

Tomáš Oberhuber

Faculty of Nuclear Sciences and Physical Engineering
Czech Technical University in Prague

Video na Youtube

Cauchyho úloha

Budeme řešit obyčejnou diferenciální rovnici s počáteční podmínkou:

$$\begin{aligned}x'(t) &= f(t, x(t)) \text{ na } (0, T), \\x(0) &= x_0.\end{aligned}$$

Řešení $x(t)$ na intervalu $(0, T)$ budeme ze znalosti v bodě 0 postupně rozšiřovat na celý interval.

Cauchyho úloha

Zvolíme si časový krok τ a $N = T/\tau$. Hodnotu přibližného řešení v uzlu $i = 1, \dots, N$ budeme značit x_i .

Pomocí předpisu

$$x_1 = x_0 + \Delta x(0, \tau),$$

$$x_2 = x_1 + \Delta x(\tau, \tau),$$

\vdots

$$x_N = x_{N-1} + \Delta x((N-1)\tau, \tau),$$

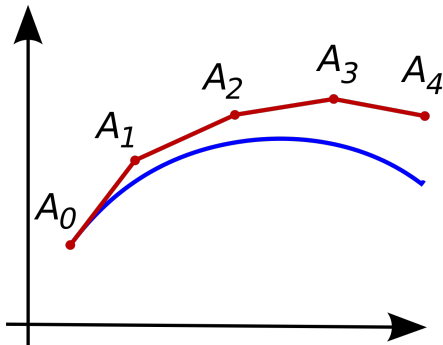
zkonstruujeme přibližné řešení. Lineární interpolací lze dodefinovat na:

$$x_\tau(t) = (1 - s)x_{\lfloor t/\tau \rfloor} + sx_{\lfloor t/\tau \rfloor + 1},$$

kde

$$s = \frac{t - \lfloor t/\tau \rfloor}{\tau}.$$

Cauchyho úloha



Zdroj: Wikipedie

Červená křivka ukazuje přibližné řešení, modrá přesné.

Cauchyho úloh

Pro volbu $\Delta x(t, \tau)$ lze postupovat takto (pomocí Taylora v bodě t):

$$\Delta x(t, \tau) = x(t + \tau) - x(t) = \tau x'(t) + \frac{\tau^2}{2} x''(t) + \dots,$$

kde

$$x'(t) = f(t, x(t)),$$

$$\begin{aligned} x''(t) &= \frac{d}{dt} f(t, x(t)) = \partial_t f(t, x(t)) + \partial_x f(t, x(t)) x'(t) \\ &= \partial_t f(t, x(t)) + \partial_x f(t, x(t)) f(t, x(t)), \end{aligned}$$

$$x'''(t) = \dots$$

Rungovy-Kuttovy metody

Tento přístup má několik nevýhod:

- 1 výsledné vzorce jsou složité a náročné na napočítání z pohledu času CPU
- 2 pro každou nově zadanou pravou stranu $f(t, x(t))$ bychom museli napočítat všechny potřebné derivace
- 3 praxe prý ukazuje, že výsledná metoda je numericky nestabilní

Proto se pro řešení Cauchyho úlohy používají
Rungovy-Kuttovy metody.

Rungovy-Kuttovy metody

Přírůstek $\Delta x(t, \tau)$ funkce $x(t)$ budeme hledat ve tvaru:

$$\Delta x(t, \tau) = p_1 k_1(t, \tau) + p_2 k_2(t, \tau) + \dots + p_n k_n(t, \tau),$$

kde

$$k_1(t, \tau) = \tau f(t, x(t)),$$

$$k_2(t, \tau) = \tau f(t + \alpha_2 \tau, x(t) + \beta_{21} k_1(t, \tau)),$$

$$k_3(t, \tau) = \tau f(t + \alpha_3 \tau, x(t) + \beta_{31} k_1(t, \tau) + \beta_{32} k_2(t, \tau)),$$

⋮

$$k_n(t, \tau) = \tau f(t + \alpha_n \tau, x(t) + \beta_{n1} k_1(t, \tau) + \beta_{n2} k_2(t, \tau) + \dots + \beta_{n,n-1} k_{n-1}(t, \tau))$$

Rungovy-Kuttovy metody

- koeficienty p_i , α_i a β_{ij} musí být vhodně zvoleny a definují tak vlastně danou metodu
- jejich volbu budeme provádět tak, aby přírůstek Δx podle Rungova-Kuttova tvaru a skutečného Taylorova rozvoje měl shodné koeficienty do co nejvyššího řádu pro libovolnou pravou stranu $f(t, x(t))$

Rungovy-Kuttovy metody

- pro funkci

$$\begin{aligned}
 \varphi_n(\tau) &= [x(t + \tau) - x(t)] - \\
 &\quad [p_1 k_1(t, \tau) + p_2 k_2(t, \tau) + \dots p_n k_n(t, \tau)] \\
 &= \tau x'(t) + \frac{\tau^2}{2} x''(t) + \dots - \\
 &\quad [p_1 k_1(t, \tau) + p_2 k_2(t, \tau) + \dots p_n k_n(t, \tau)] \\
 &= \tau f(t, x(t)) + \frac{\tau^2}{2} \frac{d}{dt} f(t, x(t)) + \dots - \\
 &\quad [p_1 k_1(t, \tau) + p_2 k_2(t, \tau) + \dots p_n k_n(t, \tau)]
 \end{aligned}$$

chceme, aby platilo

$$\varphi_n^{(k)}(0) = 0,$$

pro $k \in 0, \dots, r$ a co nejvyšší r .

Rungovy-Kuttovy metody

Máme-li totiž dvě funkce f a g , jejichž prvních r derivací se rovná v bodě t , pak je

$$\begin{aligned} f(t + \tau) - g(t + \tau) &= \\ f(t) + f'(t) + \dots + \frac{\tau^r}{r!} f^{(r)}(t) + \frac{\tau^{r+1}}{(r+1)!} f^{(r+1)}(\xi_f) \\ - g(t) - g'(t) - \dots - \frac{\tau^r}{r!} g^{(r)}(t) - \frac{\tau^{r+1}}{(r+1)!} g^{(r+1)}(\xi_g) \\ &= \frac{\tau^{r+1}}{(r+1)!} [f^{(r+1)}(\xi_f) - g^{(r+1)}(\xi_g)], \end{aligned}$$

pak $|f(t + \tau) - g(t + \tau)| = O(\tau^{r+1})$, tj. g aproximuje f v bodě t s přesností řádu $r + 1$. **Zároveň platí, že prvních r derivací funkce $f - g$ je nulových.**

Rungovy-Kuttovy metody

Pak platí:

$$\begin{aligned}x(t + \tau) - x(t) &= [p_1 k_1(t, \tau) + p_2 k_2(t, \tau) + \dots + p_n k_n(t, \tau)] + \varphi(\tau), \\x(t + \tau) - x(t) &= \Delta x(t) + O(\tau^{r+1})\end{aligned}$$

Remark 1

Lze ukázat, že je-li

$$x(t + \tau) - x(t) = \Delta x(t) + O(\tau^{r+1}),$$

pak platí

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\|x_\tau(t) - x(t)\|}{|\tau|^r} = C,$$

tj. přesné řešení $x(t)$ je aproximováno přibližným $x_\tau(t)$ na $(0, T)$ s přesností řádu r .

Rungovy-Kuttovy metody

Example 2

$n = 1$ (Eulerova metoda)

$\rho_1 = 1$

$$\begin{aligned}k_1(t, \tau) &= \tau f(t, x(t)), \\ \Delta x(t, \tau) &= \tau k_1(t, \tau)\end{aligned}$$

Example 3

$$n = 2$$

- $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}, \alpha_2 = \beta_{21} = 1,$

$$k_1(t, \tau) = \tau f(t, x(t)),$$

$$k_2(t, \tau) = \tau f(t + \tau, x(t) + k_1(t, \tau)),$$

$$x(t + \tau) = x(t) + \frac{1}{2}(k_1(t, \tau) + k_2(t, \tau))$$

- $p_1 = 0, p_2 = 1, \alpha_2 = \beta_{21} = \frac{1}{2},$

$$k_1(t, \tau) = \tau f(t, x(t)),$$

$$k_2(t, \tau) = \tau f(t + \frac{\tau}{2}, x(t) + \frac{1}{2}k_1(t, \tau)),$$

$$x(t + \tau) = x(t) + k_2(t, \tau)$$

Cauchyho úloha

Budeme řešit rovnici vyššího řádu:

$$x^{(n)}(t) = f(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t)).$$

- provedeme substituci $u_i(t) = x^{(i)}(t)$ pro $i = 0, \dots, n$
- pak platí $u'_i(t) = u_{i+1}(t)$
- úlohu lze přepsat na soustavu ODR rovnic prvního řádu

$$u'_{n-1}(t) = f(t, u_0(t), \dots, u_{n-1}(t)),$$

$$u'_{n-2}(t) = u_{n-1}(t),$$

$$\vdots$$

$$u'_0(t) = u_1(t).$$

- pro každé u_0, \dots, u_{n-1} musíme ale znát počáteční podmínku, tj. hodnotu v bodě 0
- v původní úloze to odpovídá funkční hodnotě $x(0)$ a všech derivací až do $x^{(n-1)}(0)$

Cauchyho úloha

Úlohu lze přepsat ve vektorovém tvaru:

$$\vec{u}' = \begin{pmatrix} u_0'(t) \\ u_1'(t) \\ \vdots \\ u_{n-1}'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ f(t, u_0(t), \dots, u_{n-1}(t)) \end{pmatrix} = \vec{F}(t, \vec{u}(t)).$$

Rungova-Kuttova metoda

Rungovy-Kuttovy metody pak mají také vektorový tvar:

$$\Delta \vec{u}(t, \tau) = p_1 \vec{k}_1(t, \tau) + p_2 \vec{k}_2(t, \tau) + \dots + p_n \vec{k}_n(t, \tau),$$

kde

$$\vec{k}_1(t, \tau) = \tau \vec{F}(t, \vec{u}(t)),$$

$$\vec{k}_2(t, \tau) = \tau \vec{F}(t + \alpha_2 \tau, \vec{u}(t) + \beta_{21} \vec{k}_1(t, \tau)),$$

$$\vec{k}_3(t, \tau) = \tau \vec{F}(t + \alpha_3 \tau, \vec{u}(t) + \beta_{31} \vec{k}_1(t, \tau) + \beta_{32} \vec{k}_2(t, \tau)),$$

⋮

$$\vec{k}_n(t, \tau) = \tau \vec{F}(t + \alpha_n \tau, \vec{u}(t) + \beta_{n1} \vec{k}_1(t, \tau) + \beta_{n2} \vec{k}_2(t, \tau) + \dots + \beta_{n,n-1} \vec{k}_{n-1}(t, \tau))$$