

Matematika II - Sbírka příkladů

WikiSkriptum
Ing. Radek Fučík, Ph.D.

verze: 19. února 2025

Obsah

1	Pokročilé techniky integrace a zobecněný Riemannův integrál	3
1.1	Racionální funkce	3
1.2	Pokročilé techniky integrace	4
1.3	Zobecněný Riemannův integrál	6
2	Kuželosečky, polární souřadnice a parametrické křivky	10
2.1	Kuželosečky	10
2.2	Polární souřadnice	11
2.3	Parametrické křivky	12
3	Vlastnosti množin, Posloupnosti	15
3.1	Vlastnosti množin	15
3.2	Omezenost a monotonie posloupností	15
3.3	Limity posloupností	16
4	Konvergence číselných řad	21
4.1	Sčítání řad	21
4.2	Konvergence a absolutní konvergence	21
5	Obor konvergence mocninných řad a sčítání pomocí mocninných řad	26
5.1	Obor konvergence mocninných řad.	26
5.2	Sčítání řad	28
6	Rozvoj funkce do mocninné řady	29

Předmluva

Tato sbírka je složena z příkladů (viz [1], [2], [3]), ze kterých se sestavují zkouškové písemné práce k předmětu Matematika 2 (1. ročník bakalářského studia na FJFI ČVUT v Praze). Příklady jsou uspořádány do 6 kapitol, přičemž do zkouškové písemky je vybrán právě jeden příklad z každé kapitoly.

Každý příklad v této sbírce by měl jít spočítat pomocí znalostí získaných z přednášky a ze cvičení. Nebudete-li si vědět rady i jen s jediným příkladem, neváhejte požádat svého cvičícího o konzultaci!

Bezchybnému počítání zdar!

19. února 2025

Radek Fučík

1 Pokročilé techniky integrace a zobecněný Riemannův integrál

Zkouškové příklady

1.1 Racionální funkce

- $\int \frac{dx}{x^4 - 1}$ $[-\frac{1}{4} \ln|x+1| + \frac{1}{4} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C]$
- $\int \frac{2x^2 + 3}{x(x-1)^2} dx$ $[3 \ln|x| - \ln|x-1| - \frac{5}{x-1} + C]$
- $\int \frac{-2x}{(x+1)(x^2+1)} dx$ $[\ln|x+1| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - \operatorname{arctg} x + C]$
- $\int \frac{dx}{x(x^2+x+1)}$ $[\ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})\right) + C]$
- $\int \frac{3x^4 + x^3 + 20x^2 + 3x + 31}{(x+1)(x^2+4)^2} dx$ $[2 \ln|x+1| + \frac{1}{2} \ln(x^2+4) - \frac{1}{8} \frac{x}{x^2+4} - \frac{1}{16} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C]$
- $\int \frac{x^5 + 2}{x^2 - 1} dx$ $[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \ln|x+1| + \frac{3}{2} \ln|x-1| + C]$
- $\int \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} dx$ $[2 \ln|x+2| - \frac{3}{2} \ln|x+3| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + C]$
- $\int \frac{2x^2 + 3}{x^2(x-1)} dx$ $[5 \ln|x-1| - 3 \ln|x| + \frac{3}{x} + C]$
- $\int \frac{x^5}{(x-2)^2} dx$ $[\frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + 6x^2 + 32x - \frac{32}{x-2} + 80 \ln|x-2| + C]$
- $\int \frac{x+3}{x^2-3x+2} dx$ $[5 \ln|x-2| - 4 \ln|x-1| + C]$
- $\int \frac{x^2}{(x-1)^2(x+1)} dx$ $[\frac{3}{4} \ln|x-1| - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{4} \ln|x+1| + C]$
- $\int \frac{dx}{x^4 - 16}$ $[\frac{1}{32} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| - \frac{1}{16} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C]$
- $\int \frac{dx}{(x^2+16)^2}$ $[\frac{1}{32} \frac{x}{x^2+16} + \frac{1}{128} \operatorname{arctg} \frac{x}{4}]$
- $\int \frac{dx}{x^3+1}$ $[\frac{1}{3} (\ln|x+1| - \frac{1}{2} \ln(x^2-x+1) + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)) + C]$
- $\int \frac{x}{x^3+1} dx$ $[\frac{1}{3} (-\ln|x+1| + \frac{1}{2} \ln(x^2-x+1) + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}) + C]$
- $\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$ $[\frac{x}{4(1+x^2)^2} + \frac{3x}{8(1+x^2)} + \frac{3}{8} \operatorname{arctg} x + C]$

1.2 Pokročilé techniky integrace

$$17. \int \sin^3 x dx \quad \left[\frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x + C \right]$$

$$18. \int \sin^2 3x dx \quad \left[\frac{1}{2} x - \frac{1}{12} \sin 6x + C \right]$$

$$19. \int \cos^4 x \sin^3 x dx \quad \left[-\frac{1}{5} \cos^5 x + \frac{1}{7} \cos^7 x + C \right]$$

$$20. \int \sin^3 x \cos^3 x dx \quad \left[\frac{1}{4} \sin^4 x - \frac{1}{6} \sin^6 x + C \right]$$

$$21. \int \sin^2 x \cos^3 x dx \quad \left[\frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x + C \right]$$

$$22. \int \sin^4 x dx \quad \left[\frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C \right]$$

$$23. \int \sin 2x \cos 3x dx \quad \left[\frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{10} \cos 5x + C \right]$$

$$24. \int \sin^2 x \sin 2x dx \quad \left[\frac{1}{2} \sin^4 x + C \right]$$

$$25. \int \cos 3x \cos 2x dx \quad \left[\frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{10} \sin 5x + C \right]$$

$$26. \int \operatorname{tg}^2 3x dx \quad \left[\frac{1}{3} \operatorname{tg} 3x - x + C \right]$$

$$27. \int \frac{dx}{\cos^2 \pi x} \quad \left[\frac{1}{\pi} \operatorname{tg} \pi x + C \right]$$

$$28. \int \operatorname{tg}^3 x dx \quad \left[\frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \ln |\cos x| + C \right]$$

$$29. \int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} dx \quad \left[\frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + C \right]$$

$$30. \int \frac{1}{\sin^3 x} dx \quad \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{\sin x} \operatorname{cotg} x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1}{\sin x} - \operatorname{cotg} x \right| + C \right]$$

$$31. \int \frac{\operatorname{cotg}^3 x}{\sin^3 x} dx \quad \left[-\frac{1}{5} \frac{1}{\sin^5 x} + \frac{1}{3} \frac{1}{\sin^3 x} + C \right]$$

$$32. \int \frac{\operatorname{tg}^4 x}{\cos^4 x} dx \quad \left[\frac{1}{7} \operatorname{tg}^7 x + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x + C \right]$$

$$33. \int \frac{dx}{(5-x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \left[\frac{x}{5\sqrt{5-x^2}} + C \right]$$

$$34. \int \sqrt{x^2-1} dx \quad \left[\frac{1}{2} x \sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2} \ln |x + \sqrt{x^2-1}| + C \right]$$

$$35. \int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx \quad \left[2 \arcsin \frac{x}{2} - \frac{1}{2} x \sqrt{4-x^2} + C \right]$$

36. $\int \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$
37. $\int \frac{x^2}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$ [$-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x + C$]
38. $\int x\sqrt{4-x^2} dx$
39. $\int \frac{e^x}{\sqrt{9-e^{2x}}} dx$
40. $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}$ [$\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x} \right| + C$]
41. $\int e^x \sqrt{e^{2x}-1} dx$ [$\frac{1}{2}e^x \sqrt{e^{2x}-1} - \frac{1}{2} \ln(e^x + \sqrt{e^{2x}-1}) + C$]
42. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}$ [$\frac{1}{a^2x} \sqrt{x^2-a^2} + C$]
43. $\int \frac{dx}{e^x \sqrt{e^{2x}-9}}$ [$\frac{1}{9}e^{-x} \sqrt{e^{2x}-9} + C$]
44. $\int \frac{dx}{(x^2-4x+4)^{\frac{3}{2}}}$ [$-\frac{1}{2(x-2)^2} + C$]
45. $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+4x+13}} dx$ [$\sqrt{x^2+4x+13} + \ln(x+2+\sqrt{x^2+4x+13}) + C$]
46. $\int x(8-2x-x^2)^{\frac{3}{2}} dx$
47. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} dx$ [$x+2\sqrt{x}+2\ln|\sqrt{x}-1| + C$]
48. $\int \frac{\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{x-1}-1} dx$ [$x+4\sqrt{x-1}+4\ln|\sqrt{x-1}-1| + C$]
49. $\int \frac{dx}{1+e^{-x}}$
50. $\int 2x^2(4x+1)^{-5/2} dx$ [$\frac{1}{16}(4x+1)^{1/2} + \frac{1}{8}(4x+1)^{-1/2} - \frac{1}{48}(4x+1)^{-3/2} + C$]
51. $\int \ln(x\sqrt{x}) dx$ [$x \ln(x\sqrt{x}) - \frac{3}{2}x + C$]
52. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx$ [$\frac{1}{3}(x^2-2)\sqrt{1+x^2} + C$]
53. $\int \frac{\sin 3x}{2+\cos 3x} dx$ [$-\frac{1}{3} \ln(2+\cos 3x) + C$]
54. $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$ [$\frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + C$]

55. $\int \frac{1 - \sin 2x}{1 + \sin 2x} dx$ [$\operatorname{tg} 2x - \frac{1}{\cos 2x} - x + C$]
56. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}$ [$\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$]
57. $\int x \ln \sqrt{x^2+1} dx$
58. $\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x} dx$ [$\sqrt{x^2+4} - 2 \operatorname{argtgh} \left(\frac{2}{\sqrt{x^2+4}} \right) + C$]
59. $\int x^2 \arcsin x dx$ [$\frac{1}{3}x^3 \arcsin x + \frac{1}{3}(1-x^2)^{1/2} - \frac{1}{9}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C$]
60. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$ [$-\operatorname{argtgh} \sqrt{1-e^{2x}} + C$]
61. $\int \frac{\sqrt{x}}{4(1+x^{\frac{3}{4}})} dx$ [$\frac{1}{3}x^{\frac{3}{4}} - \frac{1}{3} \ln(1+x^{\frac{3}{4}}) + C$]
62. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ [$-\ln(x-1) + 2\sqrt{x} + \ln(\sqrt{x}-1) - \ln(1+\sqrt{x}) + C$]

1.3 Zobecněný Riemannův integrál

63. Spočítejte $\int_0^2 \frac{dx}{x^2 - 4x + 3}$ [Diverguje.]
64. Spočítejte $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^2}$ [$\frac{4}{9}\pi\sqrt{3}$]
65. Spočítejte $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x - 2}$ [$\frac{2}{3} \ln 2$]
66. Spočítejte $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 - 1}{1 - x^4} dx$ [$-\frac{\pi}{2}$]
67. Spočítejte $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ [$\frac{\pi}{2}$]
68. Spočítejte $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3}$ [$\frac{3\pi}{16}$]
69. Spočítejte $\int_0^{+\infty} \frac{1-x^2}{(1-x^4)(1+x^2)} dx$ [$\frac{\pi}{4}$]

70. Spočítejte $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x)}$ [ln 2]

71. Spočítejte $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+x^2)}$ [1 - $\frac{\pi}{4}$]

72. Spočítejte $\int_0^8 \frac{dx}{x^{2/3}}$ [6]

73. Spočítejte $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ [$\frac{\pi}{2}$]

74. Spočítejte $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx$ [2]

75. Spočítejte $\int_3^5 \frac{x}{\sqrt{x^2-9}} dx$ [4]

76. Rozhodněte o konvergenci $\int_0^{+\infty} e^{px} dx$ [Diverguje pro $p \geq 0$. Jinak konverguje.]

77. Rozhodněte o konvergenci $\int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$ [Diverguje.]

78. Spočítejte $\int_0^1 x \ln x dx$ [- $\frac{1}{4}$]

79. Spočítejte $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ [π]

80. Rozhodněte o konvergenci $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ [Diverguje.]

81. Rozhodněte o konvergenci $\int_{-3}^3 \frac{dx}{x(x+1)}$ [Diverguje.]

82. Rozhodněte o konvergenci $\int_{-3}^1 \frac{dx}{x^2-4}$ [Diverguje.]

83. Rozhodněte o konvergenci $\int_0^{+\infty} \cosh x dx$ [Diverguje.]
84. Spočítejte $\int_0^1 \ln x dx$ [-1]
85. Rozhodněte o konvergenci $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx$ [2]
86. Spočítejte $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$ [$\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$]
87. Spočítejte $\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$ [$\frac{\pi}{\sqrt{2}}$]
88. Spočítejte $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4} dx$ [$\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$]
89. Spočítejte $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} dx$ [$\frac{\pi}{2} - 1$]
90. Spočítejte $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ [$\frac{\pi^2}{8}$]
91. Rozhodněte o konvergenci $\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^5}} dx$ [Konverguje.]
92. Rozhodněte o konvergenci $\int_1^{+\infty} 2^{-x^2} dx$ [Konverguje.]
93. Rozhodněte o konvergenci $\int_0^{+\infty} (1+x^5)^{-1/6} dx$ [Diverguje.]
94. Rozhodněte o konvergenci $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin^2 2x}{x^2} dx$ [Konverguje.]
95. Rozhodněte o konvergenci $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$ [Konverguje.]
96. Rozhodněte o konvergenci $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+1} \ln x}$ [Diverguje.]

97. Rozhodněte o konvergenci $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1}$ [Konverguje.]
98. Rozhodněte o konvergenci $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2 + 1}}$ [Konverguje.]
99. Rozhodněte o konvergenci $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^3 + x^2 + 1} dx$ [Diverguje.]
100. Rozhodněte o konvergenci $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^{\frac{3}{2}}} dx$ [Konverguje.]
101. Rozhodněte o konvergenci $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x + x^2}}$ [Konverguje.]
102. Rozhodněte o konvergenci $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + x)}{x^{\frac{3}{2}}} dx$ [Konverguje.]
103. Spočítejte $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx$ [Diverguje.]

2 Kuželosečky, polární souřadnice a parametrické křivky

Zkouškové příklady

2.1 Kuželosečky

1. Napište rovnici paraboly, když znáte $V = (0, 0), F = (2, 0)$. [$y^2 = 8x$]
2. Napište rovnici paraboly, když znáte $V = (-1, 3), F = (-1, 0)$. [$(x + 1)^2 = -12(y - 3)$]
3. Napište rovnici paraboly, když znáte $F = (1, 1), d : y = -1$. [$4y = (x - 1)^2$]
4. Napište rovnici paraboly, když znáte $F = (1, 1), d : x = 2$. [$(y - 1)^2 = -2(x - 3/2)$]
5. Popište a načrtněte parabolu $y^2 = 2x$. [$V = (0, 0), F = (1/2, 0), d : x = -1/2$]
6. Popište a načrtněte parabolu $2y = 4x^2 - 1$. [$V = (0, -1/2), F = (0, -3/8), d : y = -5/8$]
7. Popište a načrtněte parabolu $(x + 2)^2 = 12 - 8y$. [$V = (-2, 3/2), F = (-2, -1/2), d : y = 7/2$]
8. Popište a načrtněte parabolu $x = y^2 + y + 1$. [$V = (3/4, -1/2), F = (1, -1/2), d : x = 1/2$]
9. Nalezněte rovnice všech parabol, které prochází bodem $(5, 6)$, mají řídicí přímku $y = 1$ a osu $x = 2$. [$2y = x^2 - 4x + 7; 18y = x^2 - 4x + 103$]
10. Nalezněte rovnici paraboly, která má horizontální osu, vrchol $V = (-1, 1)$ a prochází bodem $(-6, 13)$.
11. Napište rovnici elipsy, když znáte (a je hlavní poloosa): $F_1 = (-1, 0), F_2 = (1, 0), a = 3$. [$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$]
12. Napište rovnici elipsy, když znáte (a je hlavní poloosa): $F_1 = (1, 3), F_2 = (1, 9), a = 5$. [$\frac{(x - 1)^2}{16} + \frac{(y - 6)^2}{25} = 1$]
13. Napište rovnici elipsy, když znáte (a je hlavní poloosa): $S = (1, 3), F_1 = (1, 1), a = 5$. [$\frac{(x - 1)^2}{21} + \frac{(y - 3)^2}{25} = 1$]
14. Napište rovnici elipsy, když znáte (a je hlavní poloosa): $a = 5, V_1 = (3, 2), V_2 = (3, -4)$. [$\frac{(x - 3)^2}{25} + \frac{(y + 1)^2}{9} = 1$]
15. Popište a načrtněte elipsu $3x^2 + 2y^2 = 12$. [$S = (0, 0), F = (0, \pm\sqrt{2}), a = \sqrt{6}, b = 2$]
16. Popište a načrtněte elipsu $4x^2 + 9y^2 - 18y = 27$. [$S = (0, 1), F = (\pm\sqrt{5}, 1), a = 3, b = 2$]
17. Popište a načrtněte elipsu $4(x - 1)^2 + y^2 = 64$. [$S = (1, 0), F = (1, \pm 4\sqrt{3}), a = 8, b = 4$]
18. Nalezněte rovnice hyperboly, když znáte $F_1 = (0, -13), F_2 = (0, 13), a = 5$. [$\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{144} = 1$]
19. Nalezněte rovnice hyperboly, když znáte $F_1 = (-5, 1), F_2 = (5, 1), a = 3$. [$\frac{x^2}{9} - \frac{(y - 1)^2}{16} = 1$]

20. Nalezněte rovnice hyperboly, když znáte $F_1 = (-1, -1), F_2 = (-1, 1), a = 1/4$.
 $[16y^2 - \frac{16}{15}(x+1)^2 = 1]$
21. Popište a načrtněte hyperbolu $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.
 $[S = (0, 0), a = 3, V = (\pm 3, 0), F = (\pm 5, 0), y = \pm \frac{4}{3}x]$
22. Popište a načrtněte hyperbolu $\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-3)^2}{16} = 1$.
 $[S = (1, 3), a = 3, V_1 = (4, 3), V_2 = (-2, 3), F_1 = (6, 3), F_2 = (-4, 3), y = \pm \frac{4}{3}(x-1) + 3]$
23. Popište a načrtněte hyperbolu $4x^2 - 8x - y^2 + 6y - 1 = 0$.
 $[S = (1, 3), a = 2, V_1 = (1, 5), V_2 = (1, 1), F_{1,2} = (1, 3 \pm \sqrt{5}), y = 2x + 1, y = -2x + 5]$
24. Popište a načrtněte kuželosečku $x^2 - 4y^2 - 10x + 41 = 0$.
 $[S = (5, 0), a = 2, V = (5, \pm 2), F = (5, \pm 2\sqrt{5}), y = \pm \frac{1}{2}(x-5)]$
25. Popište a načrtněte kuželosečku $x^2 + 3y^2 + 6x + 8 = 0$.
26. Popište a načrtněte kuželosečku $y^2 + 4y + 2x + 1 = 0$. $[V = (\frac{3}{2}, -2), F = (1, -2), d : x = 2]$
27. Popište a načrtněte kuželosečku $9x^2 + 25y^2 + 100y + 99 = 0$.
 $[S = (0, -2), F = (\pm \frac{4}{15}, -2), a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{5}]$
28. Popište a načrtněte kuželosečku $7x^2 - 5y^2 + 14x - 40y = 118$.
29. Popište a načrtněte kuželosečku $(x^2 - 4y)(4x^2 + 9y^2 - 36) = 0$.

2.2 Polární souřadnice

30. Převed'te z polárních do kartézských souřadnic $\left[3, \frac{1}{2}\pi\right]_p$. $[[0, 3]_k]$
31. Převed'te z polárních do kartézských souřadnic $[-1, -\pi]_p$. $[[1, 0]_k]$
32. Převed'te z polárních do kartézských souřadnic $\left[-3, -\frac{1}{3}\pi\right]_p$. $\left[\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\sqrt{3}\right]_k\right]$
33. Převed'te z polárních do kartézských souřadnic $\left[3, -\frac{1}{2}\pi\right]_p$. $[[0, -3]_k]$
34. Napište všechna vyjádření v polárních souřadnicích bodu $[0, 1]_k$.
 $[[1, \frac{1}{2}\pi + 2k\pi]_p = [-1, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi]_p]$
35. Napište všechna vyjádření v polárních souřadnicích bodu $[-3, 0]_k$.
 $[[3, \pi + 2k\pi]_p = [-3, 2k\pi]_p]$
36. Napište všechna vyjádření v polárních souřadnicích bodu $[2, -2]_k$.
 $[[2\sqrt{2}, \frac{7}{4}\pi + 2k\pi]_p = [-2\sqrt{2}, \frac{3}{4}\pi + 2k\pi]_p]$
37. Napište všechna vyjádření v polárních souřadnicích bodu $[4\sqrt{3}, 4]_k$.
 $[[8, \frac{\pi}{6} + 2k\pi]_p = [-8, \frac{7}{6}\pi + 2k\pi]_p]$

38. Prověřte symetrii křivky $r = 2 + \cos \varphi$. [dle osy x]
39. Prověřte symetrii křivky $r(\sin \varphi + \cos \varphi) = 1$. [není symetrická]
40. Prověřte symetrii křivky $r^2 \sin 2\varphi = 1$. [dle počátku (obou os)]
41. Prověřte v polárních souřadnicích symetrii křivky $x^2(y^2 - 1) = \frac{1}{4}$. [dle počátku a obou os]
42. Spočtěte plochu v křivce $r = a \cos \varphi$; $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. [$\frac{1}{4}\pi a^2$]
43. Spočtěte plochu v křivce $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$; $\varphi \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$. [$\frac{1}{2}a^2$]
44. Spočtěte plochu v křivce $r^2 = a^2 \sin^2 \varphi$. [$\frac{1}{2}\pi a^2$]
45. Spočtěte plochu mezi křivkami $r = 2 \cos \varphi, r = \cos \varphi$; $\varphi \in [0, \frac{\pi}{4}]$. [$\frac{3}{16}\pi + \frac{3}{8}$]
46. Spočtěte plochu mezi křivkami $r = a \left(4 \cos \varphi - \frac{1}{\cos \varphi} \right)$; $\varphi \in [0, \frac{\pi}{4}]$. [$\frac{5}{2}a^2$]
47. Spočtěte plochu mezi křivkami $r = e^\varphi, r = e^{\frac{\varphi}{2}}$; $\varphi \in [0, \pi]$. [$\frac{1}{4}(e^{2\pi} + 1 - e^\pi)$]
48. Spočtěte plochu uvnitř $r = 4$ a napravo od křivky $r = \frac{2}{\cos \varphi}$. [$\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{1}{2}(16 - \frac{4}{\cos^2 \varphi})d\varphi = \frac{16}{3}\pi - 4\sqrt{3}$]
49. Spočtěte plochu uvnitř $r = 4$ a $r = \frac{2}{\cos \varphi}$ pro $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
50. Spočtěte plochu vně $r = 1 + \cos \varphi$ a uvnitř $r = 2 - \cos \varphi$. [$2\pi + 3\sqrt{3}$]

2.3 Parametrické křivky

51. Nalezněte tečnu (tečny) ke křivce $x = 2t, y = \cos \pi t$ v bodě $t = 0$. [$y = 1$]
52. Nalezněte tečnu (tečny) ke křivce $x = t^2, y = (2 - t)^2$ v bodě $t = \frac{1}{2}$. [$3x + y - 3 = 0$]
53. Nalezněte tečnu (tečny) ke křivce $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t$ v bodě $t = \frac{\pi}{4}$. [$2x + 2y - \sqrt{2} = 0$]
54. Nalezněte tečnu (tečny) ke křivce $r = 4 - 2 \sin \varphi$ v bodě $\varphi = 0$. [$2x + y - 8 = 0$]
55. Nalezněte tečnu (tečny) ke křivce $r = \frac{4}{5 - \cos \varphi}$ v bodě $\varphi = \frac{1}{2}\pi$. [$x - 5y + 4 = 0$]
56. Nalezněte tečnu (tečny) ke křivce $r = \frac{\sin \varphi - \cos \varphi}{\sin \varphi + \cos \varphi}$ v bodě $\varphi = 0$. [$x + 2y + 1 = 0$]
57. Nalezněte body, kde má křivka vertikální a horizontální tečny $x = 3t - t^3, y = t + 1$. [vert. $[2, 2], [-2, 0]$]
58. Nalezněte body, kde má křivka vertikální a horizontální tečny $x = 3 - 4 \sin t, y = 4 + 3 \cos t$. [horiz. $[3, 7], [3, 1]$, vert. $[-1, 4], [7, 4]$]
59. Nalezněte body, kde má křivka vertikální a horizontální tečny $x = t^2 - 2t, y = t^3 - 3t^2 + 2t$. [horiz. $[-\frac{2}{3}, \pm\frac{2}{3}\sqrt{3}]$, vert. $[-1, 0]$]

60. Nalezněte body, kde má křivka vertikální a horizontální tečny $x = \cos t, y = \sin 2t$.
[horiz. $[\pm \frac{1}{2}\sqrt{2}, \pm 1]$, vert. $[\pm 1, 0]$]
61. Spočtěte délku křivky $x = t^2, y = t^3; t \in [0, 1]$.
62. Spočtěte délku křivky $r = 2(1 + \cos \varphi)^{-1}; \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
[$\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})$]
63. Spočtěte délku křivky $r = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}; \varphi \in [0, \pi]$.
[$\frac{3}{2}\pi a$]
64. Spočtěte délku křivky $x = e^t \sin t, y = e^t \cos t; t \in [0, \pi]$.
[$\sqrt{2}(e^\pi - 1)$]
65. Spočtěte délku křivky $r = e^{2\varphi}; \varphi \in [0, 2\pi]$.
[$\frac{1}{2}\sqrt{5}(e^{4\pi} - 1)$]
66. Spočtěte délku křivky $f(x) = \ln\left(\frac{1}{\cos x}\right); x \in [0, \frac{\pi}{4}]$.
[$\ln(1 + \sqrt{2})$]
67. Spočtěte délku křivky $f(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{2}\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}); x \in [1, 2]$.
[$\frac{3}{2}$]
68. Spočtěte délku křivky $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t; t \in [0, 2\pi]$.
[8]
69. Spočtěte délku křivky $x = \cos t + t \sin t, y = \sin t - t \cos t; t \in [0, 2\pi]$.
[$2\pi^2$]
70. Spočtěte povrch rotačního tělesa (dle x) $y^2 = 2px; x \in [0, 4p]$.
[$\frac{52}{3}\pi p^2$]
71. Spočtěte povrch rotačního tělesa (dle x) $6a^2xy = x^4 + 3a^4; x \in [a, 2a]$.
[$\frac{47}{16}\pi a^2$]
72. Spočtěte povrch rotačního tělesa (dle x) $x = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}, y = t; t \in [3, 8]$.
[$\frac{2152}{15}\pi$]
73. Spočtěte povrch rotačního tělesa (dle x) $r = e^\varphi; \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
[[$\frac{2}{5}\sqrt{2}\pi(2e^\pi + 1)$]]
74. Spočtěte povrch rotačního tělesa (dle x) $4y = x^3; x \in [0, 1]$.
[$\frac{61}{432}\pi$]
75. Spočtěte povrch rotačního tělesa (dle x) $x = 2 \cos t, y = 2 \sin t; t \in [0, \frac{\pi}{6}]$.
[$4\pi(2 - \sqrt{3})$]
76. Načrtněte a popište křivku $r = \frac{12}{2 + \sin \varphi}$.
77. Nalezněte body, ve kterých má křivka $x(t) = 3 - 4 \sin t, y(t) = 4 + 3 \sin t$ vertikální a horizontální tečny.
78. Určete plochu, která je společná křivkám $r = 2a\sqrt{3} \cos \varphi; \varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
a $r = 2a \sin \varphi; \varphi \in [0, \pi]$.
79. Načrtněte křivku $r = \frac{9}{5 - 4 \sin \varphi}$.
80. Načrtněte křivku $x(t) = 4t, y(t) = 3\sqrt{t^2 - 1}$.
81. Spočtěte délku křivky $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2} \ln y; y \in [1, e]$.
[$\frac{e^2 + 1}{4}$]
82. Spočtěte obsah plochy, která leží uvnitř křivky $r = 2 \cos \varphi$ a vně křivky $r = 1$.

83. Spočtete povrch rotačního tělesa (dle osy x) $x(t) = 2 \cos t, y(t) = 2 \sin t; t \in [0, \frac{\pi}{6}]$.
[$4\pi(2 - \sqrt{3})$]
84. Nalezněte body, ve kterých má křivka $x(t) = 3 - 4 \cos t, y(t) = 4 + 3 \cos t$ vertikální a horizontální tečny.
85. Nalezněte body, ve kterých má křivka $x(t) = 3 + 4 \sin t, y(t) = 4 - 3 \cos t$ vertikální a horizontální tečny. Načrtněte křivku.

3 Vlastnosti množin, Posloupnosti

Rozcvička

- Vyšetřete omezenost množiny $\{3 - n | n \in \mathcal{N}\}$ [shora]
- Vyšetřete omezenost množiny $\{2(1 - x) + 5 | x \in [0, 1]\}$ [omezená]
- Vyšetřete omezenost množiny $\{x^2 + 5x - 6 | x \in [-1, +\infty)\}$ [zdola]
- Vyšetřete omezenost množiny $\left\{ \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \mid n \in \mathcal{N} \right\}$ [zdola]

Zkouškové příklady

3.1 Vlastnosti množin

1. Dokažte $\inf \left\{ \frac{2n^2 + n + 11}{n^2 + 5} \mid n \in \mathcal{N} \right\} = 2$
2. Dokažte $\sup \left\{ \frac{2n^2 + n + 11}{n^2 + 5} \mid n \in \mathcal{N} \right\} = \frac{7}{3}$
3. Dokažte $\inf \left\{ \frac{(-1)^n(n^2 + 1)}{n^2 - 4n + 5} \mid n \in \mathcal{N} \right\} = -5$
4. Dokažte $\sup \left\{ \frac{(-1)^n(n^2 + 1)}{n^2 - 4n + 5} \mid n \in \mathcal{N} \right\} = 5$
5. Dokažte $\sup \left\{ \frac{1 + (-1)^n}{2} + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \mid n \in \mathcal{N} \right\} = 1$
6. Dokažte $\inf \left\{ \frac{1 + (-1)^n}{2} + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \mid n \in \mathcal{N} \right\} = 0$
7. Dokažte $\inf \left\{ \frac{3x + 1 - 2x^2}{x^2 + 5x} \mid x > 0 \right\} = -2$
8. Dokažte $\sup \left\{ \frac{3x + 1 - 2x^2}{x^2 + 5x} \mid x > 0 \right\} = +\infty$
9. Dokažte $\inf \{ \sqrt{n+1} - \sqrt{n} | n \in \mathcal{N} \} = 0$
10. Dokažte, že $\sup \left\{ \frac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x} + x} : x > 0 \right\} = 2$

3.2 Omezenost a monotonie posloupností

11. Vyšetřete monotonii a omezenost posloupnosti $a_n = \frac{n + (-1)^n}{n}$ [omezená zdola 0, shora 3/2, není monotonní]
12. Vyšetřete monotonii a omezenost posloupnosti $a_n = \frac{n^2}{n+1}$ [omezená zdola 1/2, neomezená shora, rostoucí]

13. Vyšetřete monotonii a omezenost posloupnosti $a_n = \frac{4n}{\sqrt{4n^2 + 1}}$ [shora 2, zdola $4/5\sqrt{5}$, rostoucí]
14. Vyšetřete monotonii a omezenost posloupnosti $a_n = \frac{4^n}{2^n + 100}$ [zdola $2/51$, shora neomezená, rostoucí]
15. Vyšetřete monotonii a omezenost posloupnosti $a_n = \frac{10^{10}\sqrt{n}}{n + 1}$ [zdola 0, shora $1/2 \cdot 10^{10}$, klesající]
16. Vyšetřete monotonii a omezenost posloupnosti $a_n = \ln \frac{2n}{n + 1}$ [zdola 0, shora $\ln 2$, rostoucí]
17. Vyšetřete monotonii a omezenost posloupnosti $a_n = \frac{(n + 1)^2}{n^2}$ [shora 4, zdola 1, klesající]
18. Vyšetřete monotonii a omezenost posloupnosti $a_n = \sqrt{4 - \frac{1}{n}}$ [zdola $\sqrt{3}$, shora 2, rostoucí]
19. Vyšetřete monotonii a omezenost posloupnosti $a_n = (-1)^{2n+1}\sqrt{n}$ [shora -1, není zdola, klesající]
20. Vyšetřete monotonii a omezenost posloupnosti $a_n = \frac{2^n - 1}{2^n}$ [zdola $1/2$, shora 1, rostoucí]
21. Vyšetřete monotonii a omezenost posloupnosti $a_n = \sin\left(\frac{\pi}{n + 1}\right)$ [zdola 0, shora 1, klesající]
22. Vyšetřete monotonii a omezenost posloupnosti $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n + 1}$ [zdola 0, shora $1/2$, klesající]
23. Vyšetřete monotonii a omezenost posloupnosti $a_n = \frac{\ln(n + 2)}{n + 2}$ [zdola 0, shora $1/3 \ln 3$, klesající]
24. Vyšetřete monotonii a omezenost posloupnosti $a_n = \frac{3^n}{(n + 1)^2}$ [zdola $3/4$, shora není, rostoucí]

3.3 Limity posloupností

25. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{4^n + 1}$ [0]
26. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \sqrt{n}$ [neex]
27. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ [0]
28. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{tg} \frac{n\pi}{4n + 1}$ [1]
29. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n + 1)^2}{(3n - 1)^2}$ [$\frac{4}{9}$]
30. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{\sqrt{2n^4 + 1}}$ [$\frac{1}{2}\sqrt{2}$]
31. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos \pi n$ [neex]

32. $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{1/\sqrt{n}}$ [1]
33. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n) - \ln(n+1)$ [0]
34. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{2\sqrt{n}}$ [$\frac{1}{2}$]
35. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}$ [e^2]
36. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{n^2}$ [$+\infty$]
37. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1) \cos \sqrt{n}}{n(1+\sqrt{n})}$ [0]
38. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n} \sin e^n \pi}{n+1}$ [0]
39. $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \ln 3n - \ln(n^2 + 1)$ [$\ln 9$]
40. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^n$ [0]
41. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1}$ [0]
42. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^{100n}}{n!}$ [0]
43. $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\alpha/n}$ [$1, \alpha > 0$]
44. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{n+1}}{4^{n-1}}$ [0]
45. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+2)^{1/(n+2)}$ [1]
46. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+2)^{1/n}$ [1]
47. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n e^{-x} dx$ [1]
48. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-n}^n \frac{dx}{1+x^2}$ [π]
49. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n^2}{n}$ [0]
50. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-1+1/n}^{1-1/n} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

51. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5^{n+1}}{4^{2n} - 1}$ [0]
52. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^n$ [$\frac{1}{e}$]
53. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_n^{n+1} e^{-x^2} dx$ [0]
54. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{2^{n^2}}$ [0]
55. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{2n} \right)^{2n}$ [e^x]
56. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-1/n}^{1/n} \sin x^2 dx$ [0]
57. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(t + \frac{x}{n} \right)^n, x > 0, t > 0$
58. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ [0]
59. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2 + n} - n$ [$\frac{1}{2}$]
60. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{n^3 + n} - n$
61. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2 + \cdots + n}{n^2}$ [$\frac{1}{2}$]
62. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1^3 + 2^3 + \cdots + n^3}{2n^4 + n - 1}$ [$\frac{1}{8}$]
63. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{(1+n)(2+n)}$ [$+\infty$]
64. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(n\pi) \sin(n\pi)$ [0]
65. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{1+n} \right)^{1/n}$ [1]
66. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos \frac{\pi}{n} \sin \frac{\pi}{n}$ [0]
67. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{n} \right)^n$ [$+\infty$]
68. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n(n+1))}{n}$ [0]
69. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right)^n$

70. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{n} \ln \frac{n}{\pi}$ [0]
71. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n \frac{dx}{\sqrt{x}}$
72. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2}$ [$\frac{1}{2}$]
73. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2n+1} - \sqrt{n}$ [$+\infty$]
74. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ [0]
75. $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3\sqrt{n^2+1} - 2n$ [$+\infty$]
76. $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(\sqrt{n^2+1} - n)$ [$\frac{1}{2}$]
77. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}$ [0]
78. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{3n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$ [$+\infty$]
79. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{3n^2+n+1} - \sqrt{3n^2-n+1}$ [$\frac{1}{\sqrt{3}}$]
80. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}}{(\sqrt{n})^3}$ [$\frac{2}{3}$]
81. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{n^2}$ [0]
82. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3}$ [$\frac{1}{3}$]
83. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^2} - \frac{n}{3}$ [$\frac{1}{2}$]
84. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n$ [e]
85. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3n+4}{3n+5}\right)^n$ [$\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$]
86. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2n+5}{2n+3}\right)^{n+1}$ [e]
87. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \sqrt{n+1} - \sqrt{n})^{\sqrt{n}}$ [\sqrt{e}]
88. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n^2 + 3n - 2)}{\ln(n^5 + n + 1)}$ [$\frac{2}{5}$]
89. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2 + e^{3n})}{\ln(3 + e^{2n})}$ [$\frac{3}{2}$]

90. Spočtete $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{-3n+5}(n+1)^{3n-5}$ [e^3]
91. Spočtete $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n} \sin(e^n \pi)}{n+1}$
92. Spočtete $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin \frac{1}{n}$ [1]
93. Spočtete $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{-3n}(n+1)^{3n-5}$ [0]
94. Spočtete $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \sqrt{n+1} - \sqrt{n})^{\sqrt{n}}$ [\sqrt{e}]
95. Spočtete $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\ln \left(\frac{3 + (-1)^{2n}}{3} + n \right) - \ln \left(\frac{6 + (-1)^{2n+1}}{3} + n \right) \right)$
96. Spočtete $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ [e]
97. Spočtete $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3n+4}{3n+5} \right)^n$ [$e^{-1/3}$]
98. Spočtete $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{1+n} \right)^{\frac{1}{n}}$ [1]
99. Spočtete $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-2)^n + (3)^n}{(-2)^{n+1} + (3)^{n+1}}$
100. Spočtete $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{(n!)^2}{(2n)!}}$ [$\frac{1}{4}$]
101. Spočtete $\lim_{n \rightarrow +\infty} (3n-5)^{-3n+5}(3n+5)^{3n-5}$ [e^{10}]

4 Konvergence číselných řad

Rozcvička

Zkouškové příklady

4.1 Sčítání řad

1. Sečtěte $\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$ [$\frac{1}{4}$]

2. Sečtěte $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2n(n+1)}$ [$\frac{1}{2}$]

3. Sečtěte $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+3)}$ [$\frac{11}{18}$]

4. Sečtěte $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{10^n}$ [$\frac{10}{3}$]

5. Sečtěte $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{67}{1000^n}$ [$\frac{67000}{999}$]

6. Sečtěte $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$ [4]

7. Sečtěte $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1-2^n}{3^n}$ [$-\frac{3}{2}$]

8. Sečtěte $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ [$\frac{1}{2}$]

9. Sečtěte $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n+3}}{3^n}$ [24]

4.2 Konvergence a absolutní konvergence

10. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^3+1}$ [konverguje]

11. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ [konverguje]

12. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ [diverguje]

13. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2n^2-n}}$ [diverguje]

14. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{1+n^2}$ [konverguje]
15. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{-n}$ [diverguje]
16. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln \sqrt{n}}{n}$ [diverguje]
17. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2+3^{-n}}$ [diverguje]
18. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+5}{5n^3+3n^2}$ [konverguje]
19. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n}$ [diverguje]
20. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{n^4+1}}$ [diverguje]
21. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{n^5+1}}$
22. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} n e^{-n^2}$ [konverguje]
23. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n\sqrt{n}}$ [konverguje]
24. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{10^n}{n!}$ [konverguje]
25. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$ [konverguje]
26. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$
27. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{100^n}$ [diverguje]
28. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln^2 n}{n}$
29. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln^n n}$

30. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{2}{3}\right)^n$ [konverguje]
31. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 + \sqrt{n}}$ [diverguje]
32. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$
33. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{(n+2)!}$ [konverguje]
34. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\ln n}\right)^{3/2}$
35. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\ln n}\right)^{1/2}$ [diverguje]
36. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+100}\right)^n$ [diverguje]
37. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-(1+1/n)}$ [diverguje]
38. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{e^n}$ [konverguje]
39. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ [konverguje]
40. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n+1)^{2n}}{(5n^2+1)^n}$
41. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!(2n)!}{(3n)!}$
42. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^{5/4}}$
43. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ [konverguje neabsolutně]
44. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n!}$ [diverguje]
45. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$ [konverguje neabsolutně]

46. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{(-2)^n}$ [diverguje]
47. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ [konverguje neabsolutně]
48. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{\pi}{4n^2}$ [konverguje absolutně]
49. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{2^n}$ [konverguje absolutně]
50. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n - 2\sqrt{n}}$ [konverguje neabsolutně]
51. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(3n+2)(3n+3)}{(3n+4)(3n+5)}$ [diverguje]
52. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$ [konverguje absolutně]
53. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ [konverguje neabsolutně]
54. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{3^{n-1}}$ [konverguje absolutně]
55. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ [konverguje]
56. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^5}{2^n + 3^n}$ [konverguje]
57. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n(n-1)}$ [konverguje]
58. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$ [diverguje]
59. Rozhodněte o konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1} \right)^n$
60. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$

61. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$
62. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{n!}$
63. Rozhodněte o konvergenci řady $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n^2}$
64. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(\pi n) \ln n}{n}$ [konverguje neabsolutně]
65. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}$
[konverguje neabsolutně]
66. Rozhodněte o konvergenci řady $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n}$ [diverguje]
67. Rozhodněte o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{\pi}{n}$
68. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+5}{2n+3}\right)^{n+1}$
69. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln^n \frac{1}{n}}$ [konverguje absolutně]

5 Obor konvergence mocninných řad a sčítání pomocí mocninných řad

Zkouškové příklady

5.1 Obor konvergence mocninných řad.

1. Nalezněte obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n$ $[(-1, 1)]$
2. Nalezněte obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^n$ $[\mathbb{R}]$
3. Nalezněte obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{+\infty} (-n)^{2n} x^{2n}$ $\{0\}$
4. Nalezněte obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} x^n$ $[-2, 2]$
5. Nalezněte obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{100}\right)^n x^n$ $\{0\}$
6. Nalezněte obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n}} x^n$ $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$
7. Nalezněte obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{n} x^n$ $[(-1, 1)]$
8. Nalezněte obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{10^n} x^n$ $[(-10, 10)]$
9. Nalezněte obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^n}$ $[\mathbb{R}]$
10. Nalezněte obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^n} (x-2)^n$ $[\mathbb{R}]$
11. Nalezněte obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{2^n} (x-2)^n$ $(0, 4)$
12. Nalezněte obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{2}{3}\right)^n (x+1)^n$ $[(-\frac{5}{2}, \frac{1}{2})]$
13. Nalezněte obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n}{n} (x-2)^n$ $[\frac{9}{5}, \frac{11}{5}]$

14. Nalezněte obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)(x-1)^{2n}$ [[0, 2]]
15. Nalezněte obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2n+1} x^{2n+1}$ [(-1, 1)]
16. Nalezněte obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{2} (x+1)^n$ [{-1}]
17. Nalezněte obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{3^{2n}} x^n$ [(-9, 9)]
18. Nalezněte obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{5^n} (x-2)^n$ [(-3, 7)]
19. Nalezněte poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n + 2^n}{n} (x+1)^n$ [$\frac{1}{3}$]]
20. Nalezněte poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3n)!}{n^n (2n)!} x^n$ [$\frac{4e}{27}$]]
21. Nalezněte poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} x^n$ [2]
22. Nalezněte poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n x^n$ [1]
23. Nalezněte obor konvergence mocninné řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n$
24. Nalezněte obor konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n+1} (x-4)^n$
25. Nalezněte obor konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$
26. Nalezněte obor konvergence mocninné řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n x^n$ [{\{0\}}]
27. Nalezněte obor konvergence mocninné řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-3)^n}{n} (x+1)^n$ [-1 ± $\frac{1}{3}$]]
28. Nalezněte obor konvergence mocninné řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-4)^n}{n} (x+1)^n$ [(- $\frac{5}{4}$, - $\frac{3}{4}$)]

5.2 Sčítání řad

29. Sečtěte $\sum_{n=0}^{+\infty} x^{5n+1}$ [$\frac{x}{1-x^5}$]
30. Sečtěte $\sum_{n=0}^{+\infty} 2x^{3n+2}$ [$\frac{2x^2}{1-x^3}$]
31. Sečtěte $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{2} x^{2n-1}$ [$\frac{3x}{2(1-x^2)}$]
32. Sečtěte $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-1)!}$ [xe^x]
33. Sečtěte $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n!}$ [$2e$]
34. Sečtěte $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3^{2n+2}}$ [$\frac{1}{64}$]
35. Sečtěte $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n)! 3^{2n}}$ [$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$]
36. Sečtěte $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n(n+1)}{n!}$ [$3e^2 - 1$]
37. Sečtěte $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{n(2n-1)}$ [$2x \operatorname{arctg} x - \ln(1+x^2)$]
38. Sečtěte $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n+1}}$ [1]
39. Sečtěte $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{2n+1}}{(2n+1)5^{2n+1}}$ [$\ln 2$]
40. Sečtěte $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)2^{2n+1}}$ [$\frac{1}{2} \ln 3$]
41. Sečtěte $\sum_{n=0}^{+\infty} n(n+1)x^n$ [$\frac{2x}{(1-x)^3}$]

6 Rozvoj funkce do mocninné řady

Rozcvička

- Do mocninné řady se středem v bodě 0 rozviňte funkci $f(x) = e^{-x}$.

$$[\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}]$$

- Do mocninné řady se středem v bodě 0 rozviňte funkci $f(x) = e^{ax}$.

$$[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} x^n]$$

Zkouškové příklady

1. Do mocninné řady se středem v bodě 0 rozviňte funkci $f(x) = \cosh x$.

$$[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}]$$

2. Do mocninné řady se středem v bodě 0 rozviňte funkci $f(x) = \cos ax$.

$$[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n a^{2n}}{(2n)!} x^{2n}]$$

3. Do mocninné řady se středem v bodě -2 rozviňte funkci $f(x) = \frac{1}{1-2x}$.

$$[\frac{1}{5} \sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{2}{5})^n (x+2)^n]$$

4. Do mocninné řady se středem v bodě π rozviňte funkci $f(x) = \sin x$.

$$[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} (x-\pi)^{2n+1}]$$

5. Do mocninné řady se středem v bodě 1 rozviňte funkci $f(x) = \sin \frac{1}{2}\pi x$.

$$[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (\frac{\pi}{2})^{2n} (x-1)^{2n}]$$

6. Do mocninné řady se středem v bodě 1 rozviňte funkci $f(x) = \ln(1+2x)$.

$$[\ln 3 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (\frac{2}{3})^n (x-1)^n]$$

7. Do mocninné řady se středem v bodě 2 rozviňte funkci $f(x) = x \ln x$.

$$[2 \ln 2 + (1 + \ln 2)(x-2) + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)2^{n-1}} (x-2)^n]$$

8. Do mocninné řady se středem v bodě 0 rozviňte funkci $f(x) = x \sin x$.

$$[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+2}]$$

9. Do mocninné řady se středem v bodě -2 rozviňte funkci $f(x) = \frac{1}{(1-2x)^3}$.

$$[\sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) \frac{2^{n-1}}{5^{n+3}} (x+2)^n]$$

10. Do mocninné řady se středem v bodě π rozviňte funkci $f(x) = \cos^2 x$.

$$[1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!} (x-\pi)^{2n}]$$

11. Do mocninné řady se středem v bodě 0 rozviňte funkci $\ln(1-x^2)$.

$$[-\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n}]$$

12. Do mocninné řady se středem v bodě 0 rozviňte funkci $x^2 \sin x$.

$$[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+3}]$$

13. Do mocninné řady se středem v bodě 0 rozviňte funkci e^{3x^3} .

$$[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n!} x^{3n}]$$
14. Do mocninné řady se středem v bodě 0 rozviňte funkci $\frac{2x}{1-x^2}$.

$$[2 \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n+1}]$$
15. Do mocninné řady se středem v bodě 0 rozviňte funkci $\frac{1}{1-x} + e^x$.

$$[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!+1}{n!} x^n]$$
16. Do mocninné řady se středem v bodě 0 rozviňte funkci $x \ln(1+x^3)$.

$$[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^{3n+1}]$$
17. Do mocninné řady se středem v bodě 0 rozviňte funkci $x^3 e^{-x^3}$.

$$[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{3n+3}]$$
18. Do mocninné řady se středem v bodě 0 rozviňte funkci $\sqrt{1-x^2}$.
19. Do mocninné řady se středem v bodě 0 rozviňte funkci $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$.

$$[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} \prod_{k=1}^n (2k-1) x^n]$$
20. Do mocninné řady se středem v bodě 0 rozviňte funkci $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$.

$$[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3^n n!} \prod_{k=1}^n (3k-2) x^n]$$
21. Do mocninné řady se středem v bodě 0 rozviňte funkci $\sqrt[4]{1-x}$.
22. Do mocninné řady se středem v bodě 0 rozviňte funkci $x e^{5x^2}$.

$$[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5^n}{n!} x^{2n+1}]$$
23. Do mocninné řady se středem v bodě 0 rozviňte funkci $(x+x^2) \sin x^2$.

$$[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (x^{4n+3} + x^{4n+4})]$$
24. Do mocninné řady se středem v bodě 0 rozviňte funkci $x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(x^2+1)$.

$$[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n(2n-1)} x^{2n}]$$
25. Do mocninné řady se středem v bodě 0 rozviňte funkci $\left(\frac{4x^4+5x^2+1}{1+4x^2}\right) \operatorname{arctg} x$.

$$[x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{4n^2-1} x^{2n+1}]$$
26. Do mocninné řady se středem v bodě 0 rozviňte funkci $\operatorname{arctg} \left(\frac{2-2x}{1+4x}\right)$.

$$[\operatorname{arctg} 2 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} (2x)^{2n+1}]$$
27. Do mocninné řady se středem v bodě 0 rozviňte funkci $\frac{1}{4} \ln \left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x$.

$$[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}]$$
28. Do mocninné řady se středem v bodě 0 rozviňte funkci $\arcsin(2x)$.

$$[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n+1}}{(2n+1)n!} \prod_{k=1}^n (2k-1) x^{2k+1}]$$

Reference

- [1] Mareš J., Vondráčková J., *Cvičení z matematické analýzy: Diferenciální počet*, Vydavatelství ČVUT, 1999
- [2] Pelantová E., Vondráčková J., *Cvičení z matematické analýzy: Integrální počet a řady*, Vydavatelství ČVUT, 1998
- [3] Marsden J., Weinstein A., *Calculus II*, Springer, 1985