $k = 1, 2, \dots, n$.

Definice 7.9 (Horní integrální součet $S_f(\sigma)$)
Horní integrální součet $S_f(\sigma)$ funkce f při rozdělení σ je

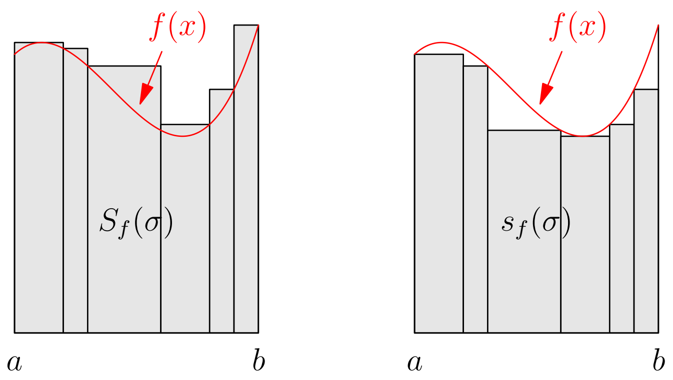
$$S_f(\sigma) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}),$$

kde $M_k = \max\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ pro $k = 1, 2, \dots, n$.

Definice 7.10 (Dolní integrální součet $s_f(\sigma)$)
Dolní integrální součet $s_f(\sigma)$ funkce f při rozdělení σ je

$$s_f(\sigma) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}),$$

kde $m_k = \min\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ pro $k = 1, 2, \dots, n$.



Obrázek 2: Ilustrace k Riemannově definici určitého integrálu

Definice 7.11 (Určitý integrál)
Buď $s_f(\sigma)$, resp. $S_f(\sigma)$ dolní, resp. horní integrální součet funkce f při rozdělení σ intervalu $[a, b]$. Potom jednoznačně určené číslo I, které pro všechna možná rozdělení σ splňuje

$$s_f(\sigma) \leq I \leq S_f(\sigma)$$

se nazývá určitý integrál funkce f od a do b (přes interval (a, b)) a značí se

$$I = \int\limits_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = \int\limits_a^b f.$$

Funkce, která má určitý integrál se nazývá Riemannovsky integrovatelná (integrabilní).

Věta 7.12 (Základní vlastnosti určitého integrálu)

1. $\int\limits_a^b f + \int\limits_b^c f = \int\limits_a^c f$, pokud jednotlivé integrály existují.
2. $\int\limits_a^a f = 0$
3. $\int\limits_a^b f = -\int\limits_b^a f$

Důkaz.

1. Plyne přímo z definice 7.11 nebo též z grafického znázornění integrálu jako plochy pod grafem funkce f pokud $a < b < c$.
2. Z prvního tvrzení je patrné, že pro volbu $a = b = c$ máme rovnost $2\int\limits_a^a f = \int\limits_a^a f$, kterou splňuje pouze $\int\limits_a^a f = 0$.
3. Z prvního a druhého tvrzení dostaneme pro volbu $c = a$ rovnost $\int\limits_a^b f + \int\limits_b^a f = 0$, odkud již plyne třetí tvrzení.

□

Definice 7.13 (Integrál jako funkce horní, resp. dolní meze)
Nechť funkce f je Riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a, b]$. Potom

$$x \mapsto \int\limits_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

nazýváme **integrálem jako funkcí horní meze** a

$$x \mapsto \int\limits_x^b f(t)\mathrm{d}t$$

nazýváme **integrálem jako funkcí dolní meze**.

Lemma 7.14

Funkce $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\mathrm{d}t$ je primitivní funkce k funkci f, tj.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int\limits_a^x f(t)\mathrm{d}t\right) = f(x).$$

Věta 7.15 (Newtonova formule)

Nechť funkce f je spojitá na $[a, b]$ a F její primitivní funkce. Potom

$$\int\limits_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Důkaz. Dle lemmatu 7.14 zkoumejme primitivní funkci F k f ve tvaru

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\mathrm{d}t + K,$$

kde $K \in \mathbb{R}$. Z hodnoty v bodě $x = a$ určíme K takto:

$$F(a) = \int\limits_a^a f(t)\mathrm{d}t + K = 0 + K,$$

odkud $K = F(a)$. Z hodnoty v bodě $x = b$ pak dostaneme tvrzení věty:

$$F(b) = \int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t + F(a).$$

□

Věta 7.16 (Per partes)

Nechť funkce f, g mají na $[a, b]$ spojité derivace. Potom

$$\int\limits_a^b f(x)g'(x) = [f(x)g(x)]_a^b - \int\limits_a^b f'(x)g(x)\ \mathrm{d}x.$$

Důkaz. Plyne z vět 7.5 a 7.15. □

Věta 7.17 (Substituce)

Buď φ je prostá a spojitě diferencovatelná na intervalu $[\alpha, \beta]$ (tj. φ' je spojitá na $[\alpha, \beta]$). Nechť funkce f je spojitá na H_φ. Potom

$$\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\ \mathrm{d}t = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(u)\ \mathrm{d}u.$$

Důkaz. Plyne z vět 7.6 a 7.15. □

7.3 Vlastnosti určitého integrálu

Věta 7.18 (Vlastnosti určitého integrálu)
Nechť $a < b$.

1. Nechť $f \geq 0$ na (a, b). Pak $\int\limits_a^b f \geq 0$.

2. Nechť $f > 0$ na (a, b). Pak $\int\limits_a^b f > 0$.

3. Nechť $f < g$ na (a, b). Pak $\int\limits_a^b f < \int\limits_a^b g$.

4. $\left|\int\limits_a^b f\right| \leq \int\limits_a^b |f|$, přičemž rovnost nastává, pokud je funkce f nezáporná na (a, b).

5. $m(b-a) < \int\limits_a^b f < M(b-a)$, kde $m = \min\{f(x) : x \in [a, b]\}$ a $M = \max\{f(x) : x \in [a, b]\}$.

Věta 7.19 (Věta o střední hodnotě integrálu)
Nechť f a g jsou spojité funkce na intervalu $[a, b]$ a navíc funkce g nezáporná na $[a, b]$. Potom $\exists c \in [a, b]$ tak, že

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\ \mathrm{d}x = f(c) \int\limits_a^b g(x)\ \mathrm{d}x.$$

Důkaz. Označme $m = \min\{f(x) : x \in [a, b]\}$ a $M = \max\{f(x) : x \in [a, b]\}$, pak platí

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x).$$

Integrací přes interval $[a, b]$ dostaneme nerovnost

$$m \int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x \leq \int\limits_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leq M \int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

a) Pokud je $\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x = 0$, pak ze spojitosti g plyne, že $g(x) = 0$ na $[a, b]$ a tudíž je výše uvedená nerovnost splněna.

b) Pokud aspoň v jednom bodě $x_0 \in [a, b]$ je $g(x_0) > 0$, pak ze spojitosti g plyne, že $\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x > 0$ a celou nerovnost můžeme vydělit tímto kladným číslem, aniž by se nerovnosti změnily:

$$m \leq \frac{\int\limits_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\underbrace{\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x}_{Y}} \leq M.$$

Tento výsledek je možné interpretovat také tak, že pro Y ležící mezi m (minimem f) a M (maximem f) existuje ze spojitosti funkce f takové $c \in [a, b]$, že $f(c) = Y$. $\square$

Důsledek 7.20
Nechť f je spojitá na $[a, b]$. Pak existuje $c \in [a, b]$ tak, že

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(c)(b - a).$$

Důkaz. Ve větě 7.19 zvolme $g(x) = 1$. $\square$

8 Transcendentní funkce

8.1 Algebraické a transcendentní funkce

Definice 8.1 (Algebraické číslo)
Algebraické číslo je číslo, které je kořenem polynomu s racionálními koeficienty.

Definice 8.2 (Transcendentní číslo)
Transcendentní číslo je číslo, které není algebraické.

Definice 8.3 (Algebraická funkce)
Algebraická funkce splňuje polynomiální rovnici s polynomiálními koeficienty.

Definice 8.4 (Transcendentní funkce)
Transcendentní funkce je funkce, která není algebraická.

8.2 Logaritmická funkce

Definice 8.5 (Logaritmická funkce)
Logaritmická funkce je nekonstantní diferencovatelná funkce f definovaná na $\mathbb{R}^+$, která pro všechny $x > 0$ a $y > 0$ splňuje

$$f(xy) = f(x) + f(y).$$

Věta 8.6 (Vlastnosti logaritmické funkce)
Buď f logaritmická funkce. Potom

1. $f(1) = 0$
2. $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$
3. $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$
4. $f'(x) = \frac{1}{x}f'(1)$, kde $f'(1)$ odpovídá bázi logaritmu.

Důkaz.

1. $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1) = 2f(1)$ odkud $f(1) = 0$.
2. $0 = f(1) = f(x \cdot \frac{1}{x}) = f(x) + f(\frac{1}{x})$ odkud $f(x) = -f(\frac{1}{x})$.
3. viz 2.
4. $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(f(x+h) - f(x)\right) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{x}{x}\frac{1}{h} f\left(\frac{x+h}{x}\right) \overset{u=\frac{h}{x}}{=} \frac{1}{x} \lim\limits_{u \to 0} \frac{1}{u}(f(1+u) - \underbrace{f(1)}_{0}) = \frac{1}{x}f'(1)$

$\square$

8.3 Přirozený logaritmus

Definice 8.7 (Přirozený logaritmus)
Funkce

$$\ln x = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}, \tag{4}$$

pro $x > 0$ se nazývá **přirozený logaritmus**.

Věta 8.8
Funkce ln je logaritmická funkce.

Důkaz. Předpokládejme bez újmy na obecnosti, že $0 < x < y$.
Podle definice 8.5 musíme ukázat, že $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$:

$$\ln(xy) = \int_1^{xy} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_1^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_x^{xy} \frac{\mathrm{d}t}{t} \overset{u=\frac{t}{x}}{=} \int_1^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_1^{y} \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln x + \ln y.$$

□

Věta 8.9 (Vlastnosti $\ln x$)
Funkce $\ln x$ definovaná vztahem (4) má následující vlastnosti:

1. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
2. ln je ostře rostoucí na $D_{\ln}$.
3. $\ln x^\alpha = \alpha \ln x$ pro $\alpha \in \mathbb{R}$.

Důkaz.

1. Derivací integrálu jakožto funkce horní meze v definici 8.7 dostáváme tvrzení věty, což zároveň odpovídá „přirozené“ volbě $f'(1) = 1$ ve větě 8.6(4.).
2. Pro všechna $x \in D_{\ln} = \mathbb{R}^+$ je $\frac{1}{x} > 0$ a tudíž podle věty 6.7 ostře roste.
3. Pro $\alpha = 0$ tvrzení zjevně platí. Pro $\alpha \neq 0$ máme

$$\ln x^\alpha = \int_1^{x^\alpha} \frac{\mathrm{d}t}{t} \overset{t=u^\alpha}{=} \alpha \int_1^{x} \frac{u^{\alpha-1}}{u^\alpha} \mathrm{d}u = \alpha \ln x.$$

□

Definice 8.10 (Eulerovo číslo)
Eulerovo číslo e je jediné číslo, které splňuje $\ln \mathrm{e} = 1$.

8.4 Exponenciální funkce

Definice 8.11 (Exponenciální funkce)
Inverzní funkci k funkci ln nazýváme exponenciální funkcí při základu e a značíme e^x nebo $\exp(x)$.

Věta 8.12 (Vlastnosti exponenciální funkce)

1. $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$ pro $x \in \mathbb{R}$.
2. $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^y$ pro $x, y \in \mathbb{R}$.
3. $\mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{\mathrm{e}^x}$ pro $x \in \mathbb{R}$.

Důkaz.

1. Podle věty 5.10 o derivaci inverzní funkce platí

$$(\mathrm{e}^x)' = \frac{1}{\left(\frac{1}{\mathrm{e}^x}\right)} = \mathrm{e}^x.$$

2. $\ln \mathrm{e}^{x+y} = (x+y) \ln \mathrm{e} = x + y = x \ln \mathrm{e} + y \ln \mathrm{e} = \ln \mathrm{e}^x \mathrm{e}^y$.
3. viz 2.

□

8.5 Obecná mocnina

Definice 8.13 (Obecná mocnina)
Pro $\beta > 0$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ definujeme **obecnou mocninu** jako

$$\beta^\alpha = e^{\alpha \ln \beta},$$

kde β je báze (základ) a α exponent (mocnina).

Věta 8.14 (Vlastnosti obecné mocniny)
Nechť $x > 0$ a $a, b \in \mathbb{R}$. Pak

1. $x^{a+b} = x^a x^b$.
2. $x^{-a} = \frac{1}{x^a}$.
3. $(x^a)' = a x^{a-1}$.
4. $(a^x)' = (\ln a) \cdot a^x$.

Důkaz. Všechny body věty plynou z definice 8.13 a vlastností logaritmu. □

8.6 Obecná báze logaritmu

Definice 8.15 (Obecná báze logaritmu)
Pro $p > 0$, $p \neq 1$ definujeme **logaritmus při základu p** jako

$$\log_p x = \frac{\ln x}{\ln p},$$

kde p je báze (základ). Pro $p = 10$ definujeme dekadický logaritmus a značíme zkráceně symbolem log.

Věta 8.16 (Vlastnosti logaritmu)

1. $\log_p x$ je inverzní funkce k p^x.
2. $(\log_p x)' = \frac{1}{\ln p} \frac{1}{x}$.

3. $\log_p x$ je logaritmická funkce.

Důkaz.

1. Podle definice 8.15 je funkce $\log_p$ stejně jako ln prostá na $\mathbb{R}^+$. Stačí ověřit obě vlastnosti inverzní funkce $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}$ a $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}$ (viz věta 2.13):

$$\log_p p^x = \frac{\ln p^x}{\ln p} = \frac{x \ln p}{\ln p} = x,$$

$$p^{\log_p x} = \mathrm{e}^{\log_p(x) \cdot \ln p} = \mathrm{e}^{\frac{\ln x}{\ln p} \ln p} = \mathrm{e}^{\ln x} = x$$

2. Tvrzení plyne přímou derivací definice 8.15 podle x.

3. Ověření vlastnosti logaritmické funkce (viz definice 8.5):

$$\log_p(x \cdot y) = \frac{\ln(x \cdot y)}{\ln p} = \frac{\ln x + \ln y}{\ln p} = \frac{\ln x}{\ln p} + \frac{\ln y}{\ln p} = \log_p x + \log_p y$$

□

8.7 Hyperbolické funkce

Definice 8.17 (Hyperbolické funkce)

$$\begin{aligned}
\sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \\
\cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \\
\operatorname{tgh} x &= \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \\
\operatorname{cotgh} x &= \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}
\end{aligned}$$

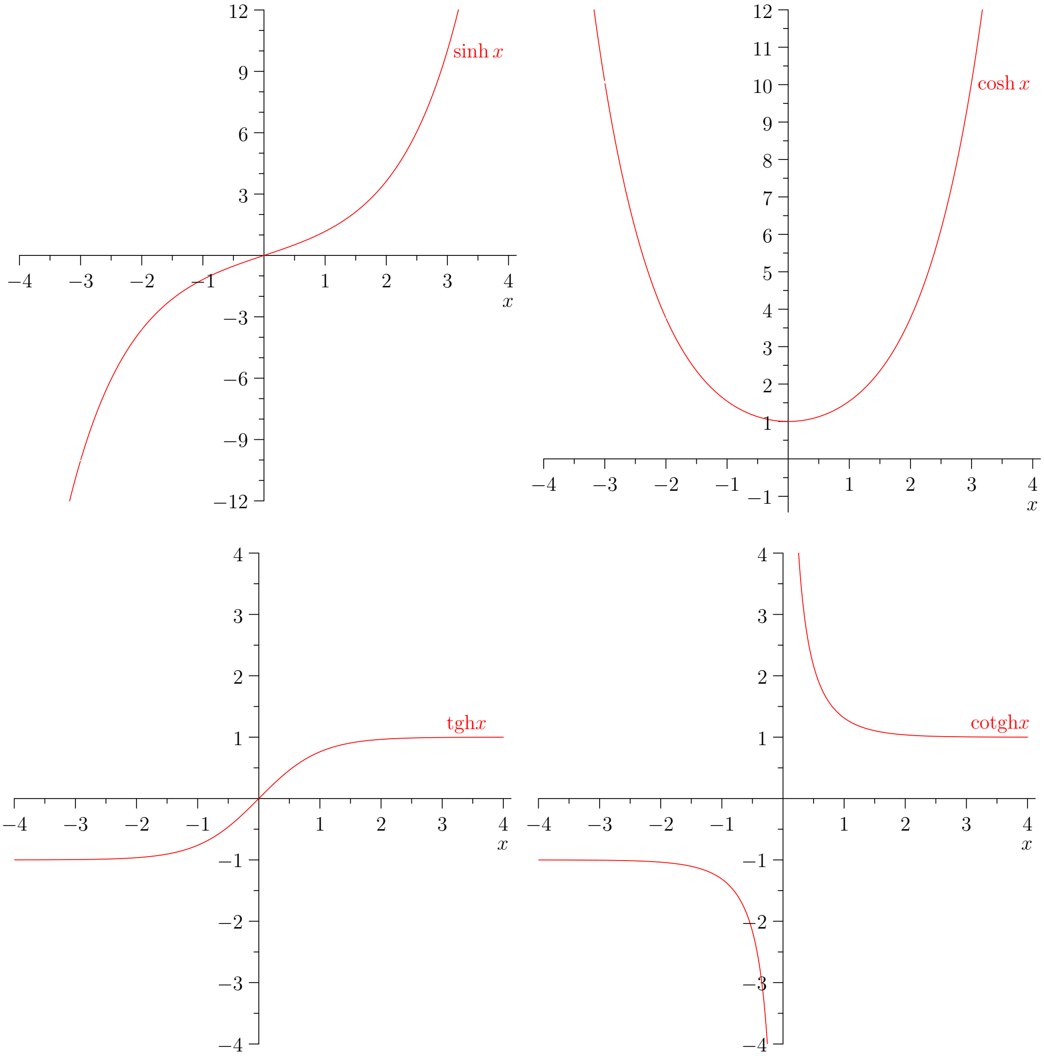
Věta 8.18 (Vlastnosti hyperbolických funkcí sinh a cosh)

1. $\cosh x > \frac{1}{2}\mathrm{e}^x > \sinh x$
2. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$
3. $\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \sinh y \cosh x$
4. $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

Důkaz. Tvrzení se dokáží dosazením vzorců z definice 8.17. □

Věta 8.19 (Derivace hyperbolických funkcí)

$$(\sinh x)' = \cosh x, \tag{5}$$
$$(\cosh x)' = \sinh x, \tag{6}$$
$$(\operatorname{tgh} x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}, \tag{7}$$
$$(\operatorname{cotgh} x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x} \tag{8}$$



Obrázek 3: Grafy hyperbolických funkcí.

8.8 Inverzní hyperbolické funkce

Definice 8.20 (Inverzní hyperbolické funkce)

$\operatorname{argsinh} x = \sinh^{-1} x$	argument hyperbolického sinu,
$\operatorname{argcosh} x = \cosh^{-1} x$	argument hyperbolického cosinu,
$\operatorname{argtgh} x = \operatorname{tgh}^{-1} x,$	argument hyperbolické tangenty,
$\operatorname{argcotgh} x = \operatorname{cotgh}^{-1} x,$	argument hyperbolické kotangenty.

Věta 8.21 (Explicitní vyjádření inverzních hyperbolických funkcí)

$$\operatorname{argsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}), \quad \text{pro} \quad x \in \mathbb{R} \tag{9}$$

$$\operatorname{argcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}), \quad \text{pro} \quad x \geq 1 \tag{10}$$

$$\operatorname{argtgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad \text{pro} \quad x \in (-1, 1) \tag{11}$$

$$\operatorname{argcotgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} \quad \text{pro} \quad x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty). \tag{12}$$

Důkaz. Pro jednotlivé funkce je potřeba odvodit inverzní funkci pomocí techniky explicitního vyjádření $x = f^{-1}(y)$ ze vztahu $y = f(x)$.

1. $y = \sinh x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$, kde vynásobením rovnice e^x dostáváme kvadratickou rovnici pro neznámou „e^x“:
$$(\mathrm{e}^x)^2 - 2y\mathrm{e}^x - 1 = 0,$$
kterou řeší
$$\mathrm{e}^x = y \pm \sqrt{y^2+1}.$$
Z těchto řešení vyhovuje pouze $\mathrm{e}^x = y + \sqrt{y^2+1}$, protože $H_{\mathrm{e}^x} = \mathbb{R}^+$. Odtud již plyne tvrzení věty.

2. Funkce cosh není na $\mathbb{R}$ prostá a proto nejprve zúžíme definiční obor např. na $\mathbb{R}_0^+$ tak, abychom dostali prostou funkci. $y = \cosh x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$, kde vynásobením rovnice e^x dostáváme kvadratickou rovnici pro neznámou „e^x“:
$$(\mathrm{e}^x)^2 + 2y\mathrm{e}^x - 1 = 0,$$
kterou řeší
$$\mathrm{e}^x = y \pm \sqrt{y^2-1}.$$
Z těchto řešení vyhovuje pouze $\mathrm{e}^x = y + \sqrt{y^2-1}$, protože pro daný definiční obor funkce cosh ($x \geq 0$) je funkce $\mathrm{e}^x \geq 1$. Odtud již plyne tvrzení věty.

3. $y = \operatorname{tgh} x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$, kde vynásobením rovnice $\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$ dostáváme kvadratickou rovnici pro neznámou „e^x“:
$$(y-1)(\mathrm{e}^x)^2 + y + 1 = 0,$$
kterou řeší
$$\mathrm{e}^x = \pm\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}.$$
Z těchto řešení vyhovuje pouze to kladné, neb $H_{\mathrm{e}^x} = \mathbb{R}^+$. Odtud již plyne tvrzení věty.

4. Inverzní funkce k cotgh – viz 3.

□

Věta 8.22 (Derivace inverzních hyperbolických funkcí)

$$(\operatorname{argsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \tag{13}$$
$$(\operatorname{argcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \tag{14}$$
$$(\operatorname{argtgh} x)' = (\operatorname{argcotgh} x)' = \frac{1}{1-x^2} \quad \textit{(pozor na různé definiční obory!)}. \tag{15}$$

Důkaz. Větu snadno dokážeme derivací explicitního vyjádření inverzních funkcí ve větě 8.21. □

8.9 Pokročilé techniky integrace

Poznámka. Dle lemma 3.14 lze snížit druhou mocninu funkcí sin a cos:
$$\cos^2(x) = \frac{1 + cos(2x)}{2},$$
$$\sin^2(x) = \frac{1 - cos(2x)}{2},$$
čehož je možné využít při integraci výrazů tvaru $\int \sin^m x \cos^n x \mathrm{d}x$, kde $m, n \in \mathbb{N}_0$:

1. Jsou-li m i n sudé:
   Použijeme lemma 3.14 na $\int (\sin^2 x)^{\frac{m}{2}} (\cos^2 x)^{\frac{n}{2}} \,\mathrm{d}x$

2. Jsou-li (m sudé a n liché) nebo (m liché a n sudé):
   Substituujeme funkci se sudou mocninou (z funkce s lichou mocninou dostaneme diferenciál), např. pro m-sudé, n-liché:

$$\int \sin^m x (\cos^2 x)^{\frac{n-1}{2}} \cos x \mathrm{d}x = \Big| u = \sin x \Big| = \int u^m (1-u^2)^{\frac{n-1}{2}} \mathrm{d}u$$

3. Jsou-li m i n liché:
   Převedeme integrand pomocí součtových vzorců $2 \sin x \cos x = \sin(2x)$ a lemma 3.14 na výraz předchozích typů, např. pro $m < n$:

$$\int \sin^m x \cos^n x \mathrm{d}x = \int (\sin x \cos x)^m (\cos^2 x)^{\frac{n-m}{2}} \mathrm{d}x = \int \left(\frac{\sin(2x)}{2} \right)^m \left(\frac{1+\cos(2x)}{2} \right)^{\frac{n-m}{2}} \mathrm{d}x,$$

   kde poznamenejme, že $m - n$ je sudé číslo.

Lemma 8.23 (Vzorce pro součin goniometrických funkcí)

$$\begin{aligned} \cos(mx)\cos(nx) &= \frac{1}{2}\Big(\cos[(n+m)x] + \cos[(n-m)x] \Big) \\ \sin(mx)\sin(nx) &= \frac{1}{2}\Big(\cos[(n-m)x] - \cos[(n+m)x] \Big) \\ \sin(mx)\cos(nx) &= \frac{1}{2}\Big(\sin[(m-n)x] + \sin[(n+m)x] \Big) \end{aligned}$$

Důkaz. Větu dokážeme pomocí součtových vzorců pro funkce cos a sin. □

Poznámka. Pomocí lemma 8.23 se integrály typu $\int \cos(\alpha x)\sin(\beta x)\ \mathrm{d}x$, $\int \cos(\alpha x)\cos(\beta x)\ \mathrm{d}x$ a $\int \sin(\alpha x)\sin(\beta x)\ \mathrm{d}x$, pro $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ převedou na známé integrály.

Poznámka.

Typ integrálu	Výsledný typ funkce	Substituce
$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-(x+b)^2}}$	arcsin nebo $-$arccos	$x+b = a\sin u$ nebo $x+b = a\cos u$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+(x+b)^2}$	arctg nebo $-$arccotg	$x+b = a\,\mathrm{tg}\, u$ nebo $x+b = a\,\mathrm{cotg}\, u$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+b)^2+a^2}}$	argsinh	$x+b = a\sinh u$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+b)^2-a^2}}$	argcosh	$x+b = a\cosh u$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+b)^2-a^2}$	argtgh nebo argcotgh	$x+b = a\,\mathrm{tgh}\, u$ nebo $x+b = a\,\mathrm{cotgh}\, u$

8.10 Příklady

Poznámka. Příklady k procvičení:

1. $\int x \ln x \mathrm{d}x$
2. $\int \frac{1}{x} \ln x \mathrm{d}x$
3. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}} \mathrm{d}x$
4. $\int_1^2 \frac{6x^2-2}{x^3-x+1} \mathrm{d}x$
5. $\int \frac{\exp(3x)}{\exp(3x)+1} \mathrm{d}x$
6. $\int \exp(x) \sin(x) \mathrm{d}x$
7. $\int \exp(x) \sinh(x) \mathrm{d}x$
8. $\int \sqrt{\frac{1+x^2}{(1-x^4)} \arcsin x} \mathrm{d}x$
9. $\int \frac{\operatorname{arctg}\ (\ln x)}{x} \mathrm{d}x$
10. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2-3x-4x^2}}$
11. $\int \frac{x^2}{\sqrt{3-2x-x^2}} \mathrm{d}x$
12. $\int \sqrt{6x-x^2-8} \mathrm{d}x$
13. $\int \min\{x^3, x\} \mathrm{d}x$

9 $\boxed{\text{Aplikace integrálu}}$

9.1 Výpočet plochy

Věta 9.1 (Výpočet plochy mezi funkcemi)
Nechť jsou f a g funkce spojité na intervalu $[a, b]$. Potom plocha A vymezená těmito funkcemi je

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, \mathrm{d}x.$$

Důsledek 9.2 (Plocha pod grafem funkce)
Nechť je funkce f spojitá a nezáporná na intervalu $[a, b]$. Pak plocha A_f vymezená grafem funkce f a osou x je

$$A_f = \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x.$$

9.2 Výpočet polohy těžiště

Věta 9.3 (Poloha těžiště plochy pod grafem funkce)
Nechť funkce f je spojitá na $[a, b]$. Potom pro těžiště $T = [\bar{x}, \bar{y}]$ plochy pod grafem funkce f platí

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x f(x) \mathrm{d}x}{\int_a^b f(x) \mathrm{d}x}, \qquad \bar{y} = \frac{1}{2} \frac{\int_a^b f^2(x) \mathrm{d}x}{\int_a^b f(x) \mathrm{d}x}.$$

Důkaz. Pro důkaz věty použijeme analogii postupu hledání těžiště n hmotných bodů z fyziky. Poloha těžiště z_T pro n hmotných bodů o hmotnostech m_k a polohách z_k (na ose z) je

$$z_T = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k z_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}.$$

Na chvíli předpokládejme, že uvažovaná plocha pod grafem funkce f má všude stejnou hustotu ϱ. Uvažujme rozdělení $\sigma = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$ intervalu $[a, b]$.

Označme A_k jednotlivé dílčí plochy pod grafem funkce f mezi x_{k-1} a x_k. Dále označme polohu těžiště na ose x symbolem t_k. Snadno nahlédneme, že polohu těžiště A_k na ose y lze vyjádřit $y_k = \frac{1}{2} f(t_k)$. Hmotnost dílčí plochy A_k lze vyjádřit jako $m_k = \varrho f(t_k)(x_k - x_{k-1})$. Každou dílčí plochu A_k lze reprezentovat hmotným bodem o souřadnicích $[t_k, \frac{1}{2} f(t_k)]$ a hmotnosti m_k.

Podle vzorce pro polohu těžiště n hmotných bodů dostáváme pro jednotlivé souřadnice polohy těžiště $x_T(\sigma)$ a $y_T(\sigma)$ (při rozdělení σ) vyjádření

$$x_T(\sigma) = \frac{\sum_{k=1}^{n} \varrho t_k f(t_k)(x_k - x_{k-1})}{\sum_{k=1}^{n} \varrho f(t_k)(x_k - x_{k-1})}, \tag{16}$$

$$y_T(\sigma) = \frac{\sum_{k=1}^{n} \varrho \frac{1}{2} f^2(t_k)(x_k - x_{k-1})}{\sum_{k=1}^{n} \varrho f(t_k)(x_k - x_{k-1})}, \tag{17}$$

kde $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Hustota ϱ je konstantní, proto ji můžeme vykrátit z obou výrazů. Pro dokončení důkazu stačí v jednotlivých sumách odhadnout funkci $t \cdot f(t)$, resp. $f(t)$, resp. $\frac{1}{2} f^2(t)$ svými maximy a minimy na dílčích intervalech $[x_{k-1}, x_k]$, čímž obdržíme horní a dolní částečné součty. Protože jsme v celém odvození uvažovali libovolné rozdělení σ, dostáváme podle Riemannovy definice určitého integrálu 7.11 tvrzení věty. □

9.3 Délka grafu funkce

Věta 9.4 (Délka grafu funkce)
Nechť funkce f má spojitou první derivaci na intervalu $[a, b]$. Potom délka grafu funkce L_f je

$$L_f = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, \mathrm{d}x.$$

Důkaz. Nechť σ je rozdělení intervalu $[a, b]$. S využitím Pythagorovy věty můžeme délku grafu funkce aproximovat úsečkou délky d_k na každém dílčím intevalu $[x_{k-1}, x_k]$ takto:

$$d_k = \sqrt{(f(x_k) - f(x_{k-1}))^2 + (x_k - x_{k-1})^2} = (x_k - x_{k-1}) \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \right)^2}.$$

Na intervalu $[x_{k-1}, x_k]$ použijeme Lagrangeovu větu 6.3 o přírůstku funkce: $\exists c_k \in (x_{k-1}, x_k)$ tak, že

$$d_k = (x_k - x_{k-1}) \sqrt{1 + (f'(c_k))^2}.$$

Označíme-li

$$m_k = \min \left\{ \sqrt{1 + (f'(z))^2} : z \in [x_{k-1}, x_k] \right\},$$
$$M_k = \max \left\{ \sqrt{1 + (f'(z))^2} : z \in [x_{k-1}, x_k] \right\},$$

dostáváme nerovnost

$$(x_k - x_{k-1}) m_k \leq d_k \leq (x_k - x_{k-1}) M_k$$

pro všechna k. Sečteme-li tuto nerovnost přes všechna $k = 1, 2, \ldots, n$, máme

$$s_{\sqrt{1+(f')^2}}(\sigma) \leq L_f(\sigma) \leq S_{\sqrt{1+(f')^2}}(\sigma).$$

Odtud již plyne tvrzení věty. □

9.4 Objem a povrch rotačního tělesa

Věta 9.5 (Objem rotačního tělesa)
Nechť funkce f je nezáporná a má spojitou první derivaci na intervalu $[a, b]$. Potom objem rotačního tělesa, které vznikne rotací grafu f okolo osy x je

$$V_f = \pi \int_a^b f^2(x)\, \mathrm{d}x.$$

Věta 9.6 (Povrch rotačního tělesa)
Nechť funkce f je nezáporná a má spojitou první derivaci na intervalu $[a, b]$. Potom povrch rotačního tělesa, které vznikne rotací grafu f okolo osy x je

$$S_f = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, \mathrm{d}x.$$

Reference

[1] E. Dontová, *Matematika I*, Vydavatelství ČVUT, 1999

[2] E. Dontová, *Matematika II*, Vydavatelství ČVUT, 1996

[3] V. Jarník, *Diferenciální počet I*, ČSAV, 1955

[4] S. L. Salas, E. Hille, *Calculus, One Variable* John Wiley and Sons, 1990 (6th edition), ISBN 0-471-51749-6