$\boxed{\text{01MAT2 Matematika 2 - Skriptum pro studenty}}$

Radek Fučík

verze: 19. února 2025

Obsah

1 Integrace racionálních funkcí

Definice 1.1 (Racionální funkce)
Racionální funkcí nazýváme funkci $f = \frac{p}{q}$, kde p a q jsou polynomy.

Poznámka. Chceme spočítat $\int \frac{p(x)}{q(x)}\mathrm{d}x$ umíme-li spočítat $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^k}$, $\int \frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^k}\mathrm{d}x$, $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+bx+c)^k}$.

Věta 1.2 (Rovnost polynomů)
Dva polynomy $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ a $q(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$ se na $\mathbb{C}$ (tj. i na $\mathbb{R}$) rovnají právě tehdy, když mají stejný stupeň ($n = m$) a $a_k = b_k$ pro všechna $k = 0, 1, \dots, n$.

Definice 1.3 (Ireducibilní polynom nad $\mathbb{R}$)
Polynom p nazýváme ireducibilním nad $\mathbb{R}$, pokud nemá žádný reálný kořen.

Poznámka. Polynom $(ax^2 + bx + c)^k$ je ireducibilní nad $\mathbb{R}$, právě když $b^2 - 4ac < 0$.

Postup 1.4 (Postup integrace racionální funkce pomocí rozkladu na parciální zlomky)
Postup integrace racionální funkce $\int \frac{p(x)}{q(x)}\mathrm{d}x$, kde $\mathrm{st}\, p < \mathrm{st}\, q$.

1. Faktorizace polynomu q na reálné kořenové činitele a ireducibilní polynomy nad $\mathbb{R}$:

$$q(x) = a_n \prod_{i=1}^{k} (x - a_i)^{n_i} \prod_{i=1}^{\ell} (x^2 + b_i x + c_i)^{m_i}$$

2. Rozložení $\frac{p(x)}{q(x)}$ na parciální zlomky podle následujících pravidel:

   (a) Faktor typu $(x - a)^n$ ve jmenovateli vede na parciální zlomky

   $$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x-a)^n}.$$

   (b) Faktor typu $(x^2 + bx + c)^m$ ve jmenovateli vede na parciální zlomky

   $$\frac{B_1 x + C_1}{x^2 + bx + c} + \frac{B_2 x + C_2}{(x^2 + bx + c)^2} + \dots + \frac{B_m x + C_m}{(x^2 + bx + c)^m}.$$

3. Neznámé koeficienty (viz A_i, B_i a C_i) v čitatelích všech parciálních zlomků je nutné spočítat pomocí zpětného sloučení parciálních zlomků na společný jmenovatel.

4. Porovnáním výsledného polynomu v čitateli pomocí věty 1.2 s původním polynomem $p(x)$ podle koeficientů u jednotlivých mocnin x^k dostaneme soustavu lineárních rovnic.

5. Řešením soustavy lineárních rovnic dostaneme rozklad racionální funkce na parciální zlomky.

6. Postupná integrace jednotlivých parciálních zlomků.

2 Zobecněný Riemannův integrál

2.1 Definice a výpočet

Poznámka. Pro spojitou funkci f na intervalu $[a,b]$ jsme v zimním semestru definovali určitý (vlastní) Riemannův integrál. V této kapitole budeme pro tento integrál používat symbol $\mathcal{R}\int\limits_a^b$.

Definice 2.1 (Zobecněný a nevlastní Riemannův integrál)
Buď $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Nechť pro funkci f platí, že $\Big(\forall x \in [a,b)\Big)\Big(\exists \mathcal{R}\int\limits_a^x f(t)\mathrm{d}t\Big)$, resp. $\Big(\forall x \in (a,b]\Big)\Big(\exists \mathcal{R}\int\limits_x^b f(t)\mathrm{d}t\Big)$. Existuje-li limita $\lim\limits_{x\to b-} \mathcal{R}\int\limits_a^x f(t)\mathrm{d}t$, resp. $\lim\limits_{x\to a+} \mathcal{R}\int\limits_x^b f(t)\mathrm{d}t$, nazýváme tuto limitu **zobecněným** nebo **nevlastním** (v případě $b = +\infty$, resp. $a = -\infty$) **Riemannovým integrálem**, který značíme $\int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t$. Dále říkáme, že pokud je tato limita konečná, integrál konverguje. V opačném případě integrál diverguje.

Definice 2.2 (Kritický bod)
Bod $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ nazveme kritickým bodem integrálu $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$, kde $b \in \mathbb{R}$, jestliže $a = +\infty$ nebo $a = -\infty$ nebo $a \notin D_f$.

Definice 2.3
Buď funkce f spojitá na intervalu $[a,b]$ kromě bodu $c \in (a,b)$ a nechť $\lim\limits_{x\to c} |f(x)| = +\infty$. Řekneme, že nevlastní integrál $\int\limits_a^b f$ konverguje, právě když konvergují integrály $\int\limits_a^c f$ a $\int\limits_c^b f$.

Věta 2.4 (Newtonova formule)
Buď $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Nechť $\exists \mathcal{R}\int\limits_a^x f(t)\mathrm{d}t$ pro $\forall x \in [a,b)$, resp. $\exists \mathcal{R}\int\limits_x^b f(t)\mathrm{d}t$ pro $\forall x \in (a,b]$. Nechť k funkci f existuje primitivní funkce F na intervalu (a,b). Pokud existuje konečná limita $\lim\limits_{x\to a+} F(x)$, resp. $\lim\limits_{x\to b-} F(x)$, pak integrál $\int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t$ konverguje a platí

$$\int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x).$$

Věta 2.5 (Metoda per partes)
Buď $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Nechť pro funkce fg' a $f'g$ platí:

$$\Big(\forall x \in [a,b)\Big)\Big(\exists \mathcal{R}\int\limits_a^x f(t)g'(t)\mathrm{d}t \ \wedge\ \exists \mathcal{R}\int\limits_a^x f'(t)g(t)\mathrm{d}t\Big),$$

resp.

$$\Big(\forall x \in (a,b]\Big)\Big(\exists \mathcal{R}\int\limits_x^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t \ \wedge\ \exists \mathcal{R}\int\limits_x^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t\Big),$$

a nechť existují a jsou konečné limity $\lim\limits_{x\to a+} f(x)g(x)$, resp. $\lim\limits_{x\to b-} f(x)g(x)$.

Pokud existuje alespoň jeden z integrálů $\int\limits_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t$ a $\int\limits_a^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t$, potom existuje i druhý a platí:

$$\int\limits_a^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to b-} f(x)g(x) - \lim_{x\to a+} f(x)g(x) - \int\limits_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t.$$

Věta 2.6 (Metoda substituce)

Buď b jediným kritickým bodem integrálu $\int\limits_a^b f$ a nechť pro funkce f a φ platí:

1. f je spojitá na $[a, b)$,
2. φ je ryze monotonní a má spojitou derivaci na $[\alpha, \beta)$.
3. $\varphi([\alpha, \beta)) = [a, b)$ tak, že $a = \varphi(\alpha)$ a $b = \lim\limits_{\xi\to\beta-} \varphi(\xi)$.

Potom platí:

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

2.2 Konvergence

Lemma 2.7 (Referenční integrály)

$\int\limits_0^1 \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ konverguje pro $p < 1$ a diverguje pro $p \geq 1$.

$\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ konverguje pro $p > 1$ a diverguje pro $p \leq 1$.

Důkaz. a) 0 je pro $p > 0$ kritický bod.

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{x^p} = \lim_{x\to 0+} \int\limits_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^p} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0+} \left[\frac{1}{1-p} t^{1-p}\right]_x^1 = \frac{1}{1-p} - \lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{1-p} x^{1-p} = \begin{cases} \frac{1}{1-p} & p < 1 \\ +\infty & p > 1 \end{cases} \\ \lim\limits_{x\to 0+} \Big[\ln t\Big]_x^1 = +\infty \qquad p = 1 \end{cases}$$

b) $+\infty$ je kritický bod.

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} = \lim_{x\to+\infty} \int\limits_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^p} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} \left[\frac{1}{1-p} t^{1-p}\right]_1^x = -\frac{1}{1-p} + \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{1-p} x^{1-p} = \begin{cases} +\infty & p < 1 \\ -\frac{1}{1-p} & p > 1 \end{cases} \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \Big[\ln t\Big]_1^x = +\infty \qquad p = 1 \end{cases}$$

□

Věta 2.8 (Základní srovnávací kritérium konvergence (ZSK))

Buď b jediným kritickým bodem integrálů $\int\limits_a^b f$ a $\int\limits_a^b g$. Nechť $\exists \mathcal{R}\int\limits_a^x f$ a $\exists \mathcal{R}\int\limits_a^x g$ pro $\forall x \in [a, b)$ a $0 \leq f(x) \leq g(x)$ pro $\forall x \in (a, b)$. Potom

1. $\int\limits_a^b g$ konverguje $\Rightarrow \int\limits_a^b f$ konverguje,

2. $\int\limits_a^b f$ diverguje $\Rightarrow \int\limits_a^b g$ diverguje.

Důkaz. Označme integrály jakožto funkce horní meze $F(x) = \mathcal{R}\int\limits_a^x f(t)\mathrm{d}t$ a $G(x) = \mathcal{R}\int\limits_a^x g(t)\mathrm{d}t$, kde snadno nahlédneme, že $0 \leq F(x) < G(x)$ pro $\forall x \in (a, b)$.

1. Ukážeme, že $\lim\limits_{x\to b-} F(x)$ existuje a je konečná. Funkce F je spojitá a nerostoucí funkce, protože je definovaná jako funkce horní meze integrálu z nezáporné funkce f. Odtud plyne, že limita $\lim\limits_{x\to b-} F(x)$ existuje a to buď konečná nebo nekonečná. Nekonečná být nemůže, neb dle předpokladu $\lim\limits_{x\to b-} G(x)$ konverguje.

2. $\int\limits_a^b f$ diverguje, proto $\lim\limits_{x\to b-} F(x) = +\infty$. Z nerovnosti $F(x) < G(x)$ a limitního přechodu $\lim\limits_{x\to b-}$ plyne $\lim\limits_{x\to b-} G(x) = +\infty$.

$\square$

Věta 2.9 (Limitní srovnávací kritérium konvergence (LSK))
Buď b jediným kritickým bodem integrálů $\int\limits_a^b f$ a $\int\limits_a^b g$. Nechť $\exists\mathcal{R}\int\limits_a^x f$ a $\exists\mathcal{R}\int\limits_a^x g$ pro $\forall x \in [a, b)$ a $f(x) \geq 0$ a $g(x) \geq 0$ pro $\forall x \in (a, b)$. Nechť existuje limita $\lim\limits_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = c \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
Potom platí:

1. Pokud $0 < c < +\infty$, pak $\int\limits_a^b f$ konverguje $\Leftrightarrow \int\limits_a^b g$ konverguje.

2. Pokud $c > 0$, pak $\int\limits_a^b g$ diverguje $\Rightarrow \int\limits_a^b f$ diverguje.

3. Pokud $c < +\infty$, pak $\int\limits_a^b g$ konverguje $\Rightarrow \int\limits_a^b f$ konverguje.

3 Kuželosečky

3.1 Kartézský systém souřadnic v $\mathbb{R}^2$

Poznámka. Kartézský systém souřadnic (O, x, y). Posunutí (přechod) do systému (O', x', y'), kde $O' = [x_0, y_0]$ transformacemi

$$x = x_0 + x',$$
$$y = y_0 + y'.$$

Definice 3.1 (Vzdálenost bodů)
Vzdálenost dvou bodů $A = [x_A, y_A]$ a $B = [x_B, y_B]$:

$$\mathrm{d}(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.$$

Definice 3.2 (Vzdálenost bodu a přímky)
Vzdálenost bodu $A = [x_A, y_A]$ a přímky p:

$$\mathrm{d}(p, A) = \min_{B \in p} \mathrm{d}(A, B).$$

Věta 3.3 (Vzdálenost přímky od počátku)
Vzdálenost přímky $p : ax + by + c = 0$ od počátku $O = [0, 0]$ je dána výrazem

$$\mathrm{d}(p, O) = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Důkaz. Vzdálenost počátku O od přímky p se realizuje na kolmici. Sestrojíme proto kolmici q k přímce p, která prochází počátkem a změříme vzdálenost bodu A průniku přímek p a q od O.

Připomeňme, že koeficienty a a b tvoří normálový (kolmý) vektor k přímce p. Proto přímku q hledáme ve tvaru $q : bx - ay + d = 0$ neb vektor $(b, -a)$ je kolmý na (a, b). Nyní stačí určit koeficient d podle podmínky $O \in q$, odkud $d = 0$.

Dalším krokem je nalezení průsečíku $A = [x_A, y_A]$ přímek p a q. Řešením rovnic

$$\begin{aligned} ax_A + by_A + c &= 0 \\ bx_A - ay_A &= 0. \end{aligned}$$

dostaneme souřadnice průsečíku

$$x_A = -\frac{ac}{a^2 + b^2}, \quad y_A = -\frac{bc}{a^2 + b^2}.$$

Nakonec spočítáme vzdálenost bodu A od počátku O

$$\mathrm{d}(p, O) = \mathrm{d}(O, A) = \frac{\sqrt{a^2c^2 + b^2c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}^2} = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

□

Důsledek 3.4 (Vzdálenost přímky od bodu)
Vzdálenost přímky $p : ax + by + c = 0$ od bodu $B = [x_B, y_B]$ je dána výrazem

$$\mathrm{d}(p, B) = \frac{|ax_B + by_B + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Důkaz. Použijeme výsledek Věty 3.3, pro který posuneme počátek pomocné soustavy souřadné (O', x', y') do bodu B, tj. počátek O' má v původní souřadné soustavě souřadnice $O' = B = [x_B, y_B]$. Transformační vztahy posunutí $(O, x, y) \to (O', x', y')$ jsou

$$\begin{aligned} x &= x_B + x', \\ y &= y_B + y'. \end{aligned}$$

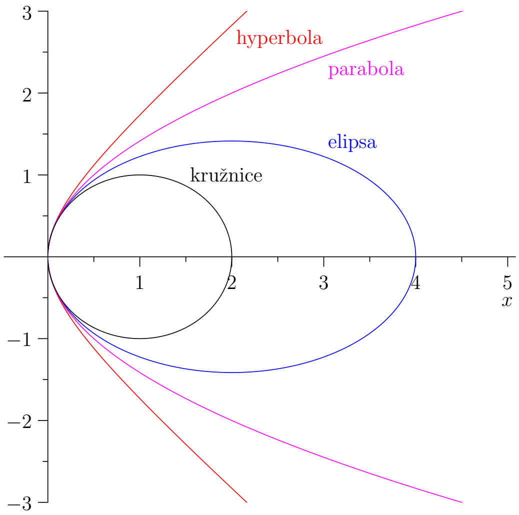
Přímka p má tedy v čárkované soustavě rovnici $p : a(x_B + x') + b(y_B + y') + c = 0$, tj.

$$p : ax' + by' + \underbrace{ax_B + by_B + c}_{\text{ozn. } c'} = 0.$$

Podle Věty 3.3 je vzdálenost počátku O' od přímky p (vyjádřené v čárkované soustavě)

$$\mathrm{d}(O', p) = \frac{|c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|ax_B + by_B + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

□



3.2 Kružnice a elipsa

Definice 3.5 (Kružnice)
Kružnice se středem v bodě S o poloměru $r > 0$

$$\mathcal{K} = \{A : \mathrm{d}(A, S) = r\}\,.$$

Poznámka. Nechť $S = [x_0, y_0]$ a bod $A = [x, y]$. Pak $A \in \mathcal{K}$ když $\mathrm{d}(A, S) = r$, tj.

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Definice 3.6 (Elipsa)
Elipsa s ohnisky F_1 a F_2 a délkou hlavní poloosy a

$$\mathcal{E} = \{A : \mathrm{d}(A, F_1) + \mathrm{d}(A, F_2) = 2a\}\,,$$

kde střed S se nachází v polovině úsečky $\overline{F_1F_2}$ a $2a > \mathrm{d}(F_1, F_2) \geq 0$.

Poznámka. Nechť $S = [0, 0]$, $F_1 = [-e, 0]$, $F_2 = [e, 0]$, tj. hlavní poloosa je ve směru osy x. Číslo e nazýváme excentricita (výstřednost). Rovnici všech bodů $A = [x, y] \in \mathcal{E}$ dostaneme z definiční rovnice

$$\mathrm{d}(A, F_1) + \mathrm{d}(A, F_2) = 2a$$

pomocí algebraických manipulací ve tvaru

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

kde mezi koeficienty a, b a e platí z Pythagorovy věty

$$e^2 + b^2 = a^2.$$

Koeficient b se nazývá vedlejší poloosa ($b < a$).Vrcholy elipsy se nacházejí v bodech $V_{1,2} = [x_0 \pm a, y_0]$, $V_{3,4} = [x_0, y_0 \pm b]$.

Analogicky lze odvodit rovnici pro elipsu s hlavní poloosou ve směru osy y.

Věta 3.7 (Rovnice elipsy)
Rovnice elipsy se středem v bodě $S = [x_0, y_0]$, excentricitou e a hlavní poloosou a ve směru osy x

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Rovnice elipsy se středem v bodě $S = [x_0, y_0]$, excentricitou e a hlavní poloosou a ve směru osy y

$$\frac{(x-x_0)^2}{b^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1.$$

Pro parametry a, b a e platí $e^2 + b^2 = a^2$.

Důkaz. Plyne z definice a předchozí poznámky. Vrcholy $V_{1,2} = [x_0 \pm a, y_0]$, $V_{3,4} = [x_0, y_0 \pm b]$. V prvním případě, $F_{1,2} = [x_0 \pm e, y_0]$. V druhém pak $F_{1,2} = [x_0, y_0 \pm e]$. □

3.3 Hyperbola

Definice 3.8 (Hyperbola)
Hyperbola s ohnisky F_1 a F_2 a délkou reálné poloosy $a > 0$

$$\mathcal{H} = \left\{ A : \Big| \mathrm{d}(A, F_1) - \mathrm{d}(A, F_2) \Big| = 2a \right\},$$

kde střed S se nachází v polovině úsečky $\overline{F_1F_2}$ a $2a < \mathrm{d}(F_1, F_2)$.

Poznámka. Nechť $S = [0, 0]$, $F_1 = [-e, 0]$, $F_2 = [e, 0]$ (e–excentricita), tj. reálná poloosa a je ve směru osy x. Rovnici všech bodů $A = [x, y] \in \mathcal{H}$ odvodíme z definiční rovnice

$$\Big| \mathrm{d}(A, F_1) - \mathrm{d}(A, F_2) \Big| = 2a,$$

kterou je též možné zapsat ve tvaru

$$\mathrm{d}(A, F_1) - \mathrm{d}(A, F_2) = \pm 2a,$$

který vyjadřuje obě větve hyperboly (pro $x > 0$ i $x < 0$). Po dosazení za definici vzdálenosti bodů jednu z odmocnin převedeme na druhou stranu rovnice

$$\sqrt{(x+e)^2 + y^2} - \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = \pm 2a$$

a umocníme na druhou

$$(x+e)^2 + y^2 = (x-e)^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x-e)^2 + y^2} + 4a^2.$$

Tuto rovnici upravíme a umocníme na druhou

$$x^2(e^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(e^2 - a^2).$$

Dle předpokladu je $0 < 2a < \mathrm{d}(F_1, F_2) = 2e$, proto $a < e$ a můžeme zavést parametr $b^2 = e^2 - a^2$, který nazveme imaginární poloosou. Celkem rovnici hyperboly zapisujeme ve tvaru

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Vrcholy hyperboly se nacházejí v bodech $V_{1,2} = [\pm a, 0]$.

Analogicky lze odvodit rovnici pro hyperbolu s reálnou poloosou ve směru osy y.

Věta 3.9 (Rovnice hyperboly)
Rovnice hyperboly se středem v bodě $S = [x_0, y_0]$, excentricitou e a reálnou poloosou a ve směru osy x

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Rovnice hyperboly se středem v bodě $S = [x_0, y_0]$, excentricitou e a reálnou poloosou a ve směru osy y

$$-\frac{(x-x_0)^2}{b^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1.$$

Pro parametry a, b a e platí $e^2 = a^2 + b^2$.

Důkaz. Plyne z definice a předchozí poznámky. V prvním případě, $F_{1,2} = [x_0 \pm e, y_0]$ a $V_{1,2} = [x_0 \pm a, y_0]$. V druhém pak $F_{1,2} = [x_0, y_0 \pm e]$ a $V_{1,2} = [x_0, y_0 \pm a]$. □

Věta 3.10 (Asymptoty hyperboly)
Hyperbola o rovnici

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

má v $\pm\infty$ asymptoty

$$y = y_0 \pm \frac{b}{a}(x - x_0).$$

Důkaz. Z rovnice hyperboly umíme vyjádřit dva funkční předpisy

$$f_{1,2}(x) = y_0 \pm \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(x-x_0)^2 - b^2},$$

které popisují horní ($y > y_0$) a spodní ($y < y_0$) část grafu hyperboly. Snadno nahlédneme, že

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(x-x_0)^2 - b^2} - \frac{b}{a}(x-x_0) = 0.$$

□

3.4 Parabola

Definice 3.11 (Parabola)
Parabola s ohniskem F a řídící přímkou p

$$\mathcal{P} = \{A : \mathrm{d}(A,F) = \mathrm{d}(A,p)\}.$$

Vrchol paraboly V se nachází v polovině vzdálenosti $\mathrm{d}(F,p)$ od ohniska F na normále k řídící přímce procházející ohniskem F.

Poznámka. Nechť $V = [0,0]$, $F = [0,e]$, $p : y = -e$ a $e > 0$, tj. parabola je otevřena v kladném směru osy y. Rovnici všech bodů $A = [x,y] \in \mathcal{P}$ dostaneme z definiční rovnice

$$\mathrm{d}(A,F) = \mathrm{d}(A,p),$$

tj.

$$\sqrt{x^2 + (y-e)^2} = \sqrt{(y+e)^2},$$

odkud pomocí algebraických manipulací dostaneme rovnici paraboly ve tvaru

$$x^2 = 4ey.$$

Analogicky lze odvodit rovnici pro parabolu otevřenou v kladném směru osy x: $y^2 = 4ex$. Pokud $e < 0$, je parabola otevřena v záporném směru os.

Věta 3.12 (Rovnice paraboly)
Parabola s vrcholem v bodě $V = [x_0, y_0]$ a excentricitou e položená v kladném ($e > 0$) nebo záporném ($e < 0$) směru osy x má rovnici

$$(y-y_0)^2 = 4e(x-x_0).$$

Parabola s vrcholem v bodě $V = [x_0, y_0]$ a excentricitou e položená v kladném ($e > 0$) nebo záporném ($e < 0$) směru osy y má rovnici

$$(x-x_0)^2 = 4e(y-y_0).$$

4 Polární souřadnice

4.1 Definice

Poznámka. Kartézské souřadnice bodu značíme v této kapitole indexem k, např. $A = [x, y]_k$; nově definované polární souřadnice pak indexem p, např. $A = [r, \varphi]_p$.

Definice 4.1 (Polární souřadnice)
Bod $[r, \varphi]_p$ v polárních souřadnicích leží ve vzdálenosti $|r|$ od pólu $[0, 0]_k$ na polopřímce svírající s polární osou úhel φ, pokud $r > 0$; úhel $\varphi + \pi$, pokud $r < 0$ nebo libovolný úhel, pokud $r = 0$.

Poznámka. Základní vlastnosti polárních souřadnic:

1. Nejednoznačnost $[r, \varphi]_p = [r, \varphi + 2k\pi]_p$ pro $\forall k \in \mathbb{Z}$.
2. Počátek (=pól) $[0, 0]_k = [0, \varphi]_p$ pro $\forall \varphi \in \mathbb{R}$.
3. $[r, \varphi + \pi]_p = [-r, \varphi]_p$.

Věta 4.2 (Vztah polárních a kartézských souřadnic)
Bod $[r, \varphi]_p$ v polárních souřadnicích je bod $[x, y]_k$ v kartézských souřadnicích, když platí

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, \\ y &= r \sin \varphi. \end{aligned}$$

Důkaz.
1. $r = 0$: $[0, 0]_k = [0, \varphi]_p$ pro $\forall \varphi \in \mathbb{R}$ a proto obě rovnosti platí.
2. $r > 0$: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ udávají polohu bodu na kružnici, tj. $x^2 + y^2 = r^2$.
3. $r < 0$: $[r, \varphi]_p = [-r, \varphi + \pi]_p$, přičemž $-r > 0$ můžeme pro tuto volbu použít předchozí, již dokázaný, bod:

$$\begin{aligned} x &= -r \cos(\varphi + \pi) = -r(\cos \varphi \cos \pi - \sin \varphi \sin \pi) = r \cos \varphi, \\ y &= -r \sin(\varphi + \pi) = -r(\sin \varphi \cos \pi + \cos \varphi \sin \pi) = r \sin \varphi. \end{aligned}$$

□

Důsledek 4.3 (Inverzní vztah polárních a kartézských souřadnic)

- Pro $x \neq 0$ platí $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ a $r^2 = x^2 + y^2$.
- Pro $y \neq 0$ platí $\varphi = \operatorname{arccotg} \frac{x}{y}$ a $r^2 = x^2 + y^2$.
- Pro $x = 0$ a $y = 0$ je $\varphi \in \mathbb{R}$ a $r = 0$.

4.2 Symetrie v polárních souřadnicích

Definice 4.4 (Symetrie v polárních souřadnicích)
Řekneme, že křivka $\mathcal{L}$ je symetrická podle

- osy x, platí-li $[r, -\varphi]_p \in \mathcal{L} \quad \Leftrightarrow \quad [r, \varphi + 2k\pi]_p \in \mathcal{L}$ pro $\forall \varphi$ a $\forall k \in \mathbb{Z}$;
- osy y, platí-li $[r, \pi - \varphi]_p \in \mathcal{L} \quad \Leftrightarrow \quad [r, \varphi + 2k\pi]_p \in \mathcal{L}$ pro $\forall \varphi$ a $\forall k \in \mathbb{Z}$;
- pólu O (počátku), platí-li $[-r, \varphi]_p \in \mathcal{L} \quad \Leftrightarrow \quad [r, \varphi + 2k\pi]_p \in \mathcal{L}$ pro $\forall \varphi$ a $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Lemma 4.5
Je-li křivka zároveň symetrická dle osy x a osy y, pak je symetrická dle počátku.

Důkaz. Podle definice symetrie dle počátku chceme ukázat, že platí

$$[r, \varphi]_p \in \mathcal{L} \quad \Leftrightarrow \quad [-r, \varphi]_p \in \mathcal{L}.$$

Vyjdeme z levé strany:

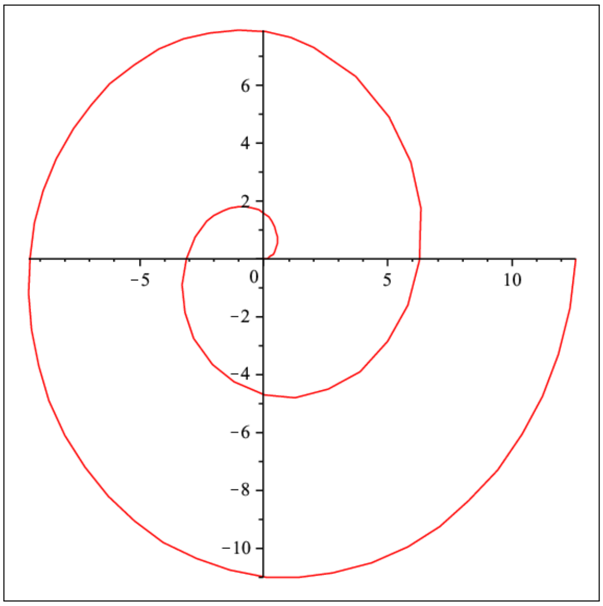
$$[r, \varphi]_p \in \mathcal{L} \quad \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{sym. dle x}} \quad [r, -\varphi]_p \in \mathcal{L} \underbrace{\Leftrightarrow}_{(\star)} [-r, \pi - \varphi]_p \in \mathcal{L} \quad \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{sym. dle y}} \quad [-r, \varphi]_p \in \mathcal{L},$$

kde jsme symbolem $(\star)$ označili použití vlastnosti polárních souřadnic

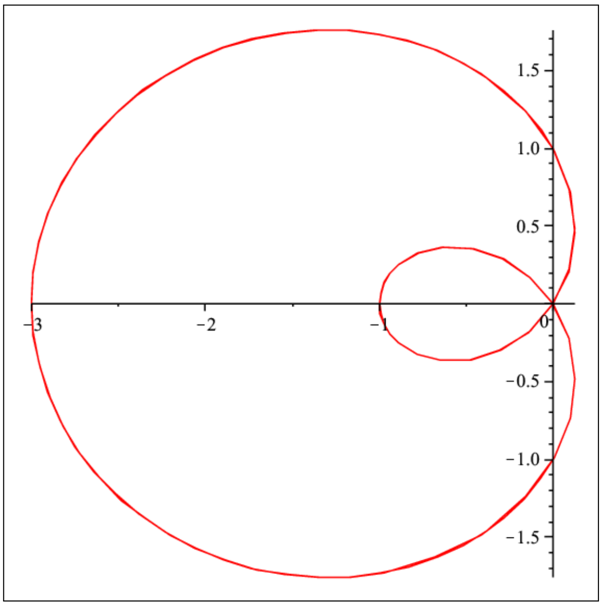
$$[-R, \phi]_p = [R, \phi + \pi]_p$$

pro $R := -r$ a $\phi := -\varphi$. □

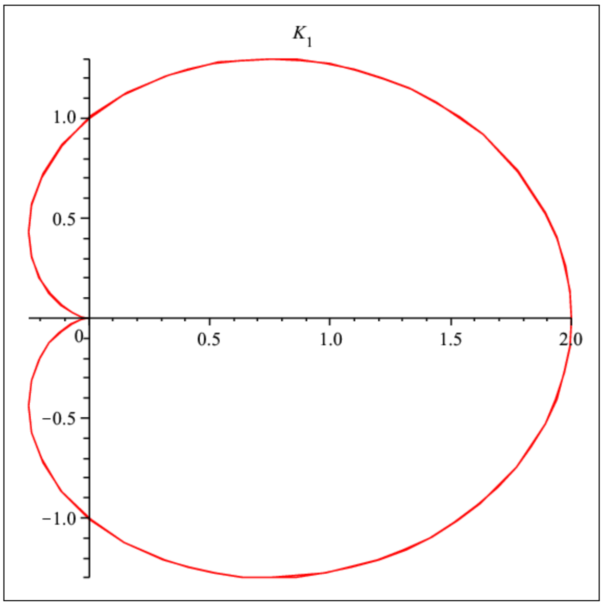
4.3 Příklady křivek v polárních souřadnicích



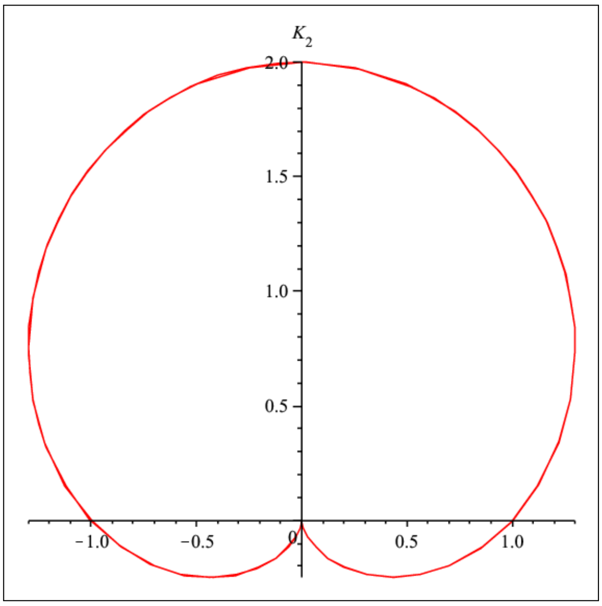
Archimedova spirála $\{[r, \varphi]_p : r = \varphi, \varphi \geq 0\}$



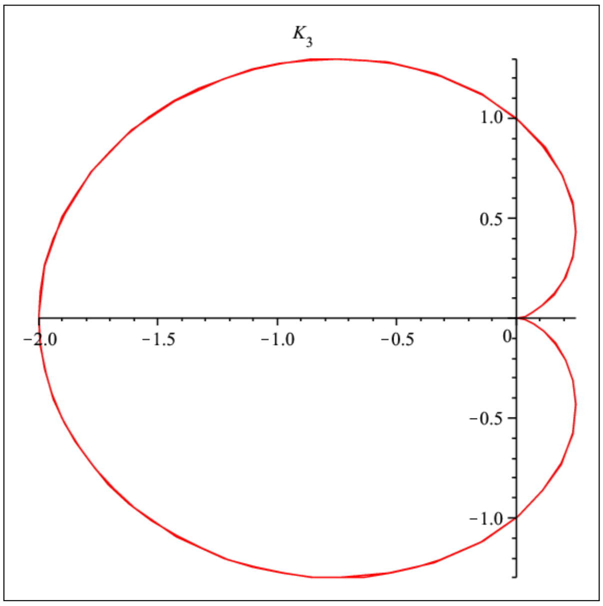
$\{[r, \varphi]_p : r = 1 - 2\cos\varphi\}$



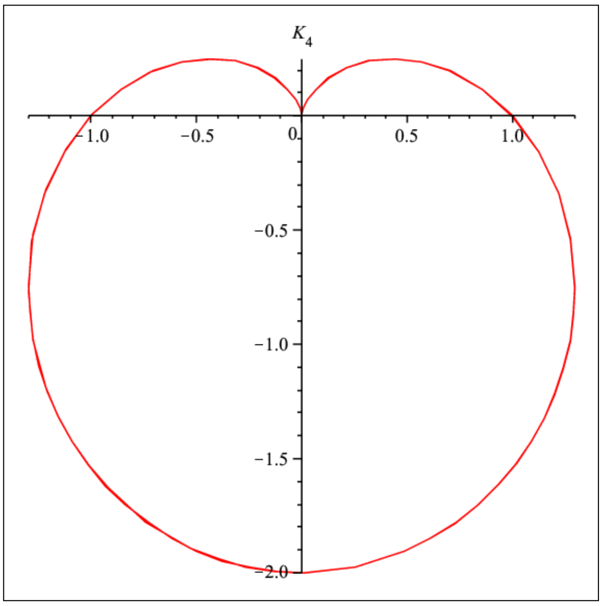
Kardioida (srdcovka) $r = 1 + \cos(\varphi)$



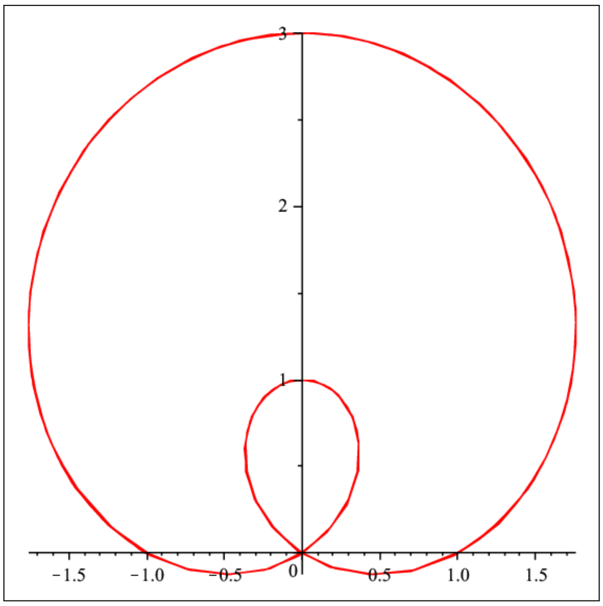
Kardioida (srdcovka) $r = 1 + \sin(\varphi)$



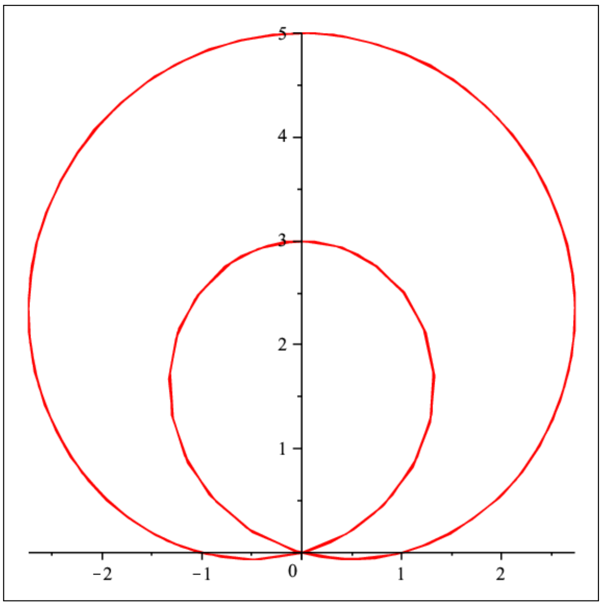
Kardioida (srdcovka) $r = 1 - \cos(\varphi)$



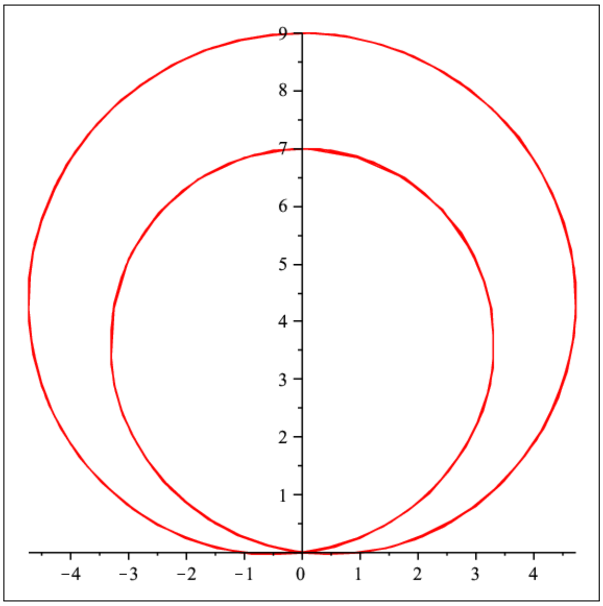
Kardioida (srdcovka) $r = 1 - \sin(\varphi)$



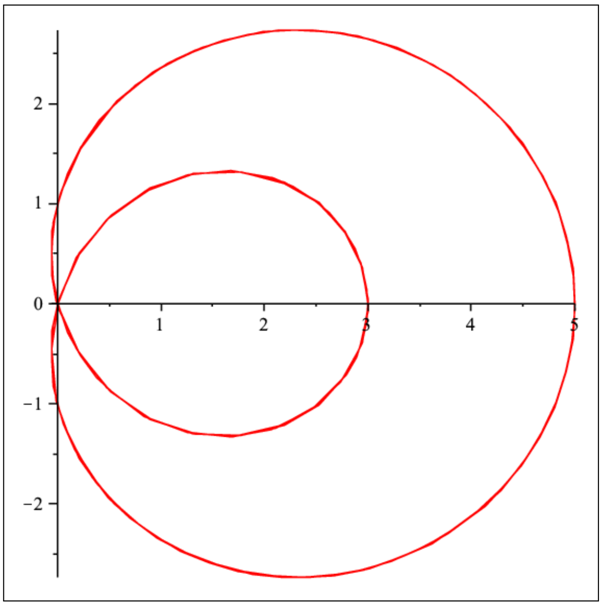
Ulita $r = 1 + 2\sin(\varphi)$



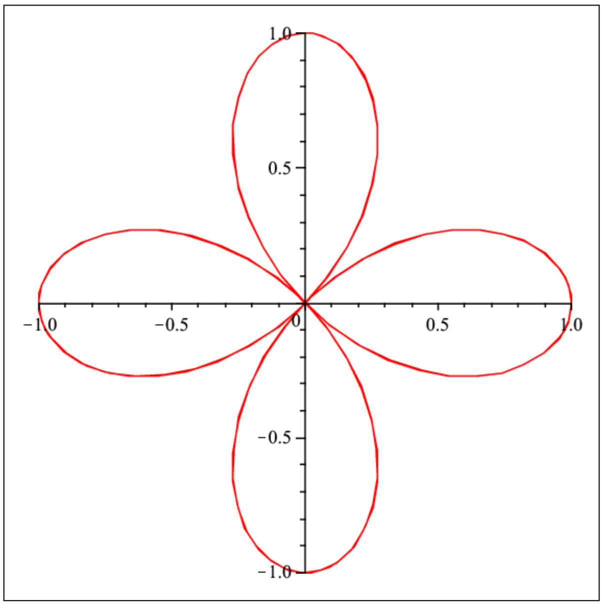
Ulita $r = 1 + 4\sin(\varphi)$



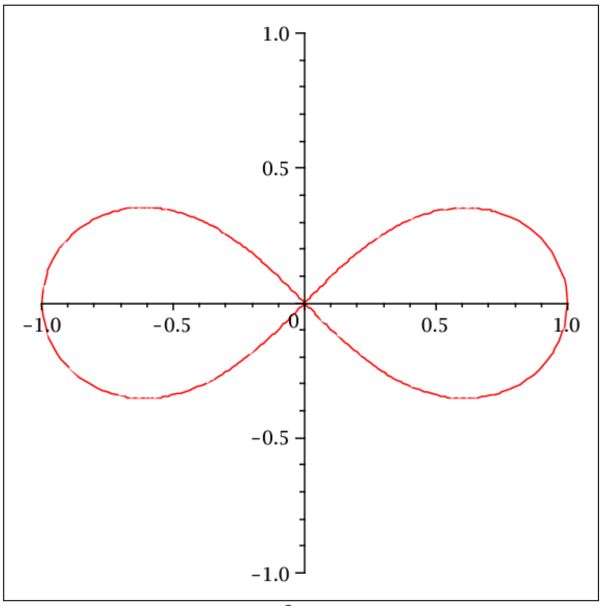
Ulita $r = 1 + 8\sin(\varphi)$



Ulita $r = 1 + 4\cos(\varphi)$



$\{[r, \varphi]_p : r = \cos(2\varphi)\}$



$\{[r_\varphi]_p : r^2 = \cos 2\varphi\}$

4.4 Výpočet plochy v polárních souřadnicích

Věta 4.6 (Výpočet plochy)
Mějme spojitou funkci $r = \rho(\varphi)$, která na $[\alpha, \beta]$ nemění znamení. Potom plocha ve výseči od α do β je $A = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} (\rho(\varphi))^2 \,\mathrm{d}\varphi$.

Důkaz. Nechť bez újmy na obecnosti (BÚNO) je $\rho \geq 0$ na $[\alpha, \beta]$. Uvažujme rozdělení

$$\sigma = \{\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \cdots < \varphi_{n-1} < \varphi_n = \beta\}$$

intervalu $[\alpha, \beta]$ a označme

$$m_k = \min\{\rho(\varphi) : \varphi \in [\varphi_{k-1}, \varphi_k]\}, \quad M_k = \max\{\rho(\varphi) : \varphi \in [\varphi_{k-1}, \varphi_k]\}.$$

Potom obsahy A_k plošky $\{[r, \varphi]_p : \varphi \in [\varphi_{k-1}, \varphi_k] \wedge 0 \leq r \leq \rho(\varphi)\}$ se dají $\forall k$ odhadnout dolní a horní kruhovou výsečí

$$\frac{1}{2} m_k^2 (\varphi_k - \varphi_{k-1}) \leq A_k \leq \frac{1}{2} M_k^2 (\varphi_k - \varphi_{k-1}).$$

Tato nerovnost ovšem platí pro všechna rozdělení σ, proto celkovou plochu $A = \sum\limits_k A_k$ lze podle Riemannovy definice určitého integrálu spočítat vzorcem $A = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) \mathrm{d}\varphi$. □

Věta 4.7
Mějme spojité funkce $\rho_1(\varphi) \geq \rho_2(\varphi)$ pro $\forall \varphi \in [\alpha, \beta]$. Potom plocha ve výseči od α do β mezi těmito funkcemi je $A = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} (\rho_1(\varphi))^2 - (\rho_2(\varphi))^2 \,\mathrm{d}\varphi$.

4.5 Vzdálenost v polárních souřadnicích

Věta 4.8 (Kosinová věta)
Vzdálenost dvou bodů $A = [r_A, \varphi_A]_p$ a $B = [r_B, \varphi_B]_p$ je:

$$\mathrm{d}(A, B)^2 = r_A^2 + r_B^2 - 2 r_A r_B \cos(\varphi_B - \varphi_A).$$

Důkaz. Vyjdeme z definice vzdálenosti dvou bodů $A = [x_A, y_A]_k$ a $B = [x_B, y_B]_k$ v kartézských souřadnicích a přejdeme do souřadnic polárních pomocí Věty 4.2
$\mathrm{d}(A,B)^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 =$
$r_A^2 \cos^2\varphi_A - 2r_A r_B \cos\varphi_A \cos\varphi_B + r_B^2 \cos^2\varphi_B + r_A^2 \sin^2\varphi_A - 2r_A r_B \sin\varphi_A \sin\varphi_B + r_B^2 \sin^2\varphi_B =$
$r_A^2 + r_B^2 - 2r_A r_B \cos\varphi_A \cos\varphi_B - 2r_A r_B \sin\varphi_A \sin\varphi_B = r_A^2 + r_B^2 - 2r_A r_B \cos(\varphi_A - \varphi_B)$ □

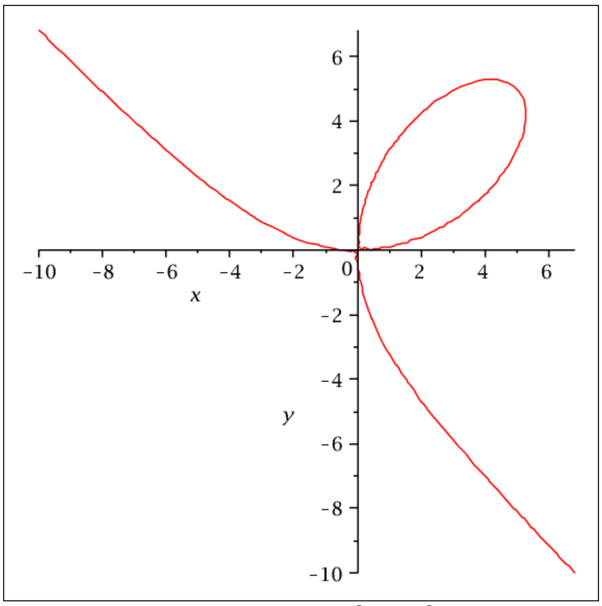
5 Křivky dané parametricky

5.1 Definice a příklady křivek a jejich parametrizace

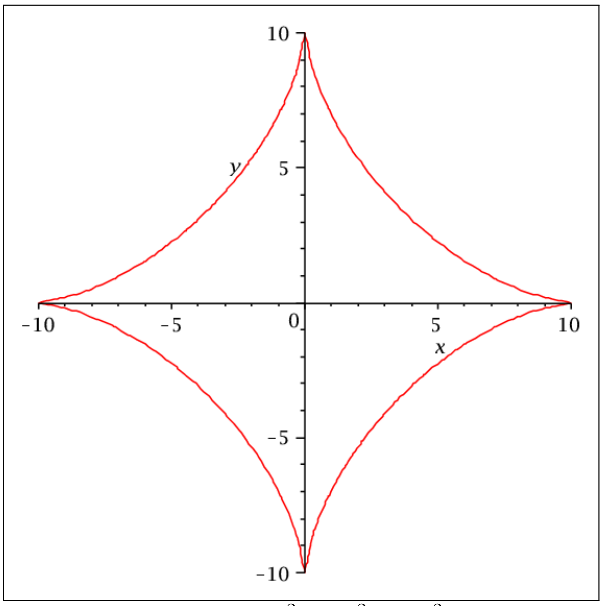
Definice 5.1 (Křivka daná parametricky)
Nechť $X = X(t)$ a $Y = Y(t)$ jsou funkce diferencovatelné na (α, β) a spojité na $[\alpha, \beta]$. Pak množinu bodů

$$\{[X(t), Y(t)] \in \mathbb{R}^2 : t \in [\alpha, \beta]\},$$

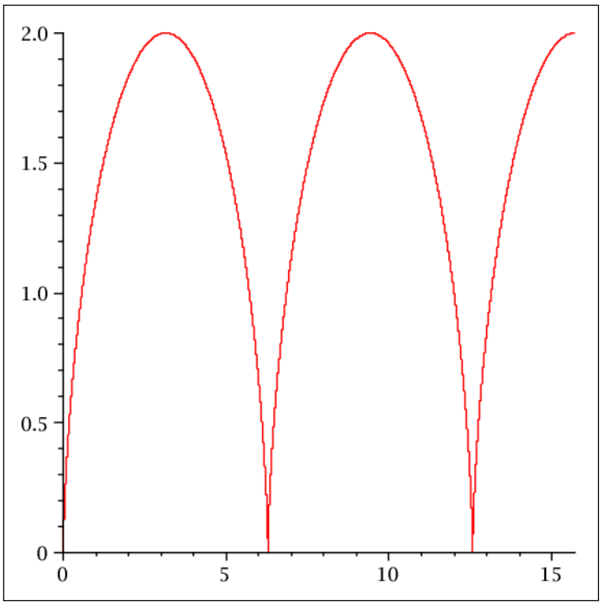
nazvýváme křivkou danou parametricky.



Descartův list $\{[x,y]_k : x^3 + y^3 = axy\}$. Parametrizace $x(t) = a\cos^{\frac{2}{3}} t$ a $y(t) = a\sin^{\frac{2}{3}} t$. Dosadíme: $a^3 = 3a(\cos t \sin t)^{\frac{2}{3}}$.



Asteroida $\{[x,y]_k : x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}\}$ Parametrizace $x(t) = a\cos^3 t$ a $y(t) = a\sin^3 t$.



Cykloida $\{[x,y]_k : x(t) = a(t - \sin t), y(t) = a(1-\cos t), t \geq 0\}$

5.2 Tečny ke křivce dané parametricky

Poznámka. Pro derivaci funkcí podle parametru (typicky t je ve fyzice čase apod.) se často používá značení derivací tečkou: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X(t) = \dot{X}(t)$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Y(t) = \dot{Y}(t)$.

Věta 5.2 (Rovnice tečny)
Mějme křivku $\{[X(t), Y(t)] : t \in [\alpha, \beta]\}$ a nechť pro $t_0 \in (\alpha, \beta)$ je alespoň jedna z derivací $\dot{X}(t_0)$ a $\dot{Y}(t_0)$ nenulová. Pak rovnice tečny ke křivce v bodě $[X(t_0), Y(t_0)]$ je

$$\dot{Y}(t_0)(x - X(t_0)) = \dot{X}(t_0)(y - Y(t_0)).$$

Důkaz. 1. Nechť $\dot{X}(t_0) \neq 0$:
Sestrojíme sečnu s procházející bodem $[X(t_0), Y(t_0)]$ a nějakým blízkým bodem $[X(t_0 + h), Y(t_0 + h)]$ ($h > 0$ malé) a pomocí limitního přechodu $h \to 0$ získáme rovnci tečny $t : y = kx + q$. Směrnice k_s takové sečny má rovnici

$$k_s(h) = \frac{Y(t_0 + h) - Y(t_0)}{X(t_0 + h) - X(t_0)}.$$

Provedeme-li limitní přechod $h \to 0$, dostaneme směrnici tečny k v bodě $[X(t_0), Y(t_0)]$:

$$k = \lim_{h\to 0} k_s(h) = \lim_{h\to 0} \frac{Y(t_0 + h) - Y(t_0)}{X(t_0 + h) - X(t_0)} = \lim_{h\to 0} \frac{Y(t_0 + h) - Y(t_0)}{X(t_0 + h) - X(t_0)} \frac{h}{h} = \frac{\dot{Y}(t_0)}{\dot{X}(t_0)}$$

Koeficient q vypočítáme po dosazení bodu $[x(t_0), y(t_0)]$ do rovnice tečny

$$q = Y(t_0) - kX(t_0) = Y(t_0) - \frac{\dot{Y}(t_0)}{\dot{X}(t_0)} X(t_0).$$

Odtud dostáváme tvrzení věty.

2. Je-li $\dot{X}(t_0) = 0$, pak $X(t) = X(t_0)$ a podle předpokladů je nutně $\dot{Y}(t_0) \neq 0$. Dostáváme tedy vertikální tečnu o rovnici $x = X(t_0)$.

□

5.3 Plocha v křivce dané parametricky

Věta 5.3 (Plocha v křivce)
Nechť $\{[X(t), Y(t)] : t \in [\alpha, \beta]\}$ je křivka daná parametricky a nechť X je prostá, $\dot{X}$ spojitá a $Y \geq 0$ na $[\alpha, \beta]$. Potom plocha vymezená křivkou a osou x je dána vzorcem

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} Y(t)\dot{X}(t)\mathrm{d}t.$$

Důkaz. Protože $X(t)$ je prostá funkce, existuje k ní inverzní funkce X^{-1} a vztah $x = X(t)$ lze invertovat na $t = X^{-1}(x)$. Křivku v parametrickém popisu můžeme zároveň uvažovat jako křivku danou grafem funkce f s předpisem

$$f(x) := Y(t) = Y(X^{-1}(x)).$$

Plocha pod grafem funkce f je

$$A = \int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x,$$

kde meze a a b jsou dány obrazem bodů α a β:

$$a := X(\alpha), \quad b := X(\beta).$$

Dále zpětně provedeme substituci $x = X(t)$ a dostaneme tvrzení věty:

$$A = \int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{\beta} f(X(t))\dot{X}(t)\mathrm{d}t = \int_{\alpha}^{\beta} Y(X^{-1}(X(t)))\dot{X}(t)\mathrm{d}t = \int_{\alpha}^{\beta} Y(t)\dot{X}(t)\mathrm{d}t.$$

□

5.4 Délka křivky dané parametricky

Věta 5.4 (Délka parametrické křivky)
Nechť $\dot{X}$ a $\dot{Y}$ jsou spojité funkce na $[\alpha, \beta]$. Délka křivky dané parametricky je dána vzorcem

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\dot{X}(t))^2 + (\dot{Y}(t))^2}\mathrm{d}t.$$

Věta 5.5 (Délka křivky v polárních souřadnicích)
Nechť r a $\dot{r}$ jsou spojité funkce na $[\alpha, \beta]$. Délka křivky v polárních souřadnicích

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\varphi) + \dot{r}^2(\varphi)}\mathrm{d}\varphi.$$

Důkaz. Ve Větě 5.4 přejdeme do polárních souřadnic vztahy

$$X(\varphi) = r(\varphi)\cos\varphi,$$
$$Y(\varphi) = r(\varphi)\sin\varphi,$$

pro které platí

$$\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 = r^2 + \dot{r}^2.$$

□

5.5 Objem a povrch rotující křivky dané parametricky

Věta 5.6 (Objem křivky rotující okolo osy x)
Nechť $\{[X(t), Y(t)] : t \in [\alpha, \beta]\}$ je křivka daná parametricky a nechť X je prostá, $\dot{X}$ spojitá a $Y \geq 0$ na $[\alpha, \beta]$. Potom objem tělesa, které vznikne rotací křivky dané parametricky okolo osy x je dán vzorcem

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} Y^2(t)\dot{X}(t)\mathrm{d}t.$$

Věta 5.7 (Objem křivky rotující okolo osy y)
Nechť $\{[X(t), Y(t)] : t \in [\alpha, \beta]\}$ je křivka daná parametricky a nechť Y je prostá, $\dot{Y}$ spojitá a $X \geq 0$ na $[\alpha, \beta]$. Potom objem tělesa, které vznikne rotací křivky dané parametricky okolo osy y je dán vzorcem

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} X^2(t)\dot{Y}(t)\mathrm{d}t.$$

Věta 5.8 (Povrch křivky rotující okolo osy x)
Nechť $\{[X(t), Y(t)] : t \in [\alpha, \beta]\}$ je křivka daná parametricky a nechť X je prostá, $\dot{X}$ a $\dot{Y}$ spojité a $Y \geq 0$ na $[\alpha, \beta]$. Potom povrch tělesa, které vznikne rotací křivky dané parametricky okolo osy x je dán vzorcem

$$P = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} Y(t)\sqrt{(\dot{X}(t))^2 + (\dot{Y}(t))^2}\, \mathrm{d}t.$$

Věta 5.9 (Povrch křivky rotující okolo osy y)
Nechť $\{[X(t), Y(t)] : t \in [\alpha, \beta]\}$ je křivka daná parametricky a nechť Y je prostá, $\dot{X}$ a $\dot{Y}$ spojité a $X \geq 0$ na $[\alpha, \beta]$. Potom povrch tělesa, které vznikne rotací křivky dané parametricky okolo osy y je dán vzorcem

$$P = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} X(t)\sqrt{(\dot{X}(t))^2 + (\dot{Y}(t))^2}\, \mathrm{d}t.$$

6 Supremum a infimum

Definice 6.1 (Spočetná množina)
Řekneme, že množina M je spočetná právě tehdy, když existuje funkce $f : \mathbb{N} \to M$, která je prostá a na, tj. $f(\mathbb{N}) = M$.

Definice 6.2 (Supremum)
Nejmenší horní závora množiny M se nazývá supremum M a značí $\sup M$.

Definice 6.3 (Infimum)
Největší dolní závora množiny M se nazývá infimum M a značí $\inf M$.

Věta 6.4 (O existenci suprema a infima)
Každá neprázdná shora, resp. zdola omezená množina $M \subset \mathbb{R}$ má své supremum, resp. infimum.

Věta 6.5 (O blízkosti suprema k M)
Buď $s = \sup M$. Pak $(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in M)(s - \varepsilon < x \leq s)$.

Důkaz. Nerovnost $x \leq s$ plyne rovnou z definice suprema neb s je horní závora.
Nerovnost $s - \varepsilon < x$ dokážeme sporem. Nechť $\exists \varepsilon > 0$ tak, že $\forall x \; s - \varepsilon \geq x$. To je rovnou spor s tím, že s je nejmenší horní závora a přitom $s - \varepsilon$ je ještě menší než s. □

Věta 6.6 (O blízkosti infima k M)
Buď $i = \inf M$. Pak $(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in M)(i \leq x < i + \varepsilon)$.

Důkaz. Důkaz se provede podobně jako v předchozí větě. □

Věta 6.7 (O supremu)
Buď M neprázdná a shora omezená množina. Potom existuje právě jedno číslo s takové, že platí:

1. vlastnost suprema : $(\forall x \in M)(x \leq s)$.
2. vlastnost suprema : $(\forall s' \in \mathbb{R})(s' < s)(\exists x \in M)(s' < x)$.

Věta 6.8 (O infimu)
Buď M neprázdná a zdola omezená množina. Potom existuje právě jedno číslo i takové, že platí:

1. vlastnost infima : $(\forall x \in M)(x \geq i)$.
2. vlastnost infima : $(\forall i' \in \mathbb{R})(i' > i)(\exists x \in M)(i' > x)$.

7 Posloupnosti reálných čísel

7.1 Definice

Definice 7.1 (Číselná posloupnost)
Posloupnost reálných čísel je funkce $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Hodnota posloupnosti pro dané $n \in N$ se nazývá člen posloupnosti a je možné jej značit stejně jako hodnotu funkce v bodě, tj. $a(n)$. Obvykle však budeme používat značení a_n.

Definice 7.2 (Monotonie posloupnosti)
Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

1. ostře rostoucí $\Leftrightarrow$ $a_n < a_{n+1}$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$,
2. rostoucí (neklesající) $\Leftrightarrow$ $a_n \leq a_{n+1}$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$,
3. ostře klesající $\Leftrightarrow$ $a_n > a_{n+1}$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$,
4. klesající (nerostoucí) $\Leftrightarrow$ $a_n \geq a_{n+1}$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$.

Definice 7.3 (Omezenost posloupnosti)
Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

1. omezená shora $\Leftrightarrow$ $(\exists K \in \mathbb{R})(a_n \leq K)$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$,
2. omezená zdola $\Leftrightarrow$ $(\exists K \in \mathbb{R})(a_n \geq K)$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$,
3. omezená $\Leftrightarrow$ $(\exists K > 0)(|a_n| \leq K)$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$.

Poznámka. Vlastnosti funkce $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ se dají použít i na posloupnost $a_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Pokud např. funkce f ostře klesá, pak i posloupnost $f(n)$ ostře klesá. Pozor, obráceně to neplatí. Např. posloupnost $a_n = \sin \frac{\pi}{n+1}$ je klesající, ale funkce $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$ není monotonní.

7.2 Limita posloupnosti

Definice 7.4 (Limita posloupnosti)

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \quad \Leftrightarrow \quad (\forall\varepsilon>0)(\exists n_0\in N)(\forall n>n_0)(|a_n-\ell|<\varepsilon)$$
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad (\forall\alpha>0)(\exists n_0\in N)(\forall n>n_0)(a_n>\alpha)$$
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad (\forall\alpha>0)(\exists n_0\in N)(\forall n>n_0)(a_n<-\alpha)$$

Věta 7.5 (O jednoznačnosti limity)

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \wedge \lim_{n\to+\infty} a_n = m \Rightarrow \ell = m.$$

Důkaz. Důkaz provedeme sporem podobně jako v případě důkazu jednoznačnosti limity v prvním semestru.

Sporem: $\ell \neq m$ a zvolme $\varepsilon = \frac{1}{2}|\ell-m| > 0$. Pak platí

$$0 < \varepsilon = \frac{1}{2}|\ell-m| = \frac{1}{2}|\ell-a_n+a_n-m| \leq \frac{1}{2}|\ell-a_n| + \frac{1}{2}|m-a_n|$$

Z definice $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \ell$, resp. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = m$ platí, že $\exists n_1$, resp. $\exists n_2$ tak, že $|\ell-a_n|<\varepsilon$ pro $\forall n>n_1$, resp. $|m-a_n|<\varepsilon$ pro $\forall n>n_2$. Zvolme $n_0=\max\{n_1,n_2\}$, pak

$$0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}|\ell-a_n| + \frac{1}{2}|m-a_n| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

A to je spor. □

Definice 7.6 (Konvergence posloupnosti)
Posloupnost mající konečnou limitu se nazývá konvergentní, v opačném případě divergentní.

Věta 7.7
Každá konvergentní posloupnost je omezená.

Důkaz. Nechť $a_n \to \ell$.

1. Je-li $\ell = 0$, pak pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje z definice limity takové n_0, že $|a_n| < \varepsilon$ pro $\forall n > n_0$. Omezující konstantu $K > 0$ pak stačí zvolit jako

   $$K = \max\{\varepsilon, a_1, a_2, \ldots, a_{n_0-1}, a_{n_0}\}.$$

2. V případě, že $\ell \neq 0$, použijeme pomocnou posloupnost $b_n = a_n - \ell$, pro kterou platí $b_n \to 0$ a tudíž použijeme předchozí výsledek důkazu, že je omezená nějakou konstantou $K > 0$. Tvrzení pak plyne z použití trojúhelníkové nerovnosti:

   $$|a_n| = |a_n+\ell-\ell| \leq |a_n+\ell| + |\ell| \leq K + |\ell| =: C,$$

   tj. existuje omezující konstanta $C > 0$.

□

Důsledek 7.8
Každá neomezená posloupnost diverguje.

Věta 7.9 (Supremum / infimum jako limita posloupnosti)
Omezená neklesající, resp. nerostoucí posloupnost konverguje k nejmenší horní, resp. největší dolní závoře.

7.3 Limes superior a limes inferior

Definice 7.10 (Vybraná posloupnost)
Řekneme, že posloupnost $\{b_n\}$ je vybraná z posloupnosti $\{a_n\}$ právě tehdy, když existuje ostře rostoucí posloupnost indexů $\{k_n\} \subset \mathbb{N}$, $\lim_{n\to+\infty} k_n = +\infty$, taková, že $b_n = a_{k_n}$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$.

Definice 7.11 (Hromadná hodnota posloupnosti)
Bod $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ nazveme hromadnou hodnotou posloupnosti $\{a_n\}$ právě tehdy, když existuje posloupnost $\{a_{k_n}\}$ vybraná z $\{a_n\}$, pro kterou

$$\lim_{n\to+\infty} a_{k_n} = a.$$

Věta 7.12
Každá posloupnost má hromadnou hodnotu, přičemž množina všech hromadných hodnot má svůj největší i nejmenší prvek (připouštíme i $\pm\infty$).

Definice 7.13 (Limes superior)
Největší hromadnou hodnotu posloupnosti $\{a_n\}$ nazýváme **limes superior** a značíme $\limsup_{n\to+\infty} a_n$.

Definice 7.14 (Limes inferior)
Nejmenší hromadnou hodnotu posloupnosti $\{a_n\}$ nazýváme **limes inferior** a značíme $\liminf_{n\to+\infty} a_n$.

Věta 7.15
Pro každou reálnou posloupnost $\{a_n\}$ platí

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \limsup_{n\to+\infty} a_n = \liminf_{n\to+\infty} a_n = \ell.$$

7.4 Počítání limit

Věta 7.16 (Počítání limit)
Nechť $a_n \to \ell$, $b_n \to m$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak platí

- $a_n + b_n \to \ell + m$,
- $\alpha a_n \to \alpha\ell$,
- $a_n b_n \to \ell m$,
- $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{\ell}{m}$,

mají-li výrazy na pravých stranách smysl (nejsou IND).

Věta 7.17

$$a_n \to l \quad \Leftrightarrow \quad (a_n - l) \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad |a_n - l| \to 0.$$

Věta 7.18 (O sevřené posloupnosti - sendvičová)
Nechť $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)(a_n \leq b_n \leq c_n)$. Pokud $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$ a $\lim_{n\to+\infty} c_n = \ell$, pak $\lim_{n\to+\infty} b_n = \ell$.

Důkaz. Důkaz se provede podoně jak u sendvičové věty v zimním semestru. □

Důsledek 7.19

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)(|b_n| \leq c_n)(c_n \to 0) \Rightarrow b_n \to 0.$$

Věta 7.20
Buď $c_n \to c$ a $(\forall n \in \mathbb{N})(c_n \in D_f)$, kde funkce f je spojitá v bodě c. Potom $\lim_{n\to+\infty} f(c_n) = f(c)$.

Důkaz. Ze spojitosti funkce f v bodě c víme, že pro nějaké $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že

$$|x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon.$$

Zároveň z definice limity $c_n \to c$ nalezneme pro dané $\delta > 0$ takové $n_0 \in \mathbb{N}$, že $\forall n > n_0$ je $|c_n - c| < \delta$. Proto pro $\forall n > n_0$ platí $|f(c_n) - f(c)| < \varepsilon$, což bylo dokázati. □

Definice 7.21 (Hromadný bod množiny)
Nechť M je podmnožina reálných čísel. Bod a nazveme hromadným bodem množiny M (značíme $a \in M'$), pokud platí $(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in M)(|a - x| < \varepsilon)$

Věta 7.22 (Heine)
Buď f reálná funkce a $a \in (D_f)'$, tj. a je hromadným bodem D_f. Pak platí

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell \quad \text{pro} \quad \forall\{x_n\} \subset D_f : x_n \neq a \quad \wedge \quad x_n \to a$$

Důkaz. Důkaz ekvivalence provedeme ve dvou krocích.

1. „$\Rightarrow$“: Předpokládáme, že $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$, tj.

   $$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D_f \setminus \{a\})(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon)$$

   a chceme ukázat, že pro dané $\varepsilon > 0$ existuje n_0 takové, že $\forall n > n_0$ platí

   $$|f(x_n) - \ell| < \varepsilon.$$

   Zřejmě tedy stačí zvolit n_0 tak, aby $\forall n > n_0$ bylo $|x_n - a| < \delta$.

2. „$\Leftarrow$“: Sporem. Předpokládejme, že $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell$ a $\neg \lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$, tj.

   $$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in D_f \setminus \{a\})(|x - a| < \delta \wedge |f(x) - \ell| \geq \varepsilon).$$

   Označme pomocnou množinu $M = \{x \in D_f : |f(x) - \ell| \geq \varepsilon\}$. Ujasněme si, že $a \in M'$, neboť $(\forall \delta > 0)(\exists x)(|x - a| < \delta \wedge |f(x) - \ell| \geq \varepsilon)$ (proto $M \neq \emptyset$).

   Nyní zvolme nějakou posloupnost $\{x_n\}$ takovou, že $\forall n \in \mathbb{N}$ platí: $x_n \in D_f \setminus \{a\}$, $x_n \to a$ a $x_n \in M$ (to lze, neb a je hromadným bodem M) . Podle předpokladu platí pro takto zvolenou posloupnost $\{x_n\}$, že $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$, což je ale spor s konstrukcí množiny M.

□

Věta 7.23 (Cauchyho vzorec)
Buď $\{a_n\}$ posloupnost kladných reálných čísel a nechť existuje konečná limita $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Potom existuje $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$ a platí

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Věta 7.24 (Stolzův vzorec)
Buďte $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ posloupnosti takové, že $b_{n+1} > b_n > 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty$. Nechť existuje $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$. Potom existuje $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n}$ a platí

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}.$$

7.5 Číslo e

Věta 7.25
Pro $\forall n \in \mathbb{N}$ platí

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \mathrm{e} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

přičemž posloupnost $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ostře roste k e a posloupnost $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ ostře klesá k e:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}, \quad \text{a} \quad \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \mathrm{e}.$$

Důkaz. 1. Důkaz nerovností.

Při důkazu vyjdeme z definice obecné mocniny a použijeme definici přirozeného logaritmu $\ln x = \int\limits_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}$, kde $t > 0$.

Pro $\forall n \in \mathbb{N}$ a $\forall t \in [1, 1+\frac{1}{n}]$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{t} \leq 1.$$

Nyní tuto nerovnost zintegrujeme přes interval $[1, 1+\frac{1}{n}]$

$$\int\limits_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{1}{1+\frac{1}{n}}\mathrm{d}t \leq \int\limits_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \leq \int\limits_1^{1+\frac{1}{n}} 1\mathrm{d}t,$$

a po úpravě dostaneme (s využitím definice přirozeného logaritmu)

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}.$$

Tato nerovnost je klíčem k důkazu věty, neb po vložení do argumentu exponenciální funkce dostáváme

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{n+1}} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \mathrm{e}^{\frac{1}{n}},$$

odkud

$$\mathrm{e} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

a

$$\mathrm{e} \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}.$$

Pomocí sendvičové věty nakonec dokážeme, že limitou obou posloupností je e:

$$\mathrm{e} \longleftarrow \frac{\mathrm{e}}{1+\frac{1}{n}} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \mathrm{e},$$

resp.

$$\mathrm{e} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+n} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)\mathrm{e} \longrightarrow \mathrm{e}.$$

2. Důkaz monotonie: dokážeme, že posloupnost $(1 + frac1n)^n$ je ostře rostoucí.

   Stejně jako v prvním případě vyjdeme ze znalostí 01MAT1 a budeme zkoumat monotonii funkce $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ na $[1, +\infty)$, tj. $(1 + frac1n)^n = f(n)$.

   Z definice obecné mocniny snadno nahlédneme, že $f(x) = \exp\left(x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)$. Díky ostře rostoucí funkci exp stačí zkoumat, zda ostře roste vnitřní funkce $g(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$, tj. stačí ukázat, že $g' > 0$ na $(1, +\infty)$.

   Z derivace funkce g

$$\begin{aligned} g'(x) &= \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{x}{1 + \frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1 + x} \end{aligned}$$

   však není rovnou patrné, zda je kladná na požadovaném intervalu, stačí však zkoumat průběh funkce g' a její limity na krajích $(1, +\infty)$. K tomu využijeme druhou derivaci

$$\begin{aligned} g''(x) &= \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{(1 + x)^2} \\ &= -\frac{1}{x(1 + x)} + \frac{1}{(1 + x)^2} \\ &= -\frac{1}{x(x + 1)^2}, \end{aligned}$$

   což je zjevně funkce, která je na $(1, +\infty)$ záporná. Funkce g' je tedy ostře klesající a stačí se podívat, odkud kam klesá:

$$\lim_{x \to 1+} g'(x) = \ln 2, \qquad \lim_{x \to +\infty} g'(x) = 0.$$

   Proto: $g' > 0$ na $(1, +\infty) \Rightarrow g$ ostře rostoucí $\Rightarrow f(x) = \exp(g(x))$ ostře rostoucí.

□

Věta 7.26

Pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x.$$

Důkaz. Důkaz provedeme přímo pomocí funkce ln. Pro pevné $x \in \mathbb{R}$ upravme výraz

$$\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = x \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \ln(1)}{\frac{x}{n}}$$

a označme $h = \frac{x}{n}$. Zřejmě $h \to 0$ pro $n \to +\infty$ a v limitním přechodu dostaneme

$$x \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{\ln(1 + h) - \ln(1)}{h}}_{\text{derivace } \ln z} = x \left(\ln z\right)'_{(z=1)} = x \frac{1}{1} = x.$$

Celkem

$$\lim_{n \to +\infty} \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = x,$$

odkud již plyne tvrzení věty.

□

7.6 Důležité příklady

Lemma 7.27
Nechť $|x| < 1$, pak $x^n \to 0$.

Důkaz. Vyjdeme z nerovnosti

$$-|x|^n \leq x^n \leq |x|^n,$$

a ukážeme, že $|x|^n \to 0$.

Jedna z možností je použít definici obecné mocniny (pro $|x| \neq 0$): $|x|^n = \mathrm{e}^{n \ln |x|}$, odkud je pro $|x| < 1$ tvrzení $|x|^n \to 0$ patrné.

Druhá možnost je tvrzení $|x|^n \to 0$ dokázat z definice limity

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)(|x|^n < \varepsilon).$$

Hledáme tedy takové n_0, aby pro dané ε a $\forall n > n_0$ platilo $|x| < \varepsilon^{\frac{1}{n}}$. Protože $\varepsilon^{\frac{1}{n}} \to 1$ a $|x| < 1$, takové n_0 lze vždy najít. Ze sendvičové věty o limitě sevřené posloupnosti pak již plyne důkaz. $\square$

Lemma 7.28
$\forall x \in \mathbb{R}$ platí $\frac{x^n}{n!} \to 0$.

Důkaz. Pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ takové, že $k > |x|$ a $n > k$ platí

$$\frac{k^n}{n!} = \frac{k^k}{k!} \left(\underbrace{\frac{k}{k+1}}_{<1} \underbrace{\frac{k}{k+2}}_{<1} \cdots \underbrace{\frac{k}{n-2}}_{<1} \underbrace{\frac{k}{n-1}}_{<1} \right) \frac{k}{n} < \underbrace{\frac{k^{k+1}}{k!}}_{\text{nezávisí na n}} \frac{1}{n} \to 0.$$

Ze sendvičové věty tedy plyne tvrzení věty

$$0 < \frac{|x|^n}{n!} < \frac{k^n}{n!} < \frac{k^{k+1}}{k!} \frac{1}{n} \to 0.$$

$\square$

Lemma 7.29
$\alpha > 0$ platí $\frac{1}{n^\alpha} \to 0$.

Důkaz. Tvrzení lze dokázat například pomocí definice obecné mocniny:

$$\frac{1}{n^\alpha} = \mathrm{e}^{\alpha \ln \frac{1}{n}} = \mathrm{e}^{-\alpha \ln n},$$

odkud limitním přechodem $n \to \infty$ dostáváme tvrzení pro $\alpha > 0$. $\square$

Důkaz. Alternativně pro dané α platí, že $\exists p \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{1}{p} < \alpha$. Pak

$$0 < \frac{1}{n^\alpha} = \left(\frac{1}{n}\right)^\alpha \leq \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{p}} \to 0$$

neboť $f(x) = x^{\frac{1}{p}}$ je spojitá v 0. $\square$

8 Nekonečné řady

8.1 Definice

Definice 8.1 (Nekonečná řada)
Nechť $\{a_n\}$ je číselná posloupnost. Posloupnost $\{s_n\}$ definovanou jako n-tý částečný součet členů posloupnosti $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ nazveme nekonečnou číselnou řadou vytvořenou z posloupnosti $\{a_n\}$ a značíme $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. Existuje-li limita $\lim_{n\to+\infty} s_n = s$, pak ji nazýváme součtem nekonečné řady. Je-li $s \in \mathbb{R}$, resp. $s = \pm\infty$, resp. limita $\lim_{n\to+\infty} s_n$ neexistuje, pak říkáme, že nekonečná řada konverguje, resp. diverguje, resp. osciluje (nebo též diverguje).

Věta 8.2 (Geometrická řada)

$$|x| < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \tag{1}$$

$$|x| \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \quad \text{diverguje.} \tag{2}$$

Důkaz. Tvrzení plyne z vlastností limity $\lim_{n\to+\infty} x^n$ po provedení limitního přechodu v součtu konečné geometrické řady:

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

□

Věta 8.3
Jestliže $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a$, $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = b$ a buď $\alpha \in \mathbb{R}$, pak $\sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha a_n + b_n) = \alpha a + b$

8.2 Nutná podmínka konvergence řad

Věta 8.4 (Nutná podmínka konvergence)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \ \text{ konverguje} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

Důkaz. Nechť řada konverguje, tj. posloupnost částečných součtů má konečnou limitu $s_n \to \ell$. Z definice částečných součtů lze psát $a_n = s_n - s_{n-1}$ pro $\forall n = 2, 3, \dots$. Potom

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} s_n - \lim_{n\to+\infty} s_{n-1} = \ell - \ell = 0.$$

□

Důsledek 8.5

$$a_n \nrightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \quad \text{diverguje}$$

8.3 Konvergence řad s nezápornými členy

Věta 8.6
Řada s nezápornými členy konverguje právě tehdy, když je posloupnost částečných součtů omezená.

Důkaz.

1. „$\Rightarrow$“: Řada konverguje, tj. posloupnost $\{s_n\}$ konverguje a proto je omezená (viz Věta 7.7).
2. „$\Leftarrow$“: Posloupnost $\{s_n\}$ neklesá, neb předpokládáme nezáporné členy a_n. Proto limita s_n je buď konečná nebo nekonečná. Nekonečná být ovšem nemůže, neb je $\{s_n\}$ dle předpokladu omezená.

$\square$

Věta 8.7 (Integrální kritérium)
Nechť je funkce f kladná, spojitá a klesající funkce na intervalu $[1, +\infty)$. Pak

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) \ \text{ konverguje } \quad \Leftrightarrow \quad \int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \ \text{ konverguje}$$

Důkaz. Z předpokládaných vlastností funkce f platí nerovnost

$$\int_{k-1}^{k} f(x)\mathrm{d}x \geq f(k) \geq \int_{k}^{k+1} f(x)\mathrm{d}x,$$

kterou vysčítáním přes $k = 2..n$ a limitním přechodu $n \to +\infty$ upravíme na

$$\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \geq \sum_{k=2}^{+\infty} f(k) \geq \int_2^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

Odtud již pomocí základního srovnávacího kritéria (Věta 2.8) plyne tvrzení věty. $\square$

Věta 8.8 (Základní srovnávací kritérium)
Nechť pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $0 \leq a_n \leq b_n$. Pak

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \ \text{ diverguje } \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \ \text{ diverguje}$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \ \text{ konverguje } \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \ \text{ konverguje}$$

Věta 8.9 (Limitní srovnávací kritérium)
Nechť $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ a $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy. Jestliže existuje limita $L = \lim \frac{a_n}{b_n}$, potom platí:

$$0 < L < +\infty : \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \ \text{ konverguje } \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \ \text{ konverguje} \tag{3}$$
$$L < +\infty : \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \ \text{ konverguje } \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \ \text{ konverguje} \tag{4}$$
$$L > 0 : \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \ \text{ diverguje } \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \ \text{ diverguje} \tag{5}$$

Věta 8.10 (Cauchyho odmocninové kritérium)
Buď $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ řada s nezápornými členy. Nechť existuje limita $L = \lim\limits_{n=+\infty} \sqrt[n]{a_n}$. Pak platí:

$$L < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \ \text{ konverguje} \tag{6}$$

$$L > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \ \text{ diverguje} \tag{7}$$

Věta 8.11 (d'Alembertovo podílové kritérium)
Buď $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ řada s kladnými členy. Nechť existuje limita $L = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Pak platí:

$$L < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \ \text{ konverguje} \tag{8}$$

$$L > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \ \text{ diverguje} \tag{9}$$

8.4 Absolutní konvergence

Definice 8.12 (Absolutní konvergence)
Pokud konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$, říkáme, že řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje absolutně.

Poznámka. Konvergentním řadám, které nekonvergují absolutně říkáme neabsolutně konvergentní.

Věta 8.13
Jestliže řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ konverguje, pak konverguje i řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Důkaz. Vyjdeme z nerovnosti

$$-|a_n| \le a_n \le |a_n|,$$

kterou upravíme na

$$0 \le |a_n| + a_n \le 2|a_n|.$$

Ze srovnávacího kritéria dostáváme tvrzení věty, neboť

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{a_n + |a_n|}_{\text{K ze srov. krit.}} - \underbrace{|a_n|}_{\text{K dle předp.}} .$$

□

Důsledek 8.14
Každá absolutně konvergentní řada je konvergentní.

Věta 8.15 (Riemann 1867)
Absolutně konvergentní řady dávají po přerovnání stejný součet. Neabsolutně konvergentní řady lze přeuspořádat tak, aby jejich součet bylo libovolné reálné číslo.

8.5 Alternující řady

Definice 8.16 (Alternující řada)

Řadu $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}b_n$, kde $b_n > 0$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$ nazýváme alternující řadou.

Věta 8.17 (Leibnizovo kritérium)

Nechť $\{b_n\}$ je klesající posloupnost kladných čísel, tj. $0 < b_{n+1} \leq b_n$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$. Pak platí:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}b_n \text{ konverguje} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} b_n = 0.$$

Důkaz.

1. „$\Rightarrow$“: Přímo nutná podmínka konvergence.
2. „$\Leftarrow$“: Budeme zkoumat posloupnost částečných součtů a to nejprve sudé a pak liché členy. Všechny sudé členy posloupnosti $\{s_n\}$ tvoří rostoucí posloupnost, neboť

$$s_{2n} = s_{2n-1} - b_{2n} = s_{2n-2} + \underbrace{b_{2n-1} - b_{2n}}_{\geq 0} \geq s_{2n-2}.$$

   Všechny liché členy posloupnosti $\{s_n\}$ tvoří naopak klesající posloupnost, protože

$$s_{2n+1} = s_{2n} + b_{2n+1} = s_{2n-1} + \underbrace{b_{2n+1} - b_{2n}}_{\leq 0} \leq s_{2n-1}.$$

   Posloupnost $\{s_{2n+1}\}$ je navíc zdola omezená 0 a proto existuje konečná limita $\lim\limits_{n\to+\infty} s_{2n+1}$, kterou označme ℓ. Stejnou limitu má i rostoucí posloupnost sudých členů

$$s_{2n} = s_{2n-1} - b_{2n} \to \ell - 0 = \ell$$

   a protože obě posloupnosti pokrývají všechny prvky posloupnosti $\{s_n\}$, platí $s_n \to \ell$.

□

Věta 8.18 (Odhad součtu alternující řady)

Nechť $\{b_n\}$ je klesající posloupnost kladných čísel takovou, že $b_n \to 0$ a buď $s \in \mathbb{R}$ součet alternující řady $s = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}b_n$. Potom platí

$$s_{2n} < s < s_{2n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

a navíc n-tý částečný součet s_n aproximuje s s přesností b_{n+1}, tj. $|s - s_n| < b_{n+1}$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$.

Důkaz. Využijeme výsledků předchozího důkazu

$$\begin{aligned} s_{2n+2} &= s_{2n} + b_{2n+1} - b_{2n+2} \geq s_{2n} \quad \text{roste k } s \\ s_{2n+1} &= s_{2n-1} - b_{2n} + b_{2n+1} \leq s_{2n-1} \quad \text{klesá k } s, \end{aligned}$$

odkud

$$s_{2n} \leq s \leq s_{2n+1} = s_{2n} + b_{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad |s - s_{2n}|| \leq b_{2n+1}$$

a

$$s_{2n+1} - b_{2n+2} = s_{2n+2} \leq s \leq s_{2n+1} \quad \Leftrightarrow \quad |s - s_{2n+1}|| \leq b_{2n+2}.$$

□

9 Taylorův polynom a Taylorova řada

9.1 Taylorův polynom

Věta 9.1
Nechť funkce f má v bodě a konečnou derivaci řádu n, $n \in \mathbb{N}$. Pak existuje právě jeden polynom $T_n(x)$ stupně nejvýše n takový, že platí $T_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ pro všechna $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Tento polynom má tvar

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Definice 9.2 (Taylorův polynom)
Polynom T_n z věty 9.1 se nazývá n-tý Taylorův polynom funkce f v bodě a.

Definice 9.3 (Zbytek Taylorova polynomu)
Zbytek Taylorova polynomu je definován pro všechna $x \in D_f$:

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x).$$

Věta 9.4 (Taylorova o zbytku)
Nechť f má spojitou derivaci řádu $n+1$ na intervalu $[a, x]$ (nebo $[x, a]$) pro nějaké $x \in D_f$. Potom

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \, \mathrm{d}t,$$

tj.

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \, \mathrm{d}t$$

Důkaz. Důkaz provedeme přímo. Aplikujeme metodu per partes na integrál (pro $k \geq 1$)

$$\frac{1}{k!} \int_a^x f^{(k+1)}(t)(x-t)^k \mathrm{d}t = \Big|\text{per partes}\Big| = \frac{1}{k!}\Big[(x-t)^k f^{(k)}(t)\Big]_a^x + \frac{1}{(k-1)!} \int_a^x f^{(k)}(t)(x-t)^{k-1} \mathrm{d}t,$$

odkud vyjádříme člen v Taylorově polynomu (pro $k \geq 1$)

$$\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = \frac{1}{(k-1)!} \int_a^x f^{(k)}(t)(x-t)^{k-1} \mathrm{d}t - \frac{1}{k!} \int_a^x f^{(k+1)}(t)(x-t)^k \mathrm{d}t,$$

který dosadíme přímo do definice zbytku $R_n(x)$

$$
\begin{aligned}
R_n(x) = f(x) - T_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}}{k!}(a)(x-a)^k = f(x) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}}{k!}(a)(x-a)^k = \\
= f(x) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} \int\limits_a^x f^{(k)}(t)(x-t)^{k-1}\mathrm{d}t - \frac{1}{k!}\int\limits_a^x f^{(k+1)}(t)(x-t)^k\mathrm{d}t \\
= f(x) - f(a) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \int\limits_a^x f^{(k+1)}(t)(x-t)^k\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\int\limits_a^x f^{(k+1)}(t)(x-t)^k\mathrm{d}t \\
= f(x) - f(a) - \frac{1}{0!}\int\limits_a^x f^{(1)}(t)(x-t)^0\mathrm{d}t + \frac{1}{n!}\int\limits_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\mathrm{d}t \\
= \frac{1}{n!}\int\limits_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

□

Věta 9.5 (Odhad zbytku)

$$|R_n(x)| \leq \left(\max_{t\in I} |f^{n+1}(t)|\right) \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Důkaz. Pro $x > a$ platí:

$$|R_n(x)| = \frac{1}{n!}\left|\int\limits_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{n!}\int\limits_a^x |f^{(n+1)}(t)||x-t|^n\mathrm{d}t \leq \left(\max_I f^{(n+1)}(t)\right)\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Pro $x < a$ se odhad provede analogicky s tím, že je třeba si dát pozor na

$$\left|\int\limits_a^x g(t)\mathrm{d}t\right| \leq -\int\limits_a^x |g(t)|\mathrm{d}t.$$

□

9.2 Taylorova řada

Definice 9.6 (Taylorova řada)
Nechť f je nekonečně diferencovatelná v bodě $a \in D_f$ (tj. má konečné derivace všech řádů v bodě a) a nechť pro $x \in I$ platí, že $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$. Pak lze $\forall x \in I$ zkonstruovat nekonečnou řadu

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k,$$

kterou nazýváme Taylorovou řadou funkce f v bodě a. Množinu I nazýváme oborem konvergence Taylorovy (mocninné) řady.

Poznámka. Důležité rozvoje funkcí do Taylorovy (mocninné) řady:

1. $\mathrm{e}^x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}x^n \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

2. $\sin(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

3. $\cos(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

4. $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \quad \forall x \in (-1, 1]$.

10 Mocninné řady

10.1 Konvergence

Definice 10.1 (Mocninná řada)

Buď $\{a_n\}$ posloupnost reálných čísel a $x_0 \in \mathbb{R}$. Řada $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ se nazývá mocninnou řadou se středem v bodě x_0.

Řekneme, že mocninná řada $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ konverguje na množině I, jestliže pro každé $z \in I$ je číselná řada $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(z-x_0)^n$ konvergentní. Maximální množině I (ve smyslu inkluze) pak říkáme obor konvergence mocninné řady.

Věta 10.2

Jestliže $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ konverguje v bodě $x_0 + z$, $z \neq 0$, pak konverguje absolutně pro každé $x \in (x_0 - |z|, x_0 + |z|)$, tj. $|x - x_0| < |z|$. Naopak, jestliže řada $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ diverguje v bodě $x_0 + y$, pak pro každé $x \in (-\infty, x_0 - |y|) \cup (x_0 + |y|, +\infty)$, tj. $|x - x_0| > |y|$, řada $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ diverguje.

Věta 10.3 (O poloměru konvergence)

Pro každou mocninnou řadu $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$ existuje právě jedno r, $0 \leq r \leq +\infty$ tak, že řada

1. Konverguje absolutně pro všechna x taková, že $|x-a| < r$

2. Diverguje pro všechna x taková, že $|x-a| > r$.

Definice 10.4 (Poloměr konvergence)

Symbol r z Věty 10.3 nazýváme poloměrem konvergence mocninné řady se středem v bodě a.

Věta 10.5 (Cauchy-Hadamard)

Poloměr konvergence mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$ se spočítá vzorcem

$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

resp. $r = 0$ pokud $\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$, resp. $r = +\infty$, pokud $\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$

10.2 Derivování mocninných řad

Věta 10.6 (Derivace mocninné řady)

Jestliže $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$ konverguje na $(a-r, a+r)$, pak

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n(x-a)^{n-1}$$

také konverguje na $(a-r, a+r)$.

10.3 Integrace mocninných řad

Věta 10.7 (Integrace mocninných řad)

Nechť $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ konverguje na (x_0-r, x_0+r). Pak $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}$ konverguje na $(a-r, a+r)$ a platí, že $\int f = g + C$, tj.

$$\int \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n \,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1} + C.$$

10.4 Vlastnosti mocninných řad a sčítání řad

Věta 10.8 (Abelova)

Nechť f je součtová funkce mocninné řady $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$, která konverguje v bodě $a-r$, resp. $a+r$, kde r je její poloměr konvergence. Pokud je f spojitá v $a-r$ zprava, resp. $a+r$ zleva, pak mocninná řada v tomto bodě konverguje k $f(a-r)$, resp. $f(a+r)$.

Věta 10.9

V oboru konvergence je mocninná řada Taylorovou řadou své součtové funkce.

Reference

[1] E. Dontová, *Matematika I*, Vydavatelství ČVUT, 1999

[2] E. Dontová, *Matematika II*, Vydavatelství ČVUT, 1996

[3] V. Jarník, *Diferenciální počet I*, ČSAV, 1955

[4] S. L. Salas, E. Hille, *Calculus, One Variable* John Wiley and Sons, 1990 (6th edition), ISBN 0-471-51749-6